

## МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛАЗЕРНОГО ГИРОМЕТРА СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПОДСТАВКОЙ ТИПА МЕАНДР

В.Ф. Судаков

mr.vvffss@inbox.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Сложные (комбинированные) знакопеременные частотные подставки в лазерных гиromетрах применяются для приближения формы их частотных характеристик к идеальной прямой. Известные аналитические методы расчета частотных характеристик в этих случаях практически непригодны, а непосредственное использование персональных компьютеров приводит к неприемлемо большому затратам времени. В целях преодоления этих трудностей разработан специальный метод расчета частотных характеристик при наличии знакопеременной частотной подставки. Предложено приращение фазы сигнала биений за период подставки рассматривать как угол поворота на фазовой плоскости за такое же время вектора-решения вспомогательного линейного векторного дифференциального уравнения. Тем самым вместо нелинейного фазового уравнения решена линейная гамильтонова система дифференциальных уравнений второго порядка. Наиболее трудоемкая часть расчета сформулирована в аналитическом виде. Вычисления (рекуррентного типа) выполнены в среде Mathcad 15 за предельно малое время. Предлагаемый метод применен для расчета частотных характеристик лазерных гиromетров при подставке меандр

### Ключевые слова

*Лазерный гиromетр, фазовое уравнение, частотная подставка, частотная характеристика, подставка типа меандр*

---

Поступила в редакцию 30.11.2015

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

**Введение.** Частотная характеристика (ЧХ) — это зависимость частоты биений (приращение фазы сигнала биений за известный интервал времени, отнесенное к величине этого интервала) от разности собственных частот кольцевого резонатора (КР). Именно так в настоящей работе и будем рассматривать входную величину и выходное значение ЧХ. Переход к угловой скорости от разности частот можно считать отдельной задачей (об определении коэффициента линейной связи между ними).

Многочисленные работы по лазерным гиromетрам (ЛГ), начиная с конца 1960-х г. (например, [1–8]), в той или иной степени способствовали созданию ком-

пьютерной (имитационной) модели ЛГ. Ценность упомянутых работ была и остается до настоящего времени в проведении количественного описания ЧХ, в частности, с использованием ПК. Исторически первой количественно была описана динамическая ЧХ при наличии простой периодической подставки. На этом этапе в основном применялись аналитические методы исследования. В конечном счете, ЧХ каждого образца ЛГ определяли экспериментально. Интерес к получению ЧХ на ПК [9–12] объясняется тем, что в машинном эксперименте можно получить ЧХ виртуального ЛГ, не имея при этом реального прибора.

Использование комбинированной подставки, когда на периоде основной (медленной) подставки действует несколько десятков периодов быстрого меандра, радикально изменило подход к построению динамической ЧХ. Стало принципиально невозможным описать ЧХ аналитически. В данном случае необходимо ориентироваться на создание метода, по которому ЧХ будет строить ПК. В то же время наиболее принципиальную часть расчета целесообразно выполнить аналитически, и только рутинную часть расчетов возложить на ПК. Также следует исходить из того, что допустимое время построения ЧХ должно быть достаточно мало, поскольку предполагается оперативность получения и использования результата. Именно так и ставится задача: необходимо разработать такой метод расчета ЧХ с комбинированной подставкой, который в среде Mathcad 15 может быть реализован в пределах 8...10 с на один вариант ЧХ. Работоспособность метода целесообразно сначала проверить путем построения динамической ЧХ при наличии простой знакопеременной подставки, например, в форме меандра. Такая подставка многократно использовалась ранее (например, [10–12]), что и позволяет считать ее эталоном для проверки предлагаемого алгоритма.

**Вспомогательная система линейных дифференциальных уравнений.** Рассмотрим ЛГ в режиме, когда интенсивности встречных волн практически равны и постоянны. В этом случае динамика фазы  $\Psi(t)$  сигнала биений двух встречно распространяющихся волн может быть описана, как известно [4], одним нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\Psi}{dt} = K\Omega_P(t) + \Omega_L \cos(\Psi + \chi), \quad (1)$$

где  $K = 1 - \frac{\omega_0 d}{k_0 u \sqrt{\pi}}$  — коэффициент, учитывающий уровень накачки ( $\omega_0 d$ ) и полуширину доплеровского контура усиления активной среды ( $k_0 u \sqrt{\pi}$ );  $\Omega_P = \omega_{CW} - \omega_{CCW}$  — расщепление собственных частот КР; полуширина статической зоны захвата ( $\Omega_L$ ) и постоянная фаза  $\chi$  определяются амплитудами и фазами коэффициентов обратного рассеяния встречных волн.

