

## УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ СПЕКТРОМ БОЛЬШИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н.Е. Зубов<sup>1,2</sup>

nezubov@bmstu.ru;  
Nikolay.Zubov@rsce.ru

Е.А. Микрин<sup>1,2</sup>

В.Н. Рябченко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королёва, г. Королёв, Московская обл., Российская Федерация

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

### Ключевые слова

Для наиболее сложной задачи управления многомерной динамической системы с представлением в пространстве состояний, когда размерность вектора выхода системы меньше размерности вектора состояния, разработан эффективный метод управления по выходу ее спектром. В традиционной постановке в этом случае сначала решается задача оценки недостающих компонент в векторе выхода (синтез динамического наблюдателя состояния), а затем — синтез стабилизирующего управления (синтез статической обратной связи). Это приводит к существенному росту размерности состояния замкнутой системы. Разработанный метод позволяет осуществлять синтез управления без решения задачи оценки вектора состояния. Метод основан на применении специальной декомпозиции динамической системы, одинаков для непрерывного и дискретного случаев описания модели системы, не имеет ограничений по алгебраической и геометрической кратностям задаваемых элементов спектра, а также позволяет строить решение в аналитическом виде и осуществлять параметризацию множества решений

*Декомпозиция, модальный синтез, вектор выхода, спектр, управление по выходу, большая динамическая система*

Поступила в редакцию 05.11.2015

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

*Исследование выполнено за счет гранта  
Российского научного фонда (проект №14-11-00046)*

Задача управления спектром динамической системы по выходу относится к разряду классических систем, однако, пока не имеет исчерпывающего решения [1–5]. Данная задача актуальна, когда при управлении не используют динамические расширения в виде различных наблюдателей состояния, а применяют обратные связи по выходным сигналам. Это же следует отнести и к системам с большой размерностью пространства состояний  $n$  (тысячи и десятки тысяч). Сегодня такие системы имеют место в различных областях техники.

Рассмотрим полностью управляемую и наблюдаемую линейную динамическую систему

$$\sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния;  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  — вектор входа;  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  — вектор выхода;  $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел;  $n \gg 1, m \cdot r \geq n$ ;  $\sigma$  — символ, обозначающий при  $\sigma \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$  — непрерывную, а при  $\sigma \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$  — дискретную систему. Предполагается, что матрицы  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  имеют полные ранги, а спектр (множество собственных значений) матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  равен

$$\text{eig}(\mathbf{A}) = \{ \lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda_i \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0, i = 1, \dots, n \},$$

где  $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел (комплексная плоскость);  $\mathbf{I}_n$  — единичная матрица размера  $n \times n$ .

Пусть  $\Lambda$  — заданный спектр. Требуется для системы (1) найти закон управления с обратной связью  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{x}(t)$ , где  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  — матрица регулятора по выходу, чтобы спектр матрицы  $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C}$  удовлетворял равенству  $\text{eig}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{C}) = \Lambda$ .

Для определенности положим  $m \geq r$  и введем в рассмотрение многоуровневую декомпозицию системы (1) следующего вида [5]:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{C} \quad (2)$$

— нулевой уровень декомпозиции;

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp T}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp T} \quad (3)$$

— первый уровень декомпозиции;

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{B}_{k-1}^\perp \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{B}_{k-1}^{\perp T}, \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{B}_{k-1}^\perp \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{B}_{k-1}, \quad \mathbf{C}_k = \mathbf{C}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{B}_{k-1}^{\perp T} \quad (4)$$

—  $k$ -й уровень декомпозиции;

$$\mathbf{A}_M = \mathbf{B}_{M-1}^\perp \mathbf{A}_{M-1} \mathbf{B}_{M-1}^{\perp T}, \quad \mathbf{B}_M = \mathbf{B}_{M-1}^\perp \mathbf{A}_{M-1} \mathbf{B}_{M-1}, \quad \mathbf{C}_M = \mathbf{C}_{M-1} \mathbf{A}_{M-1} \mathbf{B}_{M-1}^{\perp T} \quad (5)$$

—  $M$ -й уровень декомпозиции (здесь  $M = \text{ceil}(n/r)$ , где  $\text{ceil}(\ast)$  — операция округления числа « $\ast$ » в сторону большего значения).

