

## Частотная характеристика кольцевого лазера со знакопеременной частотной подставкой

**В.Ф. Судаков**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: mr.vvffss@inbox.ru

*Построена частотная характеристика кольцевого лазера со знакопеременной частотной подставкой. Особенность частотной подставки позволяет использовать упрощающее расчеты приближение. Такое приближение делалось и в более ранних работах, посвященных кольцевым лазерам с частотной подставкой простого вида. Однако результаты этих работ не могли быть использованы в настоящей статье, поскольку исследован принципиально другой тип сложной частотной подставки. Соответственно, потребовалось принципиально изменить подход к расчету частотной характеристики: специфическим образом преобразовать уравнение, описывающее динамику фазы сигнала биений, к системе связанных уравнений. Результатом применения этого метода стал алгоритм, по которому приближенно можно вычислить частоту биений в функции измеряемой разности собственных частот резонатора. Компьютерная реализация дала возможность построить статическую частотную характеристику кольцевого лазера с частотной подставкой сложного типа. Для контроля правильности полученных результатов построена частотная характеристика кольцевого лазера с простой частотной подставкой типа мандра, исследованной ранее другими способами.*

**Ключевые слова:** кольцевой лазер, частотная подставка, фазовое уравнение, собственные частоты кольцевого резонатора, фаза сигнала биений, частота биений, частотная характеристика.

## Frequency Response of a Ring Laser with an Alternating Frequency Pedestal

**F.V. Sudakov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: mr.vvffss@inbox.ru

*The purpose of this work was to build the frequency response (FR) of a ring laser with an alternating frequency pedestal (FP). FP characteristic feature allows us to use the approximation that simplifies calculations. We used this approximation method in earlier works devoted to ring lasers with FP of a simple type, however, the results of the previous research could not be used in this paper because this time we examined FP of a completely different type. Consequently, we had to change the approach to*

*the FR calculation: in a specific way we converted the equation describing the phase dynamics of the beat signal, to a system of coupled equations. The result of applying this method allowed us to obtain an algorithm for approximate calculation of the beat frequency in the function of the measured difference of the natural frequencies of the resonator. Computer implementation gave an opportunity to build the static FR ring laser with FP of a complex type. To control the accuracy of the obtained results, we built FR ring laser with simple FP of meander type, previously investigated in other ways.*

**Keywords:** ring laser, frequency pedestal, phase equation, natural frequencies of a ring resonator, beat signal phase, beat frequency, frequency response.

**Введение.** Кольцевой лазер (КЛ) широко используют в различных системах [1, 2], при этом требования к его характеристикам непрерывно возрастают. В частности, большое внимание уделяют возможности сужения зоны нечувствительности при измерении малых разностей собственных частот кольцевого резонатора (КР), т. е. при измерении малых скоростей вращения. Фактически, все предлагаемые для сужения этой зоны методы сводят к использованию частотной подставки (ЧП): к дополнительному расщеплению собственных частот КР, выводящему КЛ из зоны нечувствительности. В некоторых случаях применяют знакопеременную периодическую ЧП [3]. Форма простой ЧП может быть различной: от гармоника до кривой типа меандра. Амплитуда такой ЧП значительно превосходит статическую зону нечувствительности. При теоретическом исследовании это обстоятельство обычно используют для приближенных асимптотических вычислений [4–6].

Асимптотические подходы адаптированы к конкретным видам ЧП. В настоящей работе предложен асимптотический метод расчета частотной характеристики КЛ с ЧП, которая представляет собой суперпозицию двух меандров. Амплитуда одного из меандров много больше других параметров, имеющих размерность частоты. Указанный асимптотический метод имеет значительную специфику, определяемую рассмотренной выше спецификой ЧП.

Метод реализуется с использованием пакета MathCAD, причем время расчета частотной характеристики (ЧХ) предельно мало, что обеспечивается рациональным построением алгоритма метода.