Комбинированная подставка — это переменное частотное расщепление вида

$$\Omega_D(t) = \Omega_R \text{sign}[\sin(\nu_R t)] + \Omega_S \text{sign}[\sin(\nu_S t)], \quad (2)$$

т. е. представляет собой суперпозицию медленного меандра с амплитудой  $\Omega_S$  периода  $T_S$  и быстрого меандра с амплитудой  $\Omega_R \gg \Omega_S$  периода  $T_R \ll T_S$ . Кроме того, расщепление имеет также постоянную составляющую  $\Omega$ . Таким образом,

$$K\Omega_p(t) = \Omega_D(t) + \Omega.$$

Общих приемов аналитического решения фазового уравнения (1) не существует, однако, можно предложить специальный метод определения фазы в конце периода модуляции  $\Psi(T_S)$  при начальной фазе  $\Psi(0)$ , что позволяет построить частотную характеристику  $\Omega_{beat}(\Omega) = \frac{\Psi(T_S) - \Psi(0)}{T_S}$  ( $\Omega_{beat}$  — частота биений по определению).

Рассмотрим вспомогательное линейное векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \quad (3)$$

с начальным условием  $y(0)$ . Пусть матричный коэффициент имеет специальный вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma(t) \\ \alpha(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Поскольку  $SpA = 0$ , то система дифференциальных уравнений (3) каноническая (гамильтонова). Следовательно, ее можно переписать в стандартном виде

$$J \frac{dy}{dt} = H(t)y \quad (5)$$

с гамильтонианом  $H(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}$  и симплектической матрицей

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение угол  $\theta(t)$ , образованный вектором  $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  в соответствующей фазовой плоскости с осью  $y_1$ . Очевидно, что

$$\theta(t) = \arctg \frac{y_2(t)}{y_1(t)}. \quad (6)$$

Угловая скорость вращения вектор-решения  $y(t)$  вспомогательного дифференциального уравнения (3) есть

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \operatorname{arctg} \frac{y_2}{y_1} \right).$$

Вычислим эту производную как

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} \left( \frac{dy_2}{dt} y_1 - \frac{dy_1}{dt} y_2 \right). \quad (7)$$

Очевидно (см. (5)), что

$$Hy = J \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy_2}{dt} \\ -\frac{dy_1}{dt} \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся этим выражением, чтобы представить (7) в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} \left( \frac{dy_2}{dt} y_1 - \frac{dy_1}{dt} y_2 \right) = \frac{(Hy, y)}{(y, y)}.$$

Здесь использовано определение скалярного произведения векторов

$$(y, y) = y_1^2 + y_2^2, \quad (Hy, y) = \frac{dy_2}{dt} y_1 - \frac{dy_1}{dt} y_2.$$

Из матрицы  $H(t)$  и уравнения (5) следует, что скалярное произведение  $(Hy, y) = \alpha y_1^2 + \gamma y_2^2$ . Тогда угловую скорость вектора-решения запишем так:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(Hy, y)}{(y, y)} = \frac{\alpha y_1^2 + \gamma y_2^2}{y_1^2 + y_2^2}. \quad (8)$$

Поскольку  $\cos \theta = \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$ ,  $\sin \theta = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$ , то последней формуле можно придать следующий вид:

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha \cos^2 \theta + \gamma \sin^2 \theta,$$

или

$$\frac{d(2\theta)}{dt} = (\alpha + \gamma) + (\alpha - \gamma) \cos(2\theta). \quad (9)$$

Это уравнение совпадает с фазовым уравнением (1) теории ЛГ

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Omega_D(t) + \Omega - \Omega_L \cos(\Psi + \chi + \pi),$$