В формулах (2)–(5) для  $k = 0, M$  фигурируют матрицы:

$$\left( \mathbf{B}_k \begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{B}_k^{\perp T} \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{B}_k^+ \\ \hline \mathbf{B}_k^\perp \end{array} \right), \quad \mathbf{B}_k^\perp \mathbf{B}_k = 0, \quad \mathbf{B}_k^+ \mathbf{B}_k = \mathbf{I}_r;$$

$$\left( \begin{array}{c} \mathbf{C}_k \\ \hline \mathbf{C}_k^\perp \end{array} \right)^{-1} = \left( \mathbf{C}_k^+ \begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{C}_k^{\perp T} \end{array} \right), \quad \mathbf{C}_k^\perp \mathbf{C}_k^T = 0, \quad \mathbf{C}_k \mathbf{C}_k^+ = \mathbf{I}_m,$$

где верхним индексом « $\perp$ » обозначены полуортогональные аннуляторы (делители нуля), а верхним индексом « $+$ » — псевдообратные матрицы Мура — Пенроуза [6].

Введем в рассмотрение форму регуляторов для управления спектром на соответствующих уровнях декомпозиции (в обратном порядке):

$$F_M = (\Phi_M B_M^+ - B_M^+ A_M) C_M^+ \quad (6)$$

—  $M$ -й уровень декомпозиции;

$$F_k = (\Phi_k B_k^- - B_k^- A_k) C_k^+, \quad B_k^- = B_k^+ - F_{k-1} B_k^\perp \quad (7)$$

—  $k$ -й уровень декомпозиции;

$$F_1 = (\Phi_1 B_1^- - B_1^- A_1) C_1^+, \quad B_1^- = B_1^+ - F_2 B_1^\perp \quad (8)$$

— первый уровень декомпозиции;

$$F_0 = (\Phi_0 B_0^- - B_0^- A_0) C_0^+, \quad B_0^- = B_0^+ - F_1 B_0^\perp \quad (9)$$

— нулевой уровень декомпозиции.

Справедливо утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $t \geq r$ , следующие матрицы существуют и попарно полностью управляемы:

$$G_M^T = B_M^+ A_M C_M^\perp (B_M^+ C_M^\perp)^+, \quad H_M^T = (B_M^+ C_M^\perp)^\perp,$$

$$G_k^T = B_k^- A_k C_k^\perp (B_k^- C_k^\perp)^+, \quad H_k^T = (B_k^- C_k^\perp)^\perp,$$

$$G_1^T = B_1^- A_1 C_1^\perp (B_1^- C_1^\perp)^+, \quad H_1^T = (B_1^- C_1^\perp)^\perp,$$

$$G_0^T = B_0^- A_0 C_0^\perp (B_0^- C_0^\perp)^+, \quad H_0^T = (B_0^- C_0^\perp)^\perp,$$

тогда существует непустое множество матриц  $K_i$ ,  $i = \overline{0, M}$  таких, что

$$\Phi_i = G_i + K_i^T H_i = (B_i^- A_i C_i^\perp) (B_i^- C_i^\perp)^+ + K_i^T (B_i^- C_i^\perp)^\perp$$