**Уравнения, эквивалентные фазовому уравнению кольцевого лазера.** Динамика одномодового КЛ описывается системой укороченных уравнений для медленно меняющихся интенсивностей и разности фаз встречно распространяющихся волн. При определенных допущениях фазовое уравнение можно полагать независимым. Так, в работах [7] это выполнено путем интегрирования связанной системы укороченных уравнений на аналоговой модели. При использовании сложной ЧП фазовое уравнение представляет собой нелинейное относительно искомой фазы сигнала биений  $\Psi$  дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Omega_D(t) + \Omega + \Omega_L \cos \Psi. \quad (1)$$

Здесь  $\Omega_D(t) = \Omega_R \text{sign}(\sin(v_R t)) + \Omega_S \text{sign}(\sin(v_S t))$  — закон изменения комбинированной ЧП;  $\Omega_L$  — полуширина статической зоны нечувствительности;  $\Omega$  — разность собственных частот КР. Величины  $\Omega_R, \Omega_S, v_R, v_S, \Omega_L$  — параметры, определяющие конкретный вид ЧХ, величина  $\Omega$  — независимая переменная. Под ЧХ будем понимать функцию переменной  $\Omega$ :

$$\Omega_{beat}(\Omega) = \frac{\Psi_\Omega - \Psi_0}{T_S}, \quad (2)$$

где  $\Psi_0 = \Psi(0)$  — начальное значение разностной фазы на интервале  $0 \leq t \leq T_S$ ;  $\Psi_\Omega = \Psi(T_S)$  — значение разностной фазы в конце указанного интервала.

Предположим, что  $K_R = T_S/T_R$  — большое целое число,  $T_R = 2\pi/v_R$ ,  $T_S = 2\pi/v_S$ ,  $T_S$  — период ЧП. Кроме того, выполняются неравенства  $\Omega_S/\Omega_R \ll 1$ ,  $\Omega/\Omega_R \ll 1$ ,  $\Omega_L/\Omega_R \ll 1$ . Именно эти соотношения позволяют применять асимптотический подход для расчета ЧХ.

В соответствии с (2) для расчета ЧХ достаточно решить задачу Коши для (1) на интервале  $0 \leq t \leq T_S$ . Непосредственное применение пакета MathCAD для этого неэффективно (такая попытка была сделана), поэтому целесообразнее значительную часть работы сначала выполнить аналитически. В этом и состоит основное содержание настоящей работы.

Отметим, что в пределах периода ЧП  $0 \leq t \leq T_S$  существуют полуинтервалы длительностью  $T_R/2$ , на которых ЧП принимает одно из четырех постоянных значений:  $\Omega_{D_{p,q}} = (-1)^{p-1}\Omega_R + (-1)^{q-1}\Omega_S$ ,  $p, q = 1, 2$ .

На первом полупериоде ЧП ( $k = 1, \dots, K_R/2$ ) выделим нечетные полуинтервалы  $(2k-2)\frac{T_R}{2} \leq t \leq (2k-1)\frac{T_R}{2}$ ,  $\Omega_{D_{1,1}} = \Omega_R + \Omega_S$ , и четные полуинтервалы  $(2k-1)\frac{T_R}{2} \leq t \leq 2k\frac{T_R}{2}$ ,  $\Omega_{D_{2,1}} = -\Omega_R + \Omega_S$ . На втором полупериоде ЧП ( $k = K_R/2 + 1, \dots, K_R$ ) на нечетных полуинтервалах  $(2k-2)\frac{T_R}{2} \leq t \leq (2k-1)\frac{T_R}{2}$  имеем  $\Omega_{D_{1,2}} = \Omega_R - \Omega_S$ , а на четных полуинтервалах  $(2k-1)\frac{T_R}{2} \leq t \leq 2k\frac{T_R}{2}$  —  $\Omega_{D_{2,2}} = -\Omega_R - \Omega_S$ . Следовательно, на всех перечисленных полуинтервалах фазовое уравнение (1) имеет постоянную во времени правую часть и может быть представлено в виде

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_{D_{p,q}} + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}. \quad (3)$$

Уравнение (3) интегрируется при начальном условии  $t(\Psi_0) = 0$ . Однако каждому указанному полуинтервалу на оси времени должно быть сопоставлено начальное значение на оси фаз  $\Psi$ . На первом полуинтервале  $0 \leq t \leq T_R/2$  фазовое уравнение (1) имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение может быть представлено как

$$\frac{T_R}{2} - 0 = \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} \frac{d\Psi}{\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}.$$

Здесь  $\Psi_0$  — произвольно заданная начальная фаза;  $\Psi_1$  — неизвестная фаза.