если положить, что

$$\alpha(t) - \gamma(t) = -\Omega_L, \quad \alpha(t) + \gamma(t) = \Omega_D(t) + \Omega.$$

Отметим, что при этом фазе сигнала биений  $\Psi$  соответствует угол поворота  $\theta$  вектора-решения вспомогательного векторного дифференциального уравнения:

$$2\theta = \Psi + \chi + \pi. \quad (10)$$

Таким образом, вместо определения фазы сигнала биений из фазового уравнения с заданными параметрами  $\Omega_L$ ,  $\Omega_D(t)$  можно найти решение  $2\theta$  уравнения (9) с заданными переменными коэффициентами

$$\alpha(t) = \frac{\Omega_D(t) + \Omega - \Omega_L}{2}, \quad \gamma(t) = \frac{\Omega_D(t) + \Omega + \Omega_L}{2}. \quad (11)$$

Фактически решать уравнение (9) не нужно, так как можно искать угловую скорость по формуле (8). Правая часть этого выражения зависит от решения линейной задачи (3), которая проще, чем эквивалентные нелинейные уравнения (9) или (1).

Итак, приведенные выкладки дают возможность искать фазу (или угол поворота вектор-решения), исходя из решения вспомогательного дифференциального уравнения (3), имеющего каноническую (гамильтонову) форму.

**Общий вид вектора-решения вспомогательного дифференциального уравнения (3) в случае меандрподставки.** Частное решение (3) можно записать в явном виде

$$y(t) = X(t)y(0).$$

Здесь использована матричная функция (матрициант)  $X(t)$ , удовлетворяющая матричному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (12)$$

с начальным условием  $X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

В общем случае найти матрициант аналитически невозможно. Но если матричные элементы  $A(t)$  конкретизированы, то удастся найти матрициант либо приближенно, либо даже точно. В нашем случае рассматривается специфическая зависимость периодических элементов матрицы  $A(t)$  от времени. Для меандрподставки имеем

$$\Omega_D(t) = \Omega_S(t) = \begin{cases} \Omega_S, & 0 \leq t \leq \frac{T_S}{2}; \\ -\Omega_S, & \frac{T_S}{2} \leq t \leq T_S. \end{cases} \quad (13)$$

Постоянная  $\Omega$  в (11) может изменяться только как независимая переменная. Постоянные  $\Omega_S$ ,  $T_S = \frac{2\pi}{\nu_S}$ ,  $\Omega_L$  считаются заданными параметрами. Учитывая (11) и (13), выявили, что матрица  $A(t)$  кусочно-постоянная и периодическая с периодом  $T_S = \frac{2\pi}{\nu_S}$ . При таких матричных элементах возможно аналитическое решение задачи, в частности — определение матрицианта. Чтобы упростить формулы, введем следующие обозначения при  $q = 1, 2$ :

$$\alpha_q = \alpha((-1)^{q-1}\Omega_S), \quad \gamma_q = \gamma((-1)^{q-1}\Omega_S), \quad \mu_q = \mu((-1)^{q-1}\Omega_S) = \sqrt{\alpha_q\gamma_q}.$$

Соответствующие индексы будут использованы также и при обозначениях матрицианта и гамильтониана:

$$X_q = X((-1)^{q-1}\Omega_S), \quad H_q = H((-1)^{q-1}\Omega_S).$$

Рассмотрим полупериод  $\left[0, \frac{T_S}{2}\right]$ , где матрица  $A(t)$  постоянна с элементами  $\alpha_1$ ,  $\gamma_1$ . Собственные значения этой матрицы находим как корни уравнения

$$\det \begin{pmatrix} \mu_1 & -\gamma_1 \\ \alpha_1 & -\mu_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем два корня  $\mu_1 = \pm\sqrt{\gamma_1\alpha_1}$ . Каждому из собственных значений соответствует собственный вектор. Два таких вектора-столбца образуют матрицу

$$T = \begin{pmatrix} i\frac{\mu_1}{\alpha_1} & -i\frac{\mu_1}{\alpha_1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

С ее помощью можно привести матрицу  $A$  к диагональному виду

$$A = T \begin{pmatrix} i\mu_1 & 0 \\ 0 & -i\mu_1 \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (14)$$