и для (6)–(9) выполняются равенства

$$\text{eig}(A_M + B_M F_M C_M) = \text{eig}(\Phi_M),$$

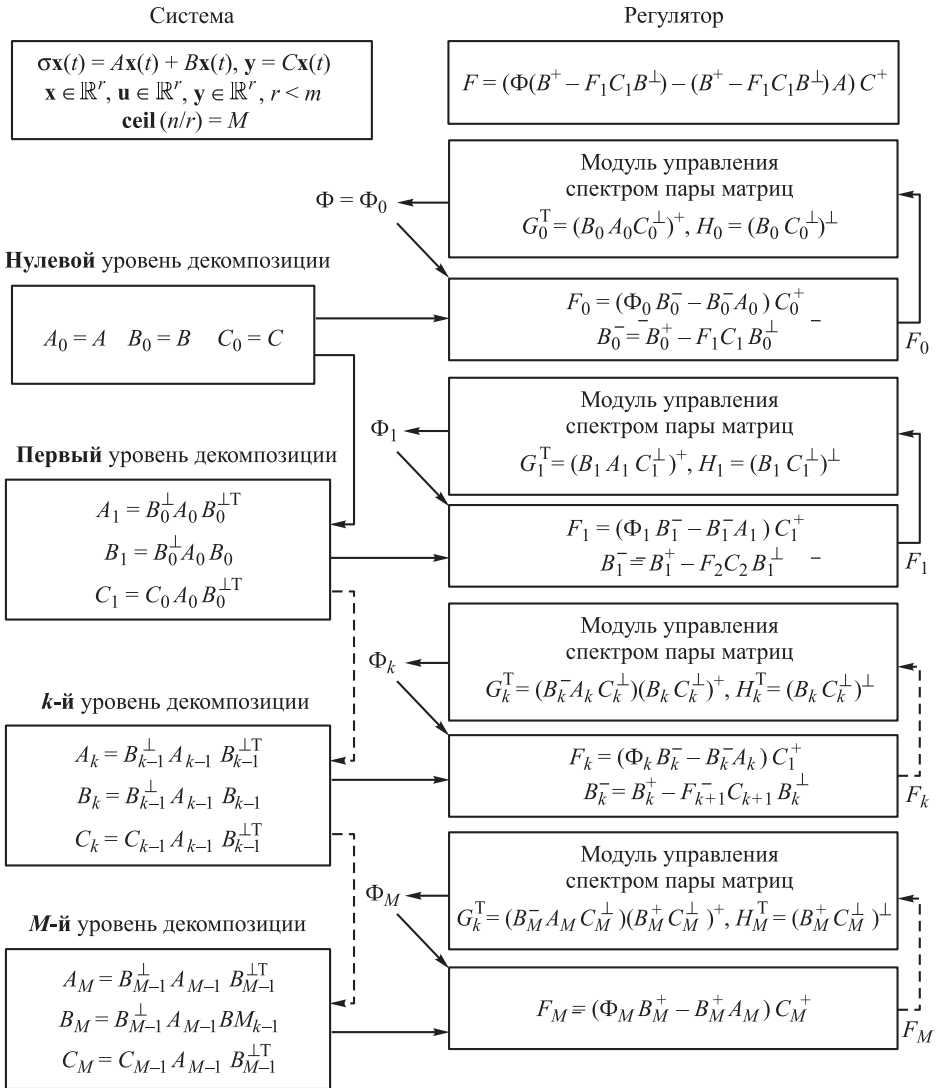
$$\text{eig}(A_k + B_k F_k C_k) = \bigcup_{i=k-1}^M \text{eig}(\Phi_i),$$

$$\text{eig}(A_1 + B_1 F_1 C_1) = \bigcup_{i=1}^M \text{eig}(\Phi_i),$$

$$\text{eig}(A_0 + B_0 F_0 C_0) = \text{eig}(A + BFC) = \bigcup_{i=1}^{M+1} \text{eig}(\Phi_i),$$

$$\text{где } \bigcup_{i=1}^{M+1} \text{eig}(\Phi_i) = \Lambda.$$

Блок-схема, поясняющая алгоритм формирования матриц (6)–(9), приведена на рис. 1.



$$\Phi_i = G_i + K_i^\top H_i; \Phi_i = (B_i^- A_i C_i^\perp) (B_i^- C_i^\perp)^\perp + K_i^\top (B_i^- C_i^\perp)^\perp$$

Рис. 1. Блок-схема алгоритма формирования управления

Для случая  $m \leq r$  теорема 1 имеет дуальную формулировку.