На втором полуинтервале  $T_R/2 \leq t \leq 2T_R/2$  фазовое уравнение имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{-\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение может быть представлено как

$$2\frac{T_R}{2} - \frac{T_R}{2} = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \frac{d\Psi}{-\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

где  $\Psi_1, \Psi_2$  — неизвестные граничные фазы.

На третьем полуинтервале  $2T_R/2 \leq t \leq 3T_R/2$  фазовое уравнение снова имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение может быть представлено как

$$3\frac{T_R}{2} - 2\frac{T_R}{2} = \int_{\Psi_2}^{\Psi_3} \frac{d\Psi}{\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

где  $\Psi_2, \Psi_3$  — неизвестные граничные фазы.

Приведенные формулы применим при  $k = 1, \dots, K_R/2$  к другим нечетным и четным полуинтервалам общего вида в пределах первого полупериода  $T_S/2$  ЧП (общее число таких полуинтервалов  $K_R = (T_S/2)/(T_R/2)$ ). На нечетных полуинтервалах  $(2k-2)\frac{T_R}{2} \leq t \leq (2k-1)\frac{T_R}{2}$  фазовое уравнение имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение —

$$\frac{T_R}{2} = \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}, \quad (4)$$

где  $\Psi_{2k-1}, \Psi_{2k-2}$  — неизвестные граничные фазы. Задана только начальная фаза  $\Psi_0$ . На четных полуинтервалах  $(2k-1)\frac{T_R}{2} \leq t \leq 2k\frac{T_R}{2}$  фазовое уравнение имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{-\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение —

$$\frac{T_R}{2} = \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}. \quad (5)$$

Здесь  $\Psi_{2k}, \Psi_{2k-1}$  — неизвестные граничные фазы.

Совершенно аналогично рассмотрим нечетные и четные полуинтервалы на втором полупериоде ЧП  $T_S/2 \leq t \leq 2T_S/2$  при  $k = \frac{K_R}{2} + 1, \dots, K_R$ . На нечетных полуинтервалах  $(2k-2)\frac{T_R}{2} \leq t \leq (2k-1)\frac{T_R}{2}$  фазовое уравнение имеет решение

$$\frac{T_R}{2} = \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_R - \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}, \quad (6)$$

где  $\Psi_{2k-1}, \Psi_{2k-2}$  — неизвестные граничные фазы; фаза  $\Psi_{K_R}$  уже определена. На четных полуинтервалах  $(2k-1)\frac{T_R}{2} \leq t \leq 2k\frac{T_R}{2}$  фазовое уравнение имеет решение

$$\frac{T_R}{2} = \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_R - \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}, \quad (7)$$

где  $\Psi_{2k}, \Psi_{2k-1}$  — неизвестные граничные фазы.

**Алгоритм расчета частотной характеристики.** Согласно изложенному,

$$T_S = \sum_{k=1}^{K_R/2} \left[ \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} + \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \right] +$$

$$+ \sum_{k=(K_R/2)+1}^{K_R} \left[ \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_R - \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} + \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_R - \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \right].$$

Задача заключается в том, чтобы найти последнюю фазу  $\Psi_{2K_R}$  в зацепляющейся последовательности фаз

$$\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{K_R}, \Psi_{K_R+1}, \dots, \Psi_{2K_R-1}, \Psi_{2K_R}. \quad (8)$$

Для решения (8) воспользуемся асимптотическим преобразованием интегралов в (4), например,

$$\frac{T_R}{2} = \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\Omega_R} \left( 1 - \frac{\Omega_S + \Omega}{\Omega_R} \right) (\Psi_{2k-1} - \Psi_{2k-2}) - \frac{\Omega_L}{\Omega_R^2} \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \cos \Psi d\Psi. \quad (9)$$

В нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_R$  из (9) получим

$$\Psi_{2k-1} = \Psi_{2k-2} + \frac{\Omega_R}{1 - (\Omega_S + \Omega)/\Omega_R} \frac{T_R}{2}.$$

В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_{1,1}$  из (9) следует, что граничные фазы связаны рекуррентным соотношением

$$\Psi_{2k-1} = \Psi_{2k-2} + \frac{1}{1 - \frac{\Omega_S + \Omega}{\Omega_R}} \left\{ \Omega_R \frac{T_R}{2} + \frac{\Omega_L}{\Omega_R} \left[ \sin \left( \Psi_{2k-2} + \frac{\Omega_R}{1 - \frac{\Omega_S + \Omega}{\Omega_R}} \frac{T_R}{2} \right) - \sin \Psi_{2k-2} \right] \right\}. \quad (10)$$

Воспользуемся асимптотическим преобразованием интегралов в (5)

$$\begin{aligned} \frac{T_R}{2} &= \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_R + \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \approx \\ &\approx -\frac{1}{\Omega_R} \left( 1 + \frac{\Omega_S + \Omega}{\Omega_R} \right) (\Psi_{2k} - \Psi_{2k-1}) - \frac{\Omega_L}{\Omega_R^2} \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \cos \Psi d\Psi. \end{aligned} \quad (11)$$

В нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_R$  из (11) получим

$$\Psi_{2k} = \Psi_{2k-1} - \frac{\Omega_R}{1 + (\Omega_S + \Omega)/\Omega_R} \frac{T_R}{2}.$$

В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_{1,1}$  из (11) следует, что граничные фазы связаны рекуррентным соотношением

$$\Psi_{2k} = \Psi_{2k-1} + \frac{1}{1 + \frac{\Omega_S + \Omega}{\Omega_R}} \left\{ -\Omega_R \frac{T_R}{2} - \frac{\Omega_L}{\Omega_R} \left[ \sin \left( \Psi_{2k-1} - \frac{\Omega_R}{1 - \frac{\Omega_S + \Omega}{\Omega_R}} \frac{T_R}{2} \right) - \sin \Psi_{2k-1} \right] \right\}. \quad (12)$$

Далее используем асимптотическое преобразование интегралов в (6)

$$\begin{aligned} \frac{T_R}{2} &= \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \frac{d\Psi}{\Omega_R - \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \approx \\ &\approx \frac{1}{\Omega_R} \left( 1 - \frac{-\Omega_S + \Omega}{\Omega_R} \right) (\Psi_{2k-1} - \Psi_{2k-2}) - \frac{\Omega_L}{\Omega_R^2} \int_{\Psi_{2k-2}}^{\Psi_{2k-1}} \cos \Psi d\Psi. \end{aligned} \quad (13)$$

В нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_R$  из (13) получим

$$\Psi_{2k-1} = \Psi_{2k-2} + \frac{\Omega_R}{1 - (-\Omega_S + \Omega)/\Omega_R} \frac{T_R}{2}.$$

В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_{1,1}$  из (13) следует, что граничные фазы связаны рекуррентным соотношением

$$\Psi_{2k-1} = \Psi_{2k-2} + \frac{1}{1 - \frac{-\Omega_S + \Omega}{\Omega_R}} \left\{ \Omega_R \frac{T_R}{2} + \frac{\Omega_L}{\Omega_R} \left[ \sin \left( \Psi_{2k-2} + \frac{\Omega_R}{1 - \frac{-\Omega_S + \Omega}{\Omega_R}} \frac{T_R}{2} \right) - \sin \Psi_{2k-2} \right] \right\}. \quad (14)$$