Формальное решение матричного дифференциального уравнения (12) с постоянной матрицей коэффициентов есть матричная экспонента  $X(t) = e^{At}$ . По аналогии с (14) найдем явный вид матрицианта на полупериоде  $\left[0, \frac{T_S}{2}\right]$ :

$$X_1(t) = e^{At} = T \begin{pmatrix} \exp(i\mu_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(-i\mu_1 t) \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\mu_1 t) & -\sin(\mu_1 t)\frac{\mu_1}{\alpha_1} \\ \sin(\mu_1 t)\left(\frac{\mu_1}{\alpha_1}\right)^{-1} & \cos(\mu_1 t) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Матрициант (15) позволяет найти решение вспомогательного векторного дифференциального уравнения (3) в пределах указанного полупериода

$$y(t) = X_1(t)y(0). \quad (16)$$

В конечной точке рассматриваемого полупериода получим

$$y\left(\frac{T_S}{2}\right) = X_1\left(\frac{T_S}{2}\right)y(0).$$

На следующем полупериоде  $\left[\frac{T_S}{2}, 2\frac{T_S}{2}\right]$  решение вспомогательного векторного дифференциального уравнения (3) находим аналогично

$$y(t) = X_2\left(t - \frac{T_S}{2}\right)y\left(\frac{T_S}{2}\right) = X_2\left(t - \frac{T_S}{2}\right)X_1\left(\frac{T_S}{2}\right)\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}.$$

На этом полупериоде коэффициенты  $\alpha_2$ ,  $\gamma_2$  и матрициант имеют другой вид

$$X_2\left(t - \frac{T_S}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left[\mu_2\left(t - \frac{T_S}{2}\right)\right] & -\sin\left[\mu_2\left(t - \frac{T_S}{2}\right)\right]\frac{\mu_2}{\alpha_2} \\ \sin\left[\mu_2\left(t - \frac{T_S}{2}\right)\right]\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{-1} & \cos\left[\mu_2\left(t - \frac{T_S}{2}\right)\right] \end{pmatrix}.$$

Вектор-решение на полупериоде  $\left[\frac{T_S}{2}, 2\frac{T_S}{2}\right]$  можно представить так:

$$y(t) = X_2\left(t - \frac{T_S}{2}\right)y\left(\frac{T_S}{2}\right).$$

В конечной точке  $t = T_S$  получаем  $y(T_S) = X_2\left(\frac{T_S}{2}\right)y\left(\frac{T_S}{2}\right)$ .

Таким образом,

$$y(t) = \begin{cases} X_1(t)y(0), & 0 \leq t \leq \frac{T_S}{2} \\ X_2\left(t - \frac{T_S}{2}\right)y\left(\frac{T_S}{2}\right), & \frac{T_S}{2} \leq t \leq 2\frac{T_S}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

Формула (17) является основной в последующем.

**Расчет динамической частотной характеристики.** Обозначим частоту биений через  $\Omega_{beat}$ . Применяемые обычно алгоритмы обработки фактически предполагают, что под частотой биений следует понимать величину

$\Omega_{beat} = \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} \Psi(t) dt$ . Реально эту зависимость часто заменяют более простой:

$\Omega_{beat} = \frac{\Psi(T_s) - \Psi(0)}{T_s}$ . Мгновенная частота сигнала биений (подчеркнем, что это не частота биений) есть производная фазы сигнала биений, т. е. определяется при нашем подходе выражением (8)

$$\frac{d\Psi}{dt} = 2 \frac{(Hy, y)}{(y, y)}. \quad (18)$$

По приведенному определению частота биений пропорциональна приращению фазы, т. е. в силу (18) имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{beat} &= \frac{\Psi(T_s) - \Psi(0)}{T_s} = \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} \frac{(H(t)y(t), y(t))}{(y(t), y(t))} dt = \\ &= \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} \frac{(H(t)X(t)y(0), X(t)y(0))}{(X(t)y(0), X(t)y(0))} dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть  $\Psi(0) = -\pi$ . Отсюда можно установить естественную связь между начальным вектором  $y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(0) \\ \sin \theta(0) \end{pmatrix}$ , т. е. начальным значением угла поворота, и начальной фазой  $\chi$ . Она следует из равенства (11)  $2\theta(0) = \Psi(0) + \chi + \pi$ :  $\theta(0) = \frac{\chi}{2} = \delta$ . Следовательно, вычислять интеграл необходимо при условии

$$y(0) = \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\chi}{2} \\ \sin \frac{\chi}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, частота биений оказывается зависящей от коэффициентов обратного рассеяния не только через  $\Omega_L$ , но и через  $\chi$ .