**Теорема 2.** Пусть  $m \leq r$ ,  $N = \text{ceil}(n/m)$ , выполнена декомпозиция системы (1) вида

$$A_0 = A, \quad B_0 = B, \quad C_0 = C,$$

$$A_1 = C_0^\perp A_0 C_0^{\perp T}, \quad B_1 = C_0^\perp A_0 C_0, \quad C_1 = C_0 A_0 C_0^{\perp T},$$

$$A_k = C_{k-1}^\perp A_{k-1} C_{k-1}^{\perp T}, \quad B_k = C_{k-1}^\perp A_{k-1} C_{k-1}, \quad C_k = C_{k-1} A_{k-1} C_{k-1}^{\perp T},$$

$$A_N = C_{N-1}^\perp A_{N-1} C_{N-1}^{\perp T}, \quad B_N = C_{N-1}^\perp A_{N-1} C_{N-1}, \quad C_N = C_{N-1} A_{N-1} C_{N-1}^{\perp T},$$

следующие матрицы существуют и попарно полностью наблюдаемы:

$$\begin{aligned} G_N &= (B_N^\perp C_N^+)^+ B_N^\perp A_N C_N^+, \quad H_N = (B_N^\perp C_N^+)^{\perp}, \\ G_k &= (B_k^\perp C_k^+)^+ B_k^\perp A_k C_k^+, \quad H_k = (B_k^\perp C_k^+)^{\perp}, \\ G_1 &= (B_1^\perp C_1^+)^+ B_1^\perp A_1 C_1^+, \quad H_1 = (B_1^\perp C_1^+)^{\perp}, \\ G_0 &= (B_0^\perp C_0^+)^+ B_0^\perp A_0 C_0^+, \quad H_0 = (B_0^\perp C_0^+)^{\perp}, \end{aligned}$$

тогда существует непустое множество матриц  $L_i$ ,  $i = \overline{0, N}$  таких, что

$$\Psi_i = G_i + H_i L_i^T = (B_i^\perp C_i^+)^+ B_i^\perp A_i C_i^+ + (B_i^\perp C_i^+)^{\perp} L_i^T$$

и при

$$\begin{aligned} F_N &= B_M^+ (C_M^+ \Psi_M - A_M C_M^+), \\ F_k &= B_k^+ (C_k^- \Psi_k - A_k C_k^-), \quad C_k^- = C_k^+ - C_k^{\perp T} F_{k-1}, \\ F_1 &= B_1^+ (C_1^- \Psi_1 - A_1 C_1^-), \quad C_1^- = C_1^+ - C_1^{\perp T} F_2, \\ F_0 &= B_0^+ (C_0^- \Psi_0 - A_0 C_0^-), \quad C_0^- = C_0^+ - C_0^{\perp T} F_1 \end{aligned}$$

выполняются равенства

$$\begin{aligned} \text{eig}(A_N + B_N F_N C_N) &= \text{eig}(\Psi_N), \\ \text{eig}(A_k + B_k F_k C_k) &= \bigcup_{i=k-1}^M \text{eig}(\Psi_i), \\ \text{eig}(A_1 + B_1 F_1 C_1) &= \bigcup_{i=1}^M \text{eig}(\Psi_i), \\ \text{eig}(A_0 + B_0 F_0 C_0) &= \text{eig}(A + BFC) = \bigcup_{i=1}^{N+1} \text{eig}(\Psi_i), \end{aligned}$$

$$\text{где } \bigcup_{i=1}^{N+1} \text{eig}(\Psi_i) = \Lambda.$$

Как и в [5], в предложенном решении используются при преобразованиях только полуортогональные и псевдообратные матрицы, что, по крайней мере, не ухудшает обусловленность уравнений. Подход не содержит ограничений в виде различия алгебраической и геометрической кратности элементов назначаемого спектра, а также ограничений на размерность решаемой задач. Это подтверждается математическим моделированием, которое показало высокую относительную точность управления спектром и практическое отсутствие ограничений на размерность системы (1). В качестве примера на рис. 2 приведен исходный спектр большой системы (1) с матрицами

$$A = \text{randn}(n), \quad B = \text{randn}(n, r), \quad C = \text{randn}(m, n),$$

где  $n = 1800$ ,  $r = n/2$ ,  $m = r + r/2$ ,  $\text{randn}(v, w)$  — матрица размера  $v \times w$ , элементы которой распределены по псевдослучайному закону с нулевым средним, а на рис. 3 — ошибки формирования заданного спектра, все 1800 элементов которого в данном случае равны минус единице, т. е. кратность элементов спектра  $\Lambda = \{-1, -1, \dots, -1\}$  равна размерности пространства состояний.

