

# АВИАЦИОННАЯ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

DOI: 10.18698/0236-3933-2016-2-3-17

УДК 621

## ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ БОКОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА\*

Н.Е. Зубов<sup>1,2</sup>, Е.А. Микрин<sup>1,2</sup>, В.Н. Рябченко<sup>1,2</sup>, М.Н. Поклад<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: nezubov@bmstu.ru

<sup>2</sup>Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва,  
Королёв, Московская обл., Российская Федерация  
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

*Для линеаризованной модели бокового движения летательного аппарата самолетного типа получены аналитические выражения законов управления и впервые в аналитическом виде построена их параметризация на основе невырожденного преобразования подобия. В основу синтеза положена оригинальная декомпозиция объекта управления и ранее разработанный авторами на ее основе метод модального управления МИМО-системой. Приведены результаты моделирования управления боковым движением летательного аппарата с использованием аналитически синтезированных непараметризованного и параметризованного законов управления, обеспечивающих минимум суммы всех взятых по модулю элементов матрицы коэффициентов обратной связи. Показаны преимущества использования параметризованного закона управления в условиях примерного равенства времени переходного процесса как для первого, так и для второго случаев.*

**Ключевые слова:** декомпозиция, модальный синтез, МИМО-система, боковое движение летательного аппарата, полюс динамической системы, параметризация.

## PARAMETERIZATION OF ANALYTIC CONTROL LAWS FOR AIRCRAFT LATERAL MOTION

N.E. Zubov<sup>1,2</sup>, E.A. Mikrin<sup>1,2</sup>, V.N. Ryabchenko<sup>1,2</sup>, M.N. Poklad<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: nezubov@bmstu.ru

<sup>2</sup>S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia,  
Korolev, Moscow Region, Russian Federation  
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

*In this study we test a linearized model of the aircraft lateral motion and obtain analytic expressions of control laws. As a result, we are the first to build their parameterization, making use of the non-degenerate similarity transformation. The original decomposition of control object and the MIMO-system's modal control*

---

\*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00046).

method, developed by the authors earlier, are in the basis of synthesis. Moreover, we describe the results of modelling the control for aircraft lateral motion, using analytically synthesized non-parametrized and parametrized control laws. The laws provide the minimum of a sum of all feedback factors taken by the module of matrix elements. Thus, we consider the advantages on costs for a parametrized control law, with the assumption of approximate equality of transient process time both for the first case, and the second one.

**Keywords:** decomposition, modal synthesis, MIMO-system, aircraft lateral motion, dynamical system pole, parameterization.

**Математическая модель бокового движения летательного аппарата.** Будем рассматривать боковое (крен–рыскание) движение летательного аппарата (ЛА) в форме “вход–состояние” [1, 2]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1)$$

с матрицами коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_z^\beta & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & a_z^\gamma \\ a_{m_x}^\beta & a_{m_x}^{\omega_x} & a_{m_x}^{\omega_y} & 0 \\ a_{m_y}^\beta & a_{m_y}^{\omega_x} & a_{m_y}^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 1 & -\operatorname{tg} \nu_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{m_x}^{\delta_H} & a_{m_x}^{\delta_M} \\ a_{m_y}^{\delta_H} & a_{m_y}^{\delta_M} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

элементы которых являются кусочно-постоянными величинами, и векторами

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta_H \\ \delta_\delta \end{pmatrix}.$$

Здесь  $a_z^\beta$ ,  $a_z^\gamma$ ,  $a_{m_x}^\beta$ ,  $a_{m_x}^{\omega_x}$ ,  $a_{m_x}^{\omega_y}$ ,  $a_{m_y}^\beta$ ,  $a_{m_y}^{\omega_x}$ ,  $a_{m_y}^{\omega_y}$ ,  $a_{m_x}^{\delta_H}$ ,  $a_{m_x}^{\delta_\delta}$ ,  $a_{m_y}^{\delta_H}$ ,  $a_{m_y}^{\delta_\delta}$  — коэффициенты линеаризации;  $\alpha_0$  — угол атаки;  $\nu_0$  — угол тангажа;  $\beta$  — угол скольжения;  $\omega_x$  — угловая скорость крена;  $\omega_y$  — угловая скорость рыскания;  $\gamma$  — угол крена;  $\delta_H$  — угол отклонения рулей направления;  $\delta_\delta$  — угол отклонения элеронов [1].

Для унификации записи введем обозначения  $a_{11} = a_z^\beta$ ,  $a_{12} = \sin \alpha_0$ ,  $a_{13} = \cos \alpha_0$ ,  $a_{14} = a_z^\gamma$ ,  $a_{21} = a_{m_x}^\beta$ ,  $a_{22} = a_{m_x}^{\omega_x}$ ,  $a_{23} = a_{m_x}^{\omega_y}$ ,  $a_{31} = a_{m_y}^\beta$ ,  $a_{32} = a_{m_y}^{\omega_x}$ ,  $a_{33} = a_{m_y}^{\omega_y}$ ,  $a_{43} = \operatorname{tg} \nu_0$ ,  $b_{21} = a_{m_x}^{\delta_H}$ ,  $b_{22} = a_{m_x}^{\delta_\delta}$ ,  $b_{31} = a_{m_y}^{\delta_H}$ ,  $b_{32} = a_{m_y}^{\delta_\delta}$ , тогда объект управления (1) в развернутом виде запишется так:

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_H \\ \delta_\delta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Считая все компоненты вектора состояния полностью наблюдаемыми, будем искать управление для модели (2) в виде закона обратной

связи вида

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{K}$  — искомая матрица коэффициентов (матрица регулятора).