При преобразовании интеграла (19) будем учитывать представление (17) входящего в него вектора-решения вспомогательного дифференциального уравнения (3). В результате приведем интеграл (19) к виду

$$\int_0^{T_s} \frac{(H(t)X(t)y(0), X(t)y(0))}{(X(t)y(0), X(t)y(0))} dt = \int_0^{T_s/2} \left[ \frac{(H_1 X_1(\zeta) y(0), X_1(\zeta) y(0))}{(X_1(\zeta) y(0), X_1(\zeta) y(0))} + \frac{(H_2 X_2(\zeta) y\left(\frac{T_s}{2}\right), X_2(\zeta) y\left(\frac{T_s}{2}\right))}{(X_2(\zeta) y\left(\frac{T_s}{2}\right), X_2(\zeta) y\left(\frac{T_s}{2}\right))} \right] d\zeta$$

или (в другом представлении) к виду

$$\int_0^{T_S} \frac{(HX(t)y(0), X(t)y(0))}{(X(t)y(0), X(t)y(0))} dt = \sum_{q=1}^2 \int_0^{T_S/2} \frac{(H_q X_q(\zeta) y(T_q), X_q(\zeta) y(T_q))}{(X_q(\zeta) y(T_q), X_q(\zeta) y(T_q))} d\zeta, \quad (20)$$

где  $T_q = (q-1) \frac{T_S}{2}$ .

Таким образом, исходный интеграл распался на два частных интеграла (по числу полупериодов протяженностью  $\frac{T_S}{2}$  на периоде  $T_S$ ). Каждый из этих частных интегралов может быть вычислен аналитически.

Покажем результат вычисления для первого полупериода. После несложных преобразований (см. (15)) получим:

$$\begin{aligned} (X_q(\zeta) y(T_q), X_q(\zeta) y(T_q)) &= \left[ \cos(\mu_q \zeta) y_1(T_q) - \frac{\mu_q}{\alpha_q} \sin(\mu_q \zeta) y_2(T_q) \right]^2 + \\ &+ \left[ \left( \frac{\mu_q}{\alpha_q} \right)^{-1} \sin(\mu_q \zeta) y_1(T_q) + \cos(\mu_q \zeta) y_2(T_q) \right]^2 = \\ &= A0_q + AC_q \cos(2\mu_q \zeta) + AS_q \sin(2\mu_q \zeta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A0_q &= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \left( \frac{\mu_q}{\alpha_q} \right)^{-2} \right) y_1(T_q)^2 + \left( 1 + \left( \frac{\mu_q}{\alpha_q} \right)^2 \right) y_2(T_q)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha_q}{\gamma_q} \right) y_1(T_q)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma_q}{\alpha_q} \right) y_2(T_q)^2; \\ AC_q &= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \left( \frac{\mu_q}{\alpha_q} \right)^{-2} \right) y_1(T_q)^2 + \left( 1 - \left( \frac{\mu_q}{\alpha_q} \right)^2 \right) y_2(T_q)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha_q}{\gamma_q} \right) y_1(T_q)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\gamma_q}{\alpha_q} \right) y_2(T_q)^2; \\ AS_q &= y_1(T_q) y_2(T_q) \left[ \left( \frac{\mu_q}{\alpha_q} \right)^{-1} - \frac{\mu_q}{\alpha_q} \right] = y_1(T_q) y_2(T_q) \frac{\alpha_q - \gamma_q}{\mu_q}; \\ (H_q X_q(\zeta) y(T_q), X_q(\zeta) y(T_q)) &= \gamma_q y_2(T_q)^2 + \alpha_q y_1(T_q)^2 = B0_q. \end{aligned}$$