Используем асимптотическое преобразование интегралов в (7)

$$\begin{aligned} \frac{T_R}{2} &= \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \frac{d\Psi}{-\Omega_R - \Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} \approx \\ &\approx -\frac{1}{\Omega_R} \left( 1 + \frac{-\Omega_S + \Omega}{\Omega_R} \right) (\Psi_{2k} - \Psi_{2k-1}) - \frac{\Omega_L}{\Omega_R^2} \int_{\Psi_{2k-1}}^{\Psi_{2k}} \cos \Psi d\Psi. \end{aligned} \quad (15)$$

В нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_R$  из (15) получим

$$\Psi_{2k} = \Psi_{2k-1} - \frac{\Omega_R}{1 + (-\Omega_S + \Omega)/\Omega_R} \frac{T_R}{2}.$$

В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_{1,1}$  из (15) следует, что граничные фазы связаны рекуррентным соотношением

$$\Psi_{2k} = \Psi_{2k-1} + \frac{1}{1 + \frac{-\Omega_S + \Omega}{\Omega_R}} \left\{ -\Omega_R \frac{T_R}{2} - \frac{\Omega_L}{\Omega_R} \left[ \sin \left( \Psi_{2k-1} - \frac{\Omega_R}{1 - \frac{-\Omega_S + \Omega}{\Omega_R}} \frac{T_R}{2} \right) - \sin \Psi_{2k-1} \right] \right\}. \quad (16)$$

Согласно соотношениям (10), (12), (14), (16), для  $k = 1, \dots, K_R$  (с помощью простой программы) можно найти граничные фазы в



последовательности (9), начиная с заданной фазы  $\Psi_0$  и заканчивая искомой фазой  $\Psi_{2K_R} = \Psi_\Omega$ . Зависимость последней фазы  $\Psi_{2K_R}$  итерационного процесса от величины  $\Omega$  очевидна с учетом изложенного выше. Затем получим частоту биений  $\Omega_{beat}(\Omega) = (\Psi_\Omega - \Psi_0)/T_S$  как функцию переменной  $\Omega$  (разности частот КР), т. е. частотную характеристику по определению. Частотная характеристика строится в среде MathCAD.

В рассматриваемом методе удержано только приближение первого порядка по  $\Omega_L/\Omega_R$ , т. е. точность метода ограничена. Однако при выполнении условий  $\Omega_R/\Omega \gg 1$ ,  $\Omega_R/\Omega_S \gg 1$ ,  $\Omega_R/\Omega_L \gg 1$ , необходимых для применения асимптотического метода, точность определения ЧХ вполне достаточна.

**Частотная характеристика кольцевого лазера с частотной подставкой типа меандра.** Меандр — периодическая ЧП в форме меандра с периодом  $T_S$  (частотой  $\nu_S$ ) и амплитудой  $\Omega_S$ :  $\Omega_S(t) = \Omega_S \text{sign}(\sin(\nu_S t))$ . Полуширина статической зоны захвата  $\Omega_L \ll \Omega_S$ . В отличие от комбинированной ЧП меандр даже при большой амплитуде значительно искажает ЧХ, т. е. реальная характеристика заметно отличается от идеальной. Это позволяет проверить корректность предлагаемого метода расчета ЧХ, поскольку характеристика в случае подставки типа меандра рассчитывалась на электронных моделях и снималась экспериментально. Алгоритм предлагаемого в настоящей статье метода для расчета указанной ЧХ, а также ее расчет с помощью этого алгоритма, будут приведены ниже.

Фазовое уравнение при ЧП типа меандра имеет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} = \Omega_S(t) + \Omega + \Omega_L \cos \Psi. \quad (17)$$

Приведем определение частоты биений  $\Omega_{beat}$ , соответствующее процедуре ее выделения в реальном эксперименте. Известно, что фактически измеряется приращение фазы сигнала биений на интервале  $(t, t + T_S)$ :  $\Psi(t, T_S) = \varphi(t + T_S) - \varphi(t)$ , которое относят к периоду

$\Omega_{beat} = \frac{\Psi(t, T_S)}{T_S}$ . Далее примем  $t = 0$ . Отметим, что в пределах периода ЧП  $0 \leq t \leq T_S$  существуют два полупериода длительностью  $T_S/2$ , на которых подставка принимает одно из постоянных значений:  $\Omega_{S_q} = (-1)^{q-1} \Omega_S$ ,  $q = 1, 2$ .