**Задача полного размещения полюсов.** Как уже отмечалось [3], задача размещения полюсов или задача назначения собственных значений (eigenvalue assignment) в линейных динамических системах в той или иной постановке рассматривалась в многочисленных работах. В общем случае вместо системы (1) рассмотрим линейную многомерную динамическую систему с многими входами и многими выходами (MIMO — Multi Inputs Multi Outputs):

$$\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (4)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния, а  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  — вектор управляющих воздействий;  $\mathfrak{D}$  — оператор дифференцирования по времени:  $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ , либо оператор сдвига во времени:  $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + 1)$ .

Аналогично (3) считаем, что для MIMO-системы (4) рассматривается управление с обратной связью

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (5)$$

где  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  — постоянная матрица регулятора. Кроме того, предполагается, что матрица  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  в (4) имеет полный ранг по столбцам, а матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  имеет множество собственных значений (спектр), определенное следующим образом:

$$\text{eig}(\mathbf{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \det(\lambda_i \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Здесь  $\mathbf{I}_n$  — единичная матрица размера  $n \times n$ ;  $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел;  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$  в зависимости от типа  $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t)$  обозначает левую полуплоскость  $\mathbb{C}^-$  плоскости  $\mathbb{C}$ , т.е.  $\mathbb{C}^{\text{stab}} \doteq \mathbb{C}^-$ , либо область внутри круга единичного радиуса с центром в нуле, т.е.  $\mathbb{C}^{\text{stab}} \doteq \mathbb{C}_{|\lambda| < 1}$ . Здесь  $|\lambda|$  — модуль собственного значения  $\lambda$ .

Управление системой (4) с помощью закона (5) является классической задачей, когда необходимо найти матрицу  $\mathbf{K}$ , обеспечивающую некоторые заданные требования к процессу управления. Эти требования условно можно разделить на три группы [3]: 1) требования на размещение полюсов замкнутой системы (собственных значений матриц  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ ) в заданных точках  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$  или в заданной области  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$  (заданной областью, например, может быть вся левая полуплоскость  $\mathbb{C}$ ); 2) требования на размещение полюсов и нулей (тех или иных нулей передаточной матрицы MIMO-системы замкнутой системы в заданных точках  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$  или заданных областях  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$ ; 3) требования к переходным процессам в замкнутой системе в смысле минимума заданного функционала.

В [3, 4] предложен эффективный метод решения задачи полного размещения полюсов MIMO-системы (4). Метод не требует реше-

ния специальных матричных уравнений (типа уравнения Сильвестра), имеет один и тот же вид для непрерывного и дискретного случаев задания модели системы, не имеет ограничений по алгебраической и геометрической кратностям задаваемых полюсов, легко реализуется в среде MATLAB.

Пусть  $\mathbf{V}^{\perp T} = \text{null}(\mathbf{B}^T)$  — ортогональный делитель нуля, т.е. матрица, удовлетворяющая следующим условиям [3]:

$$\mathbf{V}^{\perp} \mathbf{B} = \mathbf{0}_{(n-r) \times r}; \quad (6)$$

$$\mathbf{V}^{\perp} \mathbf{V}^{\perp T} = \mathbf{I}_{n-r}; \quad (7)$$

$\mathbf{V}^+$  — псевдообратная матрица Мура – Пенроуза, т.е.

$$\mathbf{B} \mathbf{V}^+ \mathbf{B} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{V}^+ \mathbf{B} \mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^+, \quad (\mathbf{V}^+ \mathbf{B})^T = \mathbf{V}^+ \mathbf{B}, \quad (\mathbf{B} \mathbf{V}^+)^T = \mathbf{B} \mathbf{V}^+.$$

Здесь  $\text{null}(\cdot)$  — оператор вычисления базиса нуль-пространства [3];  $\mathbf{0}_{(n-r) \times r}$  — нулевая матрица размера  $(n-r) \times r$ .

Определим  $L = \text{floor}(n/r)$ , где  $\text{floor}(\cdot)$  — операция округления числа  $\cdot$  в сторону ближайшего большего целого, например,  $\text{floor}(0,1) = 1$ ,  $\text{floor}(1,4) = 2$ ,  $\text{floor}(2,99) = 3$  и т.д. Введем в рассмотрение многоуровневую декомпозицию ММО-системы (4) аналогично тому, как это сделано в [4]. Для представляемой парой матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ММО-системы имеем:

*нулевой (исходный) уровень декомпозиции*

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_0, \quad (8)$$

*первый уровень декомпозиции*

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{V}_0^{\perp} \mathbf{A}_0 \mathbf{V}_0^{\perp+}, \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0^{\perp} \mathbf{A}_0 \mathbf{V}_0, \quad (9)$$

*k-й (промежуточный) уровень декомпозиции*

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{V}_{k-1}^{\perp} \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^{\perp+}, \quad \mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k-1}^{\perp} \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}, \quad (10)$$

*L-й (конечный) уровень декомпозиции*

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{V}_{L-1}^{\perp} \mathbf{A}_{L-1} \mathbf{V}_{L-1}^{\perp+}, \quad \mathbf{V}_L = \mathbf{V}_{L-1}^{\perp} \mathbf{A}_{L-1} \mathbf{V}_{L-1}. \quad (11)$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если ММО-система (4) с парой матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  полностью управляемая, то полностью управляемы все пары матриц  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{V}_i)$  (8) – (11), где  $i \in \{0, \dots, L\}$  [4, 5].

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что все матрицы  $\mathbf{V}_i$  в (8)–(11) являются матрицами полного ранга по столбцам. В противном случае можно воспользоваться подходом, изложенным в работе [5]. Тогда справедливо утверждение.