В этих обозначениях интеграл (20) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^2 \int_0^{T_S/2} \frac{(H_q X_q(\zeta) y(T_q), X_q(\zeta) y(T_q))}{(X_q(\zeta) y(T_q), X_q(\zeta) y(T_q))} dt = \\ &= \sum_{q=1}^2 \left\{ \frac{\sigma_{1q}}{\Sigma_{0q}} \left[ \arctg \left[ \frac{\Sigma_{2q}}{\Sigma_{0q}} \operatorname{tg} \left( \mu_q \frac{T_S}{2} \right) + \frac{\Sigma_{1q}}{\Sigma_{0q}} \right] - \arctg \left( \frac{\Sigma_{1q}}{\Sigma_{0q}} \right) \right] \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

где

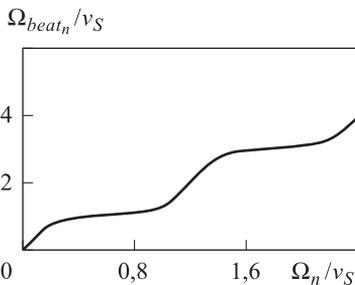
$$\begin{aligned}\Sigma_{0q} &= \sqrt{A0_q^2 - AC_q^2 - AS_q^2} = \sqrt{\frac{\alpha_q}{\gamma_q} y_1(T_q)^4 + \frac{\gamma_q}{\alpha_q} y_2(T_q)^4 + 2y_1(T_q)^2 y_2(T_q)^2}; \\ \sigma_{1q} &= \frac{B0_q}{\mu_q} = \frac{\gamma_q}{\mu_q} y_2(T_q)^2 + \frac{\alpha_q}{\mu_q} y_1(T_q)^2; \\ \Sigma_{2q} &= \frac{\alpha_q}{\gamma_q} y_1(T_q)^2 + \frac{\gamma_q}{\alpha_q} y_2(T_q)^2; \\ \Sigma_{1q} &= AS_q = -\frac{\gamma_q - \alpha_q}{\mu_q} y_1(T_q) y_2(T_q).\end{aligned}$$

Формула (21) определяет приращение фазы сигнала биений на периоде подставки, т. е. частоту биений. Особенность вычисления в том, что предварительно надо найти начальные условия  $y(T_q)$  для каждого полупериода. Соответствующие вычисления запишем в виде:

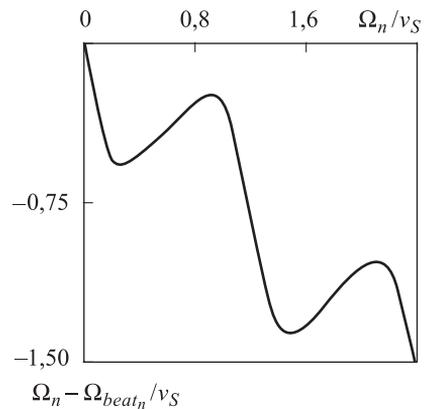
$$y(T_1) = y(0), \quad y(T_2) = y\left(\frac{T_S}{2}\right) = X_1\left(\frac{T_S}{2}\right)y(0).$$

Таким образом, на ПК не возлагается задача непосредственного интегрирования, требующая больших затрат времени. Предлагаемый метод позволяет организовать вычисления в виде цикла, что упрощает запись программы вычислений. Общее время расчета одного варианта даже в среде Mathcad 15 не превышает 10 с.

С помощью предложенного в метода была построена ЧХ (рис. 1) и выявлено ее отличие от идеальной ЧХ (рис. 2) при  $\Omega_S = 2\pi \cdot 1 \cdot 10^3$ ,  $\nu_S = 2\pi \cdot 4$ ,  $\Omega_L = 2\pi \cdot 800$ . На рисунках введено обозначение:  $\Omega_{beat_n}$  — массив, соответствующий функции  $\Omega_{beat}(\Omega)$  при дискретных значениях аргумента  $\Omega_n$ . Эти графики, продолженные в левую полуплоскость, симметричны относительно центра.