На первом полупериоде ЧП имеем  $\Omega_{S_1} = \Omega_S$ , на втором полупериоде ЧП —  $\Omega_{S_2} = -\Omega_S$ . Следовательно, на этих полупериодах фазовое

уравнение (17) имеет постоянную по времени правую часть и может быть представлено в виде

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_{Dq} + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}. \quad (18)$$

Уравнение (18) интегрируется при начальном условии  $t(\Psi_0) = 0$ . Каждому указанному полупериоду на оси времени должно быть сопоставлено начальное значение на оси фаз  $\Psi$ . Поясним смысл этого утверждения. На первом полупериоде  $0 \leq t \leq T_S/2$  фазовое уравнение (17) имеет вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{\Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение —

$$\frac{T_R}{2} - 0 = \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} \frac{d\Psi}{\Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}, \quad (19)$$

где  $\Psi_0$  — произвольно заданная начальная фаза;  $\Psi_1$  — неизвестная фаза. На втором полупериоде  $T_S/2 \leq t \leq 2T_S/2$  фазовое уравнение принимает вид

$$\frac{dt}{d\Psi} = \frac{1}{-\Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi},$$

а его решение можно представить как

$$2\frac{T_R}{2} - \frac{T_R}{2} = \int_{\Psi_2}^{\Psi_1} \frac{d\Psi}{-\Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi}. \quad (20)$$

Здесь  $\Psi_1, \Psi_2$  — неизвестные граничные фазы. При выполнении неравенств  $\Omega_S/\Omega \gg 1$ ,  $\Omega_S/\Omega_L \gg 1$  из (19) получим

$$\begin{aligned} \frac{T_S}{2} &= \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} \frac{d\Psi}{\Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} = \\ &= \frac{1}{\Omega_S} \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} \frac{d\Psi}{1 + \frac{\Omega + \Omega_L \cos \Psi}{\Omega_S}} \approx \frac{1}{\Omega_S} \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} \left( 1 - \frac{\Omega + \Omega_L \cos \Psi}{\Omega_S} \right) d\Psi = \\ &= \frac{1}{\Omega_S} \left( 1 - \frac{\Omega}{\Omega_S} \right) (\Psi_1 - \Psi_0) - \frac{\Omega_L}{\Omega_S^2} \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} \cos \Psi d\Psi. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда в нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_S \ll 1$  находим связь значений фаз на границах первого полуинтервала оси  $\Psi$ :

$\Psi_1 = \frac{\Omega_S}{(1-\Omega)/\Omega_S} \frac{T_S}{2} + \Psi_0$ . В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_S \ll 1$  из (21) следует, что

$$\Psi_1 = \Psi_0 + \frac{1}{1-\Omega/\Omega_S} \left\{ \Omega_S \frac{T_S}{2} + \frac{\Omega_L}{\Omega_S} \left[ \sin \left( \frac{\Omega_S}{1-\Omega/\Omega_S} \frac{T_S}{2} + \Psi_0 \right) - \sin \Psi_0 \right] \right\}. \quad (22)$$

При выполнении неравенств  $\Omega_S/\Omega \gg 1$ ,  $\Omega_S/\Omega_L \gg 1$  из (20) получим

$$\begin{aligned} \frac{T_S}{2} &= - \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \frac{d\Psi}{-\Omega_S + \Omega + \Omega_L \cos \Psi} = \\ &= \frac{1}{\Omega_S} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \frac{d\Psi}{1 - \frac{\Omega + \Omega_L \cos \Psi}{\Omega_S}} \approx \frac{1}{\Omega_S} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \left( 1 + \frac{\Omega + \Omega_L \cos \Psi}{\Omega_S} \right) d\Psi = \\ &= \frac{1}{\Omega_S} \left( 1 + \frac{\Omega}{\Omega_S} \right) (\Psi_2 - \Psi_1) + \frac{\Omega_L}{\Omega_S^2} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \cos \Psi d\Psi. \end{aligned} \quad (23)$$