**Теорема 2.** Пусть ММО-система (4) полностью управляемая и матрица  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  удовлетворяет формулам [4, 5]

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \mathbf{V}_0^- \mathbf{A} - \Phi_0 \mathbf{V}_0^-, \quad \mathbf{V}_0^- = \mathbf{K}_1 \mathbf{V}_0^{\perp} + \mathbf{V}_0^+; \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^- \mathbf{A}_1 - \Phi_1 \mathbf{B}_1^-, \quad \mathbf{B}_1^- = \mathbf{K}_2 \mathbf{B}_1^\perp + \mathbf{B}_1^+, \dots; \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{B}_k^- \mathbf{A}_k - \Phi_k \mathbf{B}_k^-, \quad \mathbf{B}_k^- = \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{B}_k^\perp + \mathbf{B}_k^+, \dots; \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{B}_L^- \mathbf{A}_L - \Phi_L \mathbf{B}_L^-, \quad (15)$$

тогда

$$\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \bigcup_{i=1}^{L+1} \text{eig}(\Phi_{i-1}). \quad (16)$$

Из теоремы 2 следует, что закон управления (5) с матрицей  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , удовлетворяющей соотношениям (12)–(15), обеспечивает выполнение условия (16), т.е. заданного размещения полюсов.

**Аналитический синтез законов управления и их параметризация.** В соответствии со сказанным введем в рассмотрение двухуровневую декомпозицию системы (2), поскольку  $L = \text{floor}(n/r) = 2$ , учитывая, что в нашем случае ранг каждой вводимой матрицы  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{B}_1$  совпадает с соответствующим числом столбцов, получаем:

*нулевой уровень*

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

*первый уровень*

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp+}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0. \quad (18)$$

$\mathbf{B}_0^{\perp+}$  – псевдообратная матрица Мура – Пенроуза для  $\mathbf{B}_0^\perp$  [3–7].

Зададим матрицы  $\Phi = \Phi_0, \Phi_1$  таким образом, чтобы множество  $\bigcup_{i=1}^2 \text{eig}(\Phi_{i-1})$  состояло из корней характеристического полинома  $\det(\lambda \mathbf{I}_4 - \mathbf{A} + \mathbf{BK})$ , например,

$$\Phi = \Phi_0 = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} s_3 & 0 \\ 0 & s_4 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Тогда требуемая матрица коэффициентов в законе управления, согласно (12), определится выражением

$$\mathbf{K} = \Phi_0 (\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp) - (\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp) \mathbf{A}_0, \quad (20)$$

где

$$\mathbf{K}_1 = \Phi_1 \mathbf{B}_1^+ - \mathbf{B}_1^+ \mathbf{A}_1, \quad (21)$$

$\mathbf{B}_0^+, \mathbf{B}_1^+$  – соответствующие псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза [4–7].

Для матрицы  $\mathbf{B}$  вида (3)  $\mathbf{B}_0^\perp$  и  $\mathbf{B}_0^+$  определяются так:

$$\mathbf{B}_0^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0^+ = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}^+ & b_{13}^+ & 0 \\ 0 & b_{22}^+ & b_{23}^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где

$$b_{12}^+ = \frac{b_{32}}{b^+}, \quad b_{13}^+ = \frac{-b_{22}}{b^+}, \quad b_{22}^+ = -\frac{b_{31}}{b^+}, \quad b_{23}^+ = \frac{b_{32}}{b^+}, \quad b^+ = b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}.$$

При этом матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  в соответствии с (9) определены как

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ b_{21} + a_{43}b_{31} & b_{22} + a_{43}b_{32} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Вычисляя  $\mathbf{B}_1^+$  для первого уровня декомпозиции, имеем

$$\mathbf{B}_1^+ = \begin{pmatrix} -\frac{b_{22} + a_{43}b_{32}}{b^+b^{1+}} & \frac{a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}}{b^+b^{1+}} \\ \frac{b_{21} + a_{43}b_{31}}{b^+b^{1+}} & -\frac{a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}}{b^+b^{1+}} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$b^{1+} = a_{13} - a_{12}a_{43}.$$

Используя (8), получаем вид матрицы коэффициентов

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{(a_{11} - s_3)(b_{22} + a_{43}b_{32})}{b^+b^{1+}} & -\frac{a_{14}b_{22} + a_{14}a_{13}b_{32} + a_{12}b_{22}s_3 + a_{13}b_{32}s_3}{b^+b^{1+}} \\ \frac{(a_{11} - s_4)(b_{21} + a_{43}b_{31})}{b^+b^{1+}} & \frac{a_{14}b_{21} + a_{14}a_{43}b_{31} + a_{12}b_{21}s_4 + a_{13}b_{31}s_4}{b^+b^{1+}} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

далее, согласно выражениям (20)–(25), общий вид матрицы коэффициентов обратной связей (матрицы регулятора)