**Рис. 1.** Рассчитанная частотная характеристика



**Рис. 2.** Отличие рассчитанной частотной характеристики от идеальной

**Заключение.** Предложен и реализован с использованием ПК метод расчета динамической ЧХ в ЛГ с меандрподставкой. В теории кольцевых лазеров предложенные подходы ранее не использовались и аналогов не имеют. Физическое содержание действия подставки выявляется в самой структуре предложенного метода. Метод допускает различные обобщения. Его можно использовать в задачах, описанных, например, в [7–12]. Это позволяет при необходимости учесть различные особенности реальной подставки (отклонения от меандра, запаздывания и т. д.). Неизбежные упрощения при построении ЧХ были минимальными.

Доказана принципиальная возможность моделирования динамической ЧХ даже в такой простой вычислительной среде как MathCad 15. В то же время выявлены некоторые важные недостатки (применительно к решению поставленной задачи) данного пакета, например, отсутствие встроенной обратной функции  $\text{Arctg}$  (есть только ее главное значение  $\text{arctg}$ ), что в данном конкретном случае приводит к дополнительным неточностям вычисления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтович Ю.Л., Курятов В.Н., Ланда П.С. О синхронизации волн в газовом лазере с кольцевым резонатором // ЖЭТФ. 1967. Т. 51. Вып. 1. С. 3–12.
2. Азарова В.В., Голяев Ю.Д., Савельев И.И. Зеemanовские лазерные гироскопы // Квант. электрон. 2015. Т. 45. № 2. С. 171–179.
3. Судаков В.Ф. К теории кольцевого генератора с изменяющейся разностью частот резонатора // ЖПС. 1975. Т. 23, В. 5. С. 811–819.
4. Бирман А.Я., Наумов П.Б., Савушкин А.Ф., Тропкин Е.Н. Анализ динамической частотной характеристики кольцевого лазера на основе теории Флоке // Квант. электрон. 1986. Т. 13. № 8. С. 1638–1644.
5. Хромых А.М. Динамическая характеристика кольцевых лазеров с периодической частотной подставкой // Электронная техника. Сер. 11. Лазерная техника и оптоэлектроника. 1990. Вып. 2 (54). С. 44.
6. Филатов Ю.В. Оптические гироскопы. М.: Изд-во ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2005. 139 с.
7. Schreiber K.U., Gebauer A., Wells J.-P.R. Closed-loop locking of an optical frequency comb to a large ring laser // Optics Letters. 2013. 38 (18). P. 3574–3577.
8. Shahriar S.M., Yablon J., Tseng S., Salit M. An inhomogeneously broadened superluminal ring laser for rotation sensing and accelerometry // Frontiers in Optics. 2011. Paper FWZ6.
9. Long Xingwu, Yuan Jie. Method for eliminating mismatching error in monolithic triaxial ring resonators // Chinese Optics Letters. 2010. 8 (12). P. 1135–1138.
10. Fan Zhenfang, Luo Hui, Lu Guangfeng, Hu Shaomin. Dynamic lock-in compensation for mechanically dithered ring laser gyros // Chinese Optics Letters. 2012. 10 (6). P. 061403.
11. Reanalysis of generalized sensitivity factors for optical-axis perturbation in nonplanar ring resonators / Yuan Jie, Chen Meixiong, Li Yingying, Tan Zhongqi, Wang Zhiguo // Optics Express. 2013. 21 (2). P. 2297–2306.
12. Wen Dandan, Li Dong, Zhao Jianlin. Generalized sensitivity factors for optical-axis perturbation in nonplanar ring resonators // Optics Express. 2011. 19 (20). P. 19752–19757.

**Судаков Владимир Федорович** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Электротехника и промышленная электроника» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Судаков В.Ф. Метод построения динамической частотной характеристики лазерного гиromетра со знакопеременной частотной подставкой типа меандр // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 4. С. 129–141.