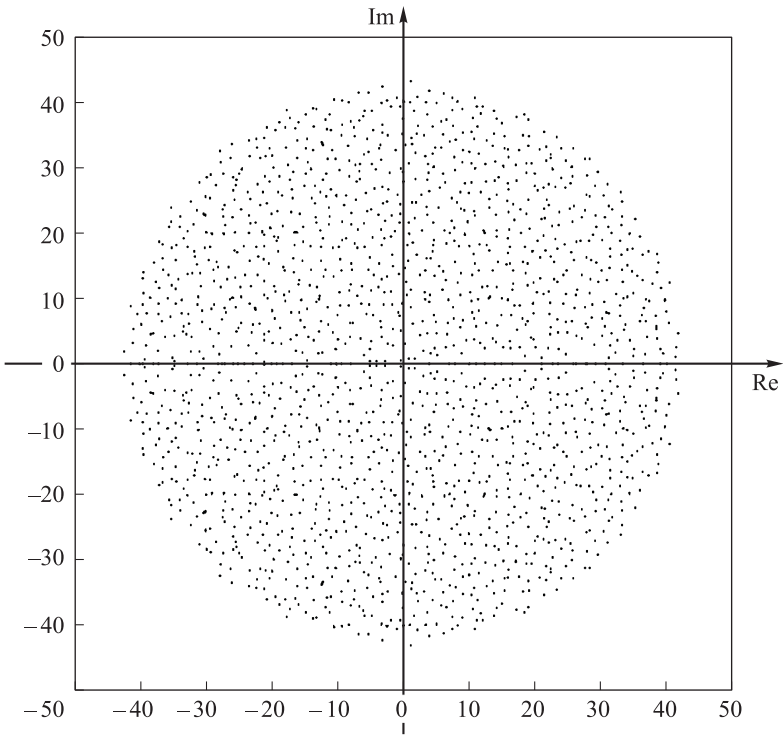


Рис. 2. Спектр исходной системы

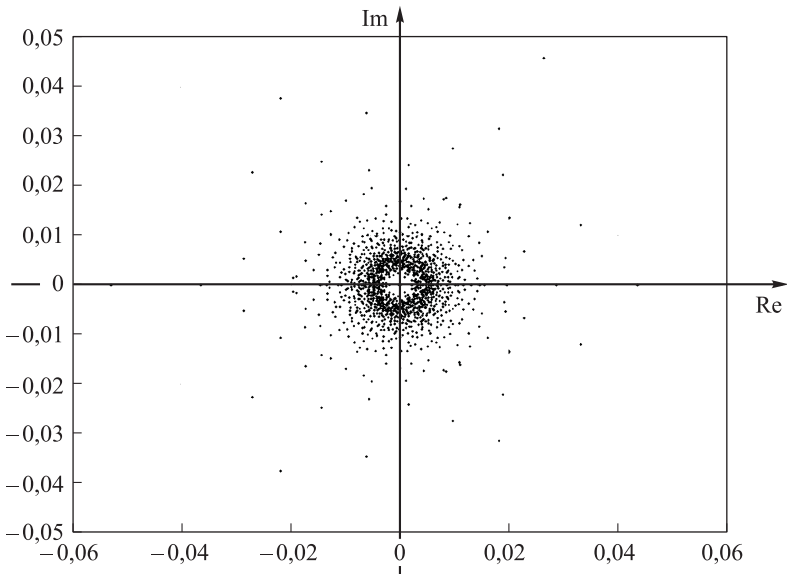


Рис. 3. Ошибки задания спектра замкнутой системы

Отметим также, что предложенный подход позволяет получать аналитическое решение [3, 7, 8] (в том числе параметризацию множества решений) задачи управления по выходу спектром системы (1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дорф Р., Бишон Р. Современные системы управления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 832 с.
2. Леонов Г.А., Шумафов М.М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбУ, 2005. 420 с.
3. Управление по выходу спектром движения космического аппарата / Н.Е. Зубов, Е.А. Зыбин, Е.А. Микрин, М.Ш. Мисриханов, А.В. Пролетарский, В.Н. Рябченко // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 4. С. 111–122. DOI: 10.7868/S0002338814040179
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
5. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Размещение полюсов в больших динамических системах с многими входами и выходами // ДАН. 2011. Т. 439. № 4. С. 464–466.
6. Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Princeton Univ. Press. Second Edition. 2009.
7. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Стабилизация взаимосвязанных движений летательного аппарата в каналах тангаж–рысканье при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитический синтез // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 95–105. DOI: 10.7868/S0002338815010151
8. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Управление по выходу продольным движением летательного аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 164–178. DOI: 10.7868/S0002338815040149