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Здесь

$$k_{11} = \frac{a_{21}b_{32}}{b^+} - \frac{a_{31}b_{22}}{b^+} - \frac{a_{11}(a_{11} - s_3)(b_{22} + a_{43}b_{32})}{b^+b^{1+}} + \frac{s_1a_{11}(a_{11} - s_3)(b_{22} + a_{43}b_{32})}{b^+b^{1+}}; \quad (27)$$

$$k_{12} = - \left( \frac{a_{14}b_{22} + a_{11}a_{12}b_{22} - a_{13}a_{22}b_{32} + a_{13}a_{32}b_{22} + a_{14}a_{43}b_{32} + a_{13}b_{32}s_1 + a_{13}b_{32}s_3}{b^+b^{1+}} + \frac{a_{11}a_{12}a_{43}b_{32} + a_{12}a_{22}a_{43}b_{32} - a_{12}a_{32}a_{43}b_{22} - a_{12}a_{43}b_{32}s_1 - a_{12}a_{43}b_{32}s_3}{b^+b^{1+}} \right); \quad (28)$$

$$k_{13} = - \left( \frac{a_{11}a_{13}b_{22} - a_{13}a_{23}b_{32} + a_{13}a_{33}b_{22} + a_{14}a_{43}b_{22} - a_{13}b_{22}s_1 + a_{13}b_{32}s_1 - a_{13}b_{22}s_3}{b+b^{1+}} + \frac{a_{14}a_{43}^2b_{32} + a_{11}a_{13}a_{43}b_{32} + a_{12}a_{23}a_{43}b_{32} - a_{12}a_{33}a_{43}b_{22} + a_{12}a_{43}b_{22}s_1 + a_{12}a_{43}b_{22}s_3}{b+b^{1+}} \right); \quad (29)$$

$$k_{14} = \frac{s_1(a_{14}b_{22} + a_{14}a_{43}b_{32} + a_{12}b_{22}s_3 + a_{13}b_{32}s_3)}{b+b^{1+}} - \frac{a_{14}(a_{11} - s_3)(b_{22} + a_{43}b_{32})}{b+b^{1+}}; \quad (30)$$

$$k_{21} = \frac{a_{31}b_{21}}{b^+} - \frac{a_{21}b_{31}}{b^+} + \frac{a_{11}(a_{11} - s_4)(b_{21} + a_{43}b_{31})}{b+b^{1+}} - \frac{s_2a_{11}(a_{11} - s_4)(b_{21} + a_{43}b_{31})}{b+b^{1+}}; \quad (31)$$

$$k_{22} = \left( \frac{a_{14}b_{21} + a_{11}a_{12}b_{21} - a_{13}a_{22}b_{31} + a_{13}a_{32}b_{21} + a_{14}a_{43}b_{31} + a_{13}b_{31}s_2 + a_{13}b_{31}s_4}{b+b^{1+}} + \frac{a_{11}a_{12}a_{43}b_{31} + a_{12}a_{22}a_{43}b_{31} - a_{12}a_{32}a_{43}b_{21} - a_{12}a_{43}b_{31}s_2 - a_{12}a_{43}b_{31}s_4}{b+b^{1+}} \right); \quad (32)$$

$$k_{23} = \left( \frac{a_{11}a_{13}b_{21} - a_{13}a_{23}b_{31} + a_{13}a_{33}b_{21} + a_{14}a_{43}b_{21} - a_{13}b_{21}s_2 - a_{13}b_{21}s_4 + a_{14}a_{43}^2b_{31}}{b+b^{1+}} + \frac{a_{11}a_{13}a_{43}b_{31} + a_{12}a_{23}a_{43}b_{31} - a_{12}a_{33}a_{43}b_{21} + a_{12}a_{43}b_{21}s_2 + a_{12}a_{43}b_{21}s_4}{b+b^{1+}} \right); \quad (33)$$

$$k_{24} = - \frac{s_2(a_{14}b_{21} + a_{14}a_{43}b_{31} + a_{12}b_{21}s_4 + a_{13}b_{31}s_4)}{b+b^{1+}} + \frac{a_{14}(a_{11} - s_4)(b_{21} + a_{43}b_{31})}{b+b^{1+}}. \quad (34)$$

В соответствии с (3) и (5) имеем

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на основании соотношений (27)–(34) получены аналитические выражения коэффициентов матрицы обратной связи, которые имеют относительно компактный вид и могут быть легко реализованы в реальном масштабе времени.

Осуществим параметризацию синтезированных аналитических законов управления на основе невырожденного преобразования подо-

бия. Для этого на первом уровне декомпозиции для вычисления матрицы  $K_1$  воспользуемся следующим выражением:

$$\mathbf{K}_1^p = \mathbf{B}_1^+ \mathbf{A}_1 - \mathbf{T} \Phi_1 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_1^+,$$

где  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$  – матрица невырожденного преобразования подобия,  $t_{11}t_{12}t_{21}t_{22}$  – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию невырожденности матрицы  $\det \mathbf{T} \neq 0$ .

В результате вместо (25) будем иметь

$$\mathbf{K}_1^p = \begin{pmatrix} k_{11}^{1p} & k_{12}^{1p} \\ k_{21}^{1p} & k_{22}^{1p} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$k_{11}^{1p} = - \left( \begin{aligned} & \frac{a_{11}b_{22}t_{11}t_{22} - a_{11}b_{22}t_{12}t_{21} - b_{21}s_3t_{11}t_{22} + b_{21}s_4t_{11}t_{22} - b_{22}s_3t_{11}t_{22} + b_{22}s_4t_{12}t_{21}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} + \\ & + \frac{a_{11}a_{43}b_{32}t_{11}t_{22} - a_{11}a_{43}b_{32}t_{12}t_{21} - a_{43}b_{31}s_3t_{11}t_{12} + a_{43}b_{31}s_4t_{11}t_{12}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} + \\ & + \frac{-a_{43}b_{32}s_3t_{11}t_{22} + a_{43}b_{32}s_4t_{12}t_{21}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} \end{aligned} \right);$$