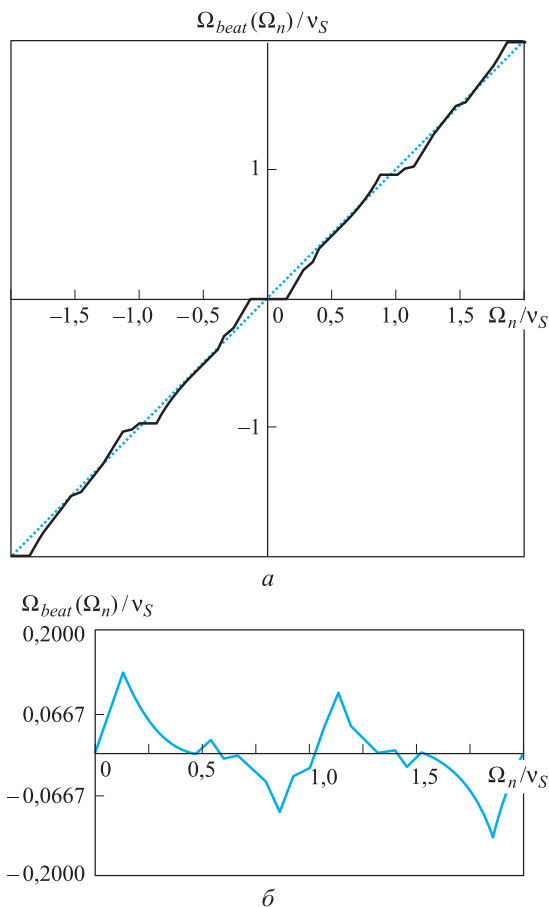
Отсюда в нулевом приближении по  $\Omega_L/\Omega_S \ll 1$  находим связь между значениями фаз на границах второго полуинтервала оси  $\Psi$ :

$\Psi_2 = \frac{\Omega_S}{(1+\Omega)/\Omega_S} \frac{T_S}{2} + \Psi_1$ . В первом приближении по  $\Omega_L/\Omega_S \ll 1$  из (23) имеем

$$\Psi_2 = \Psi_1 + \frac{1}{1 + \frac{\Omega}{\Omega_S}} \left\{ \Omega_S \frac{T_S}{2} - \frac{\Omega_L}{\Omega_S} \left[ \sin \left( \frac{\Omega_S}{1 + \frac{\Omega}{\Omega_S}} \frac{T_S}{2} + \Psi_1 \right) - \sin \Psi_1 \right] \right\}. \quad (24)$$

Соотношения (22), (24) позволяют рекуррентно найти фазу  $\Psi_2 = \Psi(T_S)$  при известной начальной фазе  $\Psi_0 = \Psi(0)$ . Зависимость  $\Psi_2 = \Psi(T_S)$  от величины  $\Omega$  очевидна из приведенных выше выражений. Следовательно, в соответствии с приведенным алгоритмом можно найти зависимость  $\Omega_{beat}(\Omega) = \frac{\Psi_2(T_S) - \Psi_0}{T_S}$ , т. е. аналитическое описа-

ние ЧХ для КЛ с подставкой типа меандра. Частотная характеристика при  $\Omega_S = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3$ ,  $\nu_S = 2\pi \cdot 4$ ,  $\Omega_L = 2\pi \cdot 900$  приведена на части *a* рисунка, искажения ЧХ (отклонение реальной характеристики от идеальной) при тех же условиях — на части *б* рисунка. Особенности ЧХ (динамические зоны захвата или зоны синхронизации — участки с малым наклоном) хорошо видны на части *a* рисунка. Наличие таких участков характерно и позволяет принять приведенный расчет положительным тестом на проверку применимости предлагаемого метода.