**Зубов Николай Евгеньевич** — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра РКК «Энергия» им. С.П. Королёва (Российская Федерация, Московская обл., 141070, г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а), профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Микрин Евгений Анатольевич** — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора РКК «Энергия» им. С.П. Королёва (Российская Федерация, Московская обл., 141070, г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а), заведующий кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Рябченко Владимир Николаевич** — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра РКК «Энергия» им. С.П. Королёва (Российская Федерация, Московская обл., 141070, г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а), профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Управление по выходу спектром больших динамических систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 4. С. 65–73. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-4-65-73

**OUTPUT CONTROL OF LARGE DYNAMIC SYSTEM SPECTRUM**N.E. Zubov<sup>1,2</sup>

nezubov@bmstu.ru

Nikolay.Zubov@rsce.ru

E.A. Mikrin<sup>1,2</sup>V.N. Ryabchenko<sup>1,2</sup><sup>1</sup> S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Korolev, Moscow Region, Russian Federation<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**Abstract**

For the most difficult task of controlling a multivariable dynamic system with representation in state space, where the dimension of the system output vector is less than the dimension of the state vector, there is an effective method of output control. In the conventional formulation, in this case the problem is solved first by estimating the missing component vector output (synthesis of dynamic observer), and then by the synthesis of stabilizing control (synthesis of static feedback). This leads to a substantial increase in the dimension of the closed system. The developed method allows the synthesis of control without solving the problem of estimation of the state vector. The method is based on the use of a special decomposition of a dynamical system, is the same for continuous and discrete cases of the description of the model system, and has no restrictions on algebraic and geometric multiplicity of defined elements of the spectrum. It allows us to build an analytical solution and to carry out the parameterization of the solution set

**Keywords**

*Decomposition, modal synthesis, MIMO-system, output vector, spectrum, output control, large dynamic system*

**REFERENCES**

- [1] Dorf R.S., Bishop R.H. Modern control systems. 12th ed. Prentice Hall, 2011. 1034 p.
- [2] Leonov G.A., Shumafov M.M. Metody stabilizatsii lineinykh upravliaemykh system [Methods of stabilization of controllable linear systems]. St. Petersburg, Uni. St. Petersburg Publ., 2005. 224 p.
- [3] Zubov N.E., Zybin E.A., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Proletarskiy A.V., Ryabchenko V.N. Output control of a spacecraft motion spectrum. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 4, pp. 576–586. DOI: 10.1134/S1064230714040170
- [4] Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Robastnaya ustoychivost' i upravlenie [Robust stability and control]. Moscow, Nauka Publ., 2002. 303 p.
- [5] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Pole placement in large dynamical systems with many inputs and outputs. *Dokl. Math.*, vol. 84, no. 1, pp. 591–593.
- [6] Bernstein D.S. Matrix mathematics. Princeton Univ. Press. Second Edition. 2009.
- [7] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Stabilization of coupled motions of an aircraft in the pitch–yaw channels in the absence of information about the sliding angle: analytical synthesis. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2015. vol. 54, no. 1, pp. 93–103. DOI: 10.1134/S1064230715010153



[8] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Output control of the longitudinal motion of a flying vehicle. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2015, vol. 54, no. 5, pp. 825–837. DOI: 10.1134/S1064230715040140

**Zubov N.E.** — Dr. Sci. (Eng.), Deputy Director for Science, Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation); Professor of Automatic Control Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Mikrin E.A.** — Dr. Sci. (Eng.), Academician of the Russian Academy of Sciences, First Deputy Chief Designer, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation); Head of Automatic Control Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Ryabchenko V.N.** — Dr. Sci. (Eng.), Leading Researcher of Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation); Professor of Automatic Control Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. Output Control of Large Dynamic System Spectrum. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 4, pp. 65–73.

DOI: 10.18698/0236-3933-2016-4-65-73