$$k_{12}^{1p} = - \left( \begin{aligned} & \frac{a_{14}b_{22}t_{11}t_{22} - a_{14}b_{22}t_{12}t_{21} + a_{14}b_{22}t_{12}t_{21} + a_{14}a_{43}b_{32}t_{11}t_{22} - a_{14}a_{43}b_{32}t_{12}t_{21}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} + \\ & + \frac{a_{12}b_{21}s_3t_{11}t_{12} - a_{12}b_{21}s_4t_{11}t_{12} + a_{12}b_{22}s_3t_{11}t_{22} + a_{13}b_{31}s_3t_{11}t_{12} - a_{12}b_{22}s_4t_{12}t_{21}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} + \\ & + \frac{-a_{13}b_{31}s_4t_{11}t_{12} + a_{13}b_{32}s_3t_{11}t_{22} - a_{13}b_{32}s_4t_{12}t_{21}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} \end{aligned} \right);$$

$$k_{21}^{1p} = \left( \begin{aligned} & \frac{a_{11}b_{21}t_{11}t_{22} - a_{11}b_{21}t_{12}t_{21} + b_{21}s_3t_{12}t_{21} - b_{21}s_4t_{11}t_{22} + b_{22}s_3t_{21}t_{22} - b_{22}s_4t_{21}t_{22}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} + \\ & + \frac{a_{11}a_{43}b_{31}t_{11}t_{22} - a_{11}a_{43}b_{31}t_{12}t_{21} + a_{43}b_{31}s_3t_{12}t_{21} - a_{43}b_{31}s_4t_{11}t_{22}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} + \\ & + \frac{a_{43}b_{32}s_3t_{21}t_{22} - a_{43}b_{32}s_4t_{21}t_{22}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} \end{aligned} \right);$$

$$k_{22}^{1p} = \left( \begin{aligned} & \frac{a_{14}b_{21}t_{11}t_{22} - a_{14}b_{21}t_{12}t_{21} + a_{14}a_{43}b_{31}t_{11}t_{22} - a_{14}a_{43}b_{31}t_{12}t_{21}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} + \\ & - \frac{a_{12}b_{21}s_3t_{12}t_{21} + a_{12}b_{21}s_4t_{11}t_{22} - a_{12}b_{22}s_3t_{21}t_{22} - a_{13}b_{31}s_3t_{12}t_{21} + a_{12}b_{22}s_4t_{21}t_{22}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} + \\ & + \frac{a_{13}b_{31}s_4t_{11}t_{22} - a_{13}b_{32}s_3t_{21}t_{22} + a_{13}b_{32}s_4t_{21}t_{22}}{b+b^1+(t_{11}t_{22}-t_{12}t_{21})} \end{aligned} \right).$$

На нулевом уровне декомпозиции для вычисления параметризованной матрицы  $\mathbf{K}^p$  воспользуемся следующим выражением:

$$\mathbf{K}^p = (\mathbf{K}_1^p \mathbf{B}^\perp + \mathbf{B}^+) \mathbf{A}_1 - \mathbf{G} \Phi_0 \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{K}_1^p \mathbf{B}^\perp + \mathbf{B}^+), \quad (35)$$



где  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ ,  $\det \mathbf{G} \neq 0$  – матрица невырожденного преобразования подобия, и, соответственно, получим

$$\mathbf{K}^p = \begin{pmatrix} k_{11}^p & k_{11}^p & k_{11}^p & k_{11}^p \\ k_{11}^p & k_{11}^p & k_{11}^p & k_{11}^p \end{pmatrix},$$

где

$$k_{11}^p = a_{11}k_{11}^{1p} + k_{21}^{1p} \left( \frac{g_{11}g_{22}s_1}{g^+} - \frac{g_{11}g_{12}s_2}{g^+} \right) - k_{11}^{1p} \left( \frac{g_{11}g_{22}s_1}{g^+} - \frac{g_{12}g_{21}s_2}{g^+} \right) + \frac{a_{21}b_{32}}{b^+} - \frac{a_{31}b_{22}}{b^+};$$

$$k_{12}^p = \left( \frac{g_{11}g_{22}k_{12}^{1p}}{g^+} - \frac{g_{12}g_{21}k_{12}^{1p}}{g^+} + \frac{a_{12}g_{11}g_{22}k_{11}^{1p}}{g^+} - \frac{a_{12}g_{12}g_{22}k_{11}^{1p}}{g^+} \right) - \left( \frac{b_{31}g_{11}g_{12}s_1 - b_{31}g_{11}g_{12}s_2 + b_{32}g_{11}g_{22}s_1 - b_{32}g_{12}g_{21}s_2}{b_{21}b_{32}g_{11}g_{22} - b_{21}b_{32}g_{12}g_{21} - b_{22}b_{31}g_{11}g_{22} + b_{22}b_{31}g_{12}g_{21}} \right) + \left( \frac{-a_{22}b_{32}g_{11}g_{22} + a_{22}b_{32}g_{12}g_{21} + a_{32}b_{22}g_{11}g_{22} - a_{32}b_{22}g_{12}g_{21}}{b_{21}b_{32}g_{11}g_{22} - b_{21}b_{32}g_{12}g_{21} - b_{22}b_{31}g_{11}g_{22} + b_{22}b_{31}g_{12}g_{21}} \right);$$