Идеальная (1) и реальная (2) ЧХ при подставке типа меандра (*a*), искажение (*б*) реальной ЧХ (отклонение от идеальной ЧХ)

**Заключение.** Предложенный в статье метод позволил построить с использованием пакета MathCAD ЧХ КЛ как с простой подставкой типа меандра, так и с подставкой в виде суперпозиции двух меандров (с относительно большой амплитудой одного из них). Метод можно применять в процессе разработки прибора, поскольку на расчет одного варианта ЧХ требуется несколько секунд. Полученные в работе результаты не могут в полной мере соответствовать снятой экспериментально ЧХ

вследствие принятых допущений в описании КЛ. Доказана возможность провести оперативный перебор вариантов ЧХ, что достаточно для перевода алгоритма метода на один из языков программирования, а также для уточнения модели КЛ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Wilkinson J.R.* Ring Lasers Prog // *Quant. Electr.* 1987. Vol. 11. P. 1–13.
2. *Азарова В.В., Голяев Ю.Д., Дмитриев В.Г.* Кольцевые газовые лазеры с магнитооптическим управлением в лазерной гироскопии // *Квант. электрон.* 2000. Т. 30. № 2. С. 96–104.
3. *Хошев И.М.* К теории кольцевого лазера со знакопеременной частотной подстановкой // *Квант. электрон.* 1980. Т. 7. № 5. С. 953–958.
4. *Судаков В.Ф.* Математическое ожидание и дисперсия частоты биений для малых возмущений параметров бегущей волны генератора // *Журнал прикладной спектроскопии.* 1976. Т. 25. С. 362.
5. *Бирман А.Я., Наумов П.Б., Савушкин А.Ф., Тропкин Е.Н.* Анализ динамической частотной характеристики кольцевого лазера на основе теории Флоке // *Квант. электрон.* 1986. Т. 13. № 8. С. 1638–1644.
6. *Бирман А.Я., Наумов П.Б., Савушкин А.Ф.* Теория кольцевого лазера с треугольной и трапециевидальной формой модуляции частотной невзаимности резонатора // *Квант. электрон.* 1989. Т. 16. № 12. С. 2379–2385.
7. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах* / под ред. Ю.Л. Климонтовича. М.: Наука, 1974.

## REFERENCES

- [1] *Wilkinson J.R.* Ring lasers prog. *Quant. Electr.*, 1987, vol. 11, pp. 1–13.
- [2] *Azarova V.V., Golyaev Yu.D., Dmitriev V.G.* Ring gas lasers with magneto-optical control for laser gyroscope (invited paper). *Quantum Electronics*, 2000, vol. 30, no. 2, pp. 96–105.
- [3] *Khoshev I.M.* Theory of a ring laser with a variable-sign frequency bias. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, 1980, vol. 10, no. 5, pp. 544–546.
- [4] *Sudakov V.F.* Mathematical-expectation value and dispersion of beat frequencies for small perturbations of parameters of a travelling-wave generator. *Journal of Applied Spectroscopy*, 1976, vol. 25, iss. 6, pp. 1513–1517.
- [5] *Birman A.Ya., Naumov P.B., Savushkin A.F., Tropkin E.N.* Analysis of the dynamic frequency characteristic of a ring laser based on the Floquet theory. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, 1986, vol. 16, no. 8, pp. 1069–1070.
- [6] *Birman A.Ya., Naumov P.B., Savushkin A.F.* Theory of a ring laser with triangular and trapezoidal modulation of the resonator frequency nonreciprocity. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, 1989, vol. 19, no. 12, pp. 1528–1552.
- [7] *Zeyger S.G., Klimontovich Yu.L., Landa P.S., Lariontsev E.G., Fradkin E.E.* *Volnovye i fluktuatsionnye protsessy v lazerakh* [The Wave and Fluctuation Processes in Lasers]. Moscow, Nauka Publ., 1974.

Статья поступила в редакцию 06.10.2015

Судаков Владимир Федорович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Электротехника и промышленная электроника» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Sudakov V.F. — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Electrical Engineering and Industrial Electronics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Судаков В.Ф. Частотная характеристика кольцевого лазера со знакопеременной частотной подставкой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 3. С. 51–64. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-3-51-64

**Please cite this article in English as:**

Sudakov F.V. Frequency Response of a Ring Laser with an Alternating Frequency Pedestal. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 3, pp. 51–64. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-3-51-64