DOI: 10.18698/0236-3933-2016-4-129-141

**METHOD FOR CONSTRUCTING THE DYNAMIC FREQUENCY CHARACTERISTICS OF LASER GYROMETER WITH ALTERNATING FREQUENCY MEANDER STAND**

**V.F. Sudakov**

mr.vvffss@inbox.ru

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

**Abstract**

Complex (combined) stands with alternating frequency are used in laser gyrometers (LH) to approximate the shape of their frequency characteristics (CH) to an ideal straight line. The known analytical methods for calculating of CH cannot be applied in these cases. It takes unacceptably long to use personal computers (PC). This article offers a method to calculate the dynamic frequency characteristics (VX) for alternating frequency stands. In particular, the increment of the beat signal phase during the period of the stand can be regarded as the rotation angle from the phase plane for the same time. Vector is the solution of an auxiliary linear vector differential equation. Thus, instead of solving nonlinear phase equation the article offers to solve a linear Hamiltonian system of differential equations of the second order. As a result, the most time-consuming part of the calculation is formulated in analytical form. The calculations of the recurrent type take little time and are executed in Mathcad 15. Meander type of stand has been studied repeatedly and its characteristics are well known. Therefore, it is a good option for a test of the proposed method. This article applies the method for the calculation of the dynamic frequency characteristics (VX) for alternating frequency meander stand

**Keywords**

*Laser gyrometer, the phase equation, stand frequency, frequency response, stand type meander*

**REFERENCES**

- [1] Klimontovich Yu.L., Kuryatov V.N., Landa P.S. Wave synchronization in a gas laser with a ring resonator. *J. Exp. Theor. Phys.*, 1967, vol. 24, no. 1, pp. 1–7.
- [2] Azarova V.V., Golyaev Yu.D., Savel'ev I.I. Zeeman laser gyroscopes. *Quantum Electronics*, 2015, vol. 45, no. 2, pp. 171–179.

- [3] Sudakov V.F. Theory of a ring laser with varying difference of resonator frequencies. *Journal of Applied Spectroscopy (JAS)*, 1975, vol. 23, iss. 5, pp. 1454–1460.  
DOI: 10.1007/BF00615854
- [4] Birman A.Ya., Naumov P.B., Savushkin A.F., Tropkin E.N. Analysis of the dynamic frequency characteristic of a ring laser based on the Floquet theory. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, 1986, vol. 13, no. 8, pp. 1069–1073.
- [5] Khromykh A.M. The dynamic characteristics of ring lasers with a periodic frequency support. *Elektron. Tekh. Ser. 11. Lazernaya Tekh. Optoelektron.* [Electron. Eng. Laser Technol. Optoelectron.], 1990, vol. 53, no. 1, p. 44 (in Russ.).
- [6] Filatov Yu.V. *Opticheskie giroscopy [Optical gyroscopes]*. Moscow, TsNII Elektropribor Publ., 2005. 139 p.
- [7] Schreiber K.U., Gebauer A., Wells J.-P.R. Closed-loop locking of an optical frequency comb to a large ring laser. *Optics Letters*, 2013, 38 (18), pp. 3574–3577.
- [8] Shahriar S.M., Yablon J., Tseng S., Salit M. An inhomogeneously broadened superluminal ring laser for rotation sensing and accelerometry. *Frontiers in Optics*, 2011, Paper FWZ6.
- [9] Long Xingwu, Yuan Jie. Method for eliminating mismatching error in monolithic triaxial ring resonators. *Chinese Optics Letters*, 2010, 8 (12), pp. 1135–1138.
- [10] Fan Zhenfang, Luo Hui, Lu Guangfeng, Hu Shaomin. Dynamic lock-in compensation for mechanically dithered ring laser gyros. *Chinese Optics Letters*, 2012, 10 (6), p. 061403.
- [11] Jie Yuan, Meixiong Chen, Yingying Li, Zhongqi Tan, Zhiguo Wang. Reanalysis of generalized sensitivity factors for optical-axis perturbation in nonplanar ring resonators. *Optics Express*, 2013, 21 (2), pp. 2297–2306.
- [12] Wen Dandan, Li Dong, Zhao Jianlin. Generalized sensitivity factors for optical-axis perturbation in nonplanar ring resonators. *Optics Express*, 2011, 19 (20), pp. 19752–19757.

**Sudakov V.F.** — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Electrical Engineering and Industrial Electronics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Sudakov V.F. Method for Constructing the Dynamic Frequency Characteristics of Laser Gyrometer with Alternating Frequency Meander Stand. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 4, pp. 129–141. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-4-129-141