$$k_{13}^p = \left( \frac{a_{13}g_{11}g_{22}k_{11}^{1p}}{g^+} - \frac{a_{13}g_{12}g_{21}k_{11}^{1p}}{g^+} + \frac{a_{43}g_{11}g_{22}k_{12}^{1p}}{g^+} - \frac{a_{43}g_{12}g_{22}k_{12}^{1p}}{g^+} \right) - \left( \frac{b_{21}g_{11}g_{12}s_1 - b_{21}g_{11}g_{12}s_2 + b_{22}g_{11}g_{22}s_1 - b_{22}g_{12}g_{21}s_2}{b_{21}b_{32}g_{11}g_{22} - b_{21}b_{32}g_{12}g_{21} - b_{22}b_{31}g_{11}g_{22} + b_{22}b_{31}g_{12}g_{21}} \right) + \left( \frac{a_{23}b_{32}g_{11}g_{22} - a_{23}b_{32}g_{12}g_{21} - a_{33}b_{22}g_{11}g_{22} + a_{33}b_{22}g_{12}g_{21}}{b_{21}b_{32}g_{11}g_{22} - b_{21}b_{32}g_{12}g_{21} - b_{22}b_{31}g_{11}g_{22} + b_{22}b_{31}g_{12}g_{21}} \right);$$

$$k_{14}^p = \left( \frac{g_{11}g_{12}k_{22}^{1p}s_1}{g^+} - \frac{g_{11}g_{22}k_{12}^{1p}s_1}{g^+} - \frac{g_{11}g_{12}k_{22}^{1p}s_2}{g^+} + \frac{g_{12}g_{21}k_{12}^{1p}s_2}{g^+} + \frac{a_{14}g_{11}g_{22}k_{11}^{1p}}{g^+} - \frac{a_{14}g_{12}g_{21}k_{11}^{1p}}{g^+} \right);$$

$$k_{21}^p = a_{11}k_{21}^{1p} + k_{21}^{1p} \left( \frac{g_{12}g_{21}s_1}{g^+} - \frac{g_{11}g_{22}s_2}{g^+} \right) - k_{11}^{1p} \left( \frac{g_{21}g_{22}s_1}{g^+} - \frac{g_{21}g_{21}s_2}{g^+} \right) - \frac{a_{21}b_{31}}{b^+} + \frac{a_{31}b_{21}}{b^+};$$

$$k_{22}^p = \left( \frac{g_{11}g_{22}k_{22}^{1p}}{g^+} - \frac{g_{12}g_{21}k_{22}^{1p}}{g^+} + \frac{a_{12}g_{11}g_{22}k_{21}^{1p}}{g^+} - \frac{a_{12}g_{12}g_{21}k_{21}^{1p}}{g^+} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{b_{31}g_{12}g_{21}s_1 - b_{31}g_{11}g_{22}s_2 + b_{32}g_{21}g_{22}s_1 - b_{32}g_{21}g_{22}s_2}{b_{21}b_{32}g_{11}g_{22} - b_{21}b_{32}g_{12}g_{21} - b_{22}b_{31}g_{11}g_{22} + b_{22}b_{31}g_{12}g_{21}} \right) + \\
& + \left( \frac{a_{22}b_{31}g_{11}g_{22} - a_{22}b_{31}g_{12}g_{21} - a_{32}b_{21}g_{11}g_{22} + a_{32}b_{21}g_{12}g_{21}}{b_{21}b_{32}g_{11}g_{22} - b_{21}b_{32}g_{12}g_{21} - b_{22}b_{31}g_{11}g_{22} + b_{22}b_{31}g_{12}g_{21}} \right); \\
k_{23}^p & = \left( \frac{a_{13}g_{11}g_{22}k_{21}^{1p}}{g^+} - \frac{a_{13}g_{12}g_{21}k_{21}^{1p}}{g^+} + \frac{a_{43}g_{11}g_{22}k_{22}^{1p}}{g^+} - \frac{a_{43}g_{12}g_{21}k_{22}^{1p}}{g^+} \right) + \\
& + \left( \frac{b_{21}g_{12}g_{21}s_1 - b_{21}g_{11}g_{22}s_2 + b_{22}g_{21}g_{22}s_1 - b_{22}g_{21}g_{22}s_2}{b_{21}b_{32}g_{11}g_{22} - b_{21}b_{32}g_{12}g_{21} - b_{22}b_{31}g_{11}g_{22} + b_{22}b_{31}g_{12}g_{21}} \right) + \\
& + \left( \frac{-a_{23}b_{31}g_{11}g_{22} + a_{23}b_{31}g_{12}g_{21} + a_{33}b_{21}g_{11}g_{22} - a_{33}b_{21}g_{12}g_{21}}{b_{21}b_{32}g_{11}g_{22} - b_{21}b_{32}g_{12}g_{21} - b_{22}b_{31}g_{11}g_{22} + b_{22}b_{31}g_{12}g_{21}} \right); \\
k_{24}^p & = \left( \frac{g_{12}g_{21}k_{22}^{1p}s_1}{g^+} - \frac{g_{21}g_{22}k_{12}^{1p}s_1}{g^+} - \frac{g_{11}g_{22}k_{22}^{1p}s_2}{g^+} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{g_{21}g_{22}k_{12}^{1p}s_2}{g^+} + \frac{a_{14}g_{11}g_{22}k_{21}^{1p}}{g^+} - \frac{a_{14}g_{12}g_{21}k_{21}^{1p}}{g^+} \right); \\
& \quad g^+ = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \neq 0.
\end{aligned}$$

**Численное моделирование.** Воспользуемся для моделирования бокового движения ЛА числовыми значениями матриц коэффициентов из [2]. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} & = \begin{pmatrix} -0,152 & 0,4226 & 0,9063 & 0,096 \\ -18,643 & -1,06 & -1,6 & 0 \\ -1,757 & -0,153 & -0,136 & 0 \\ 0 & 1 & -0,4663 & 0 \end{pmatrix}; \\
\mathbf{B} & = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1,874 & -8,966 \\ -1,46 & 0,304 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Для указанных числовых значений объекта управления имеет место следующее множество собственных значений (множество полюсов):

$$\{-0,6381 \pm 3,0086i; -0,0359 \pm 0,0244i\}.$$

Структура полюсов модели не позволяет ввести для них известную классификацию форм бокового движения: боковое колебательное движение рыскания, быстрое аperiodическое движение крена, медленное спиральное движение крена. Рассматриваемая числовая модель, как указано в [2], представляет собой устойчивый процесс, однако в силу малости модуля действительной части одного из корней модели можно

говорить о практической колебательной нейтральности рассматриваемого взаимосвязанного бокового движения.

Пусть задачей синтеза является формирование алгоритмов функционирования системы управления, которая осуществит перемещение полюсов для модели из точек множества  $\{-0,6381 \pm 3,0086i; -0,0359 \pm 0,0244i\}$  в точки множества

$$\{-3,5; -0,95; -1,9; -1,9\} \quad (37)$$

с помощью аналитически синтезированного закона управления (20) и параметризованного закона (35), который подбором матриц  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{G}$  обеспечивает минимум суммы всех элементов, взятых по модулю матрицы коэффициентов обратной связи  $\mathbf{K}^p$ .

Для желаемого множества полюсов (37) выражения (19) можно записать в виде

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} -3,5 & 0 \\ 0 & -0,95 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} -1,9 & 0 \\ 0 & -1,9 \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя (4)–(13) и матрицу (36), получаем

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,9683 & -0,0154 & -3,3092 & 1,2458 \\ 1,8620 & -0,2098 & 0,5289 & -0,2328 \end{pmatrix}$$

и

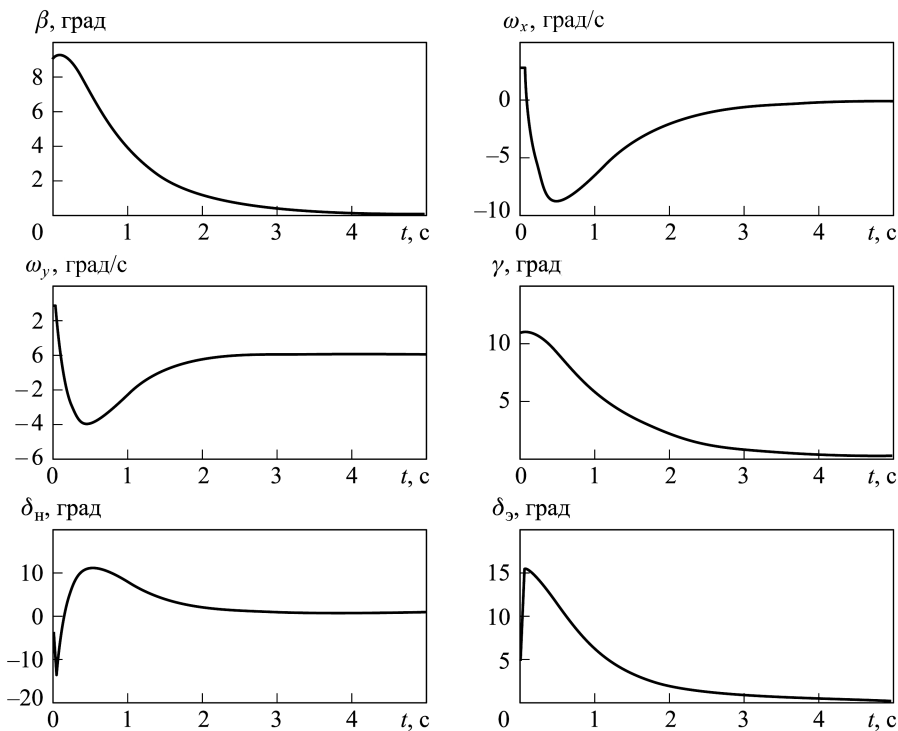
$$\mathbf{K}^p = \begin{pmatrix} k_{11}^p & k_{11}^p & k_{11}^p & k_{11}^p \\ k_{11}^p & k_{11}^p & k_{11}^p & k_{11}^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0736 & -0,0164 & -1,9599 & 0,4259 \\ 0,00009 & -0,4473 & -0,0036 & 0,1386 \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы собственной динамики в замкнутом контуре “ЛА–система управления” принимают вид

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{pmatrix} -0,1520 & 0,4226 & 0,9063 & 0,0960 \\ -5,6372 & -2,9698 & -3,0594 & 0,2473 \\ -5,1968 & -0,1116 & -5,1282 & 1,8896 \\ 0 & 1 & -0,4663 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK}^p = \begin{pmatrix} -0,1520 & 0,4226 & 0,9063 & 0,0960 \\ -18,5052 & -5,1011 & -5,3054 & 2,0408 \\ -1,6496 & -0,0409 & -2,9964 & 0,5797 \\ 0 & 1 & -0,4663 & 0 \end{pmatrix}.$$

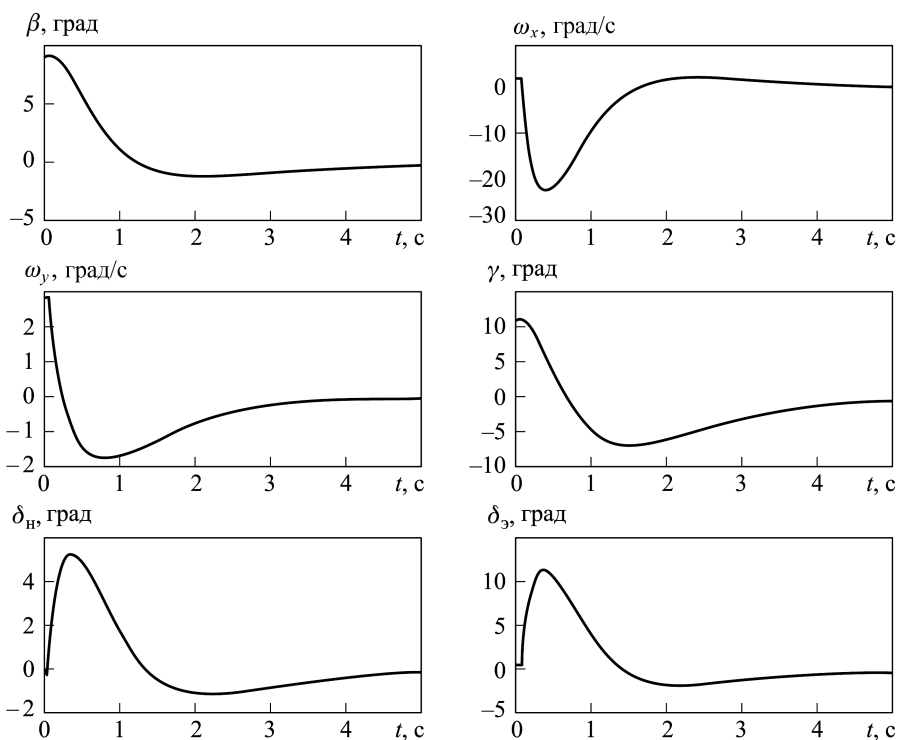
Для начальных значений вектора состояния ЛА в системе единиц СИ  $(\beta \ \omega_x \ \omega_y \ \gamma)^T = (0,158 \ 0,04638 \ 0,0493 \ 0,189)^T$  на



**Рис. 1. Графики переходных процессов по компонентам вектора состояния и затраты на управление для непараметризованного закона управления**

рис. 1 и 2 приведены графики переходных процессов по компонентам вектора состояния и затраты на управление. Видно, что для параметризованного закона управления, обеспечивающего минимум суммы всех элементов, взятых по модулю матрицы коэффициентов обратной связи  $\mathbf{K}^p$ , затраты на управление существенно меньше, чем для непараметризованного закона. При этом время переходного процесса в первом и во втором случаях приблизительно одинаково.

**Заключение.** Для линеаризованной модели бокового движения летательного аппарата получены аналитические выражения законов управления и построена полная их параметризация. В основу синтеза положена оригинальная декомпозиция объекта управления и метод модального управления МИМО-системой. Приведены результаты моделирования управления боковым движением летательного аппарата с использованием аналитически синтезированных обычного и параметризованного законов управления, обеспечивающих минимум нормы матрицы коэффициентов обратной связи. Показаны преимущества в затратах на управление для параметризованного закона управления, обеспечивающих минимум суммы всех элементов, взятых по модулю матрицы коэффициентов обратной связи. Соответственно, как сами законы управления, так и их параметризацию для бокового движения ЛА можно получить как с использованием обобщенной формулы



**Рис. 2. Графики переходных процессов по компонентам вектора состояния и затраты на управление для параметризованного закона управления**

Аккермана [8], так и с использованием ленточной формулы синтеза [9, 10], однако этот процесс поиска более сложен и аналитический вид выражений законов управления существенно более громоздок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.
2. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
3. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 1. С. 92–108.
4. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 2. С. 118–132.
5. Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Pole placement for controlling a large scale power system // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72:10. P. 2123–2146.
6. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Синтез законов управления космическим аппаратом, обеспечивающих оптимальное размещение полюсов замкнутой системой управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 3. С. 98–111.
7. Применение алгоритма точного размещения полюсов при решении задач наблюдения и идентификации в процессе управления движением космического аппарата / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко, С.Н. Тимаков // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 1. С. 135–151.

8. *Синтез* стабилизирующего управления космическим аппаратом на основе обобщенной формулы Аккермана / Е.А. Воробьева, Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко, С.Н. Тимаков // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 96–106.
9. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Lentочные формулы анализа и синтеза управляемых динамических МИМО-систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 3. С. 3–15.
10. *Разгрузка* кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа / А.В. Богачев, Е.А. Воробьева, Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко, С.Н. Тимаков // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 3. С. 132–139.

## REFERENCES

- [1] Bukov V.N. *Adaptivnye prognoziruyushchie sistemy upravleniya poletom* [Adaptive predictive flight control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1987.
- [2] Bukov V.N. *Vlozhenie sistem. Analiticheskiy podkhod k analizu i sintezu matrichnykh sistem* [Inclusion of systems. Analytical approach to analysis and synthesis of matrix systems]. Kaluga, N.F. Bochkareva's Publ., 2006.
- [3] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Synthesis of decoupling laws for attitude stabilization of a spacecraft. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, pp. 80–96.
- [4] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Modification the Exact Pole Placement Method and Its Application for the Control of Spacecraft Motion. *J. of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, pp. 279–292.
- [5] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Pole placement for controlling a large scale power system. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72:10, pp. 2123–2146.
- [6] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Synthesis of Controls for a Spacecraft that Optimize the Pole Placement of the Closed Loop Control System. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, pp. 431–444.
- [7] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N., Timakov S.N. The Use of the Exact Pole Placement Algorithm for the Control of Spacecraft Motion. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, pp. 129–144.
- [8] Zubov N.E., Vorob'eva E.A., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N., Timakov S.N. Synthesis of Stabilizing Spacecraft Control Based on Generalized Ackermann's Formula. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2011, vol. 50, pp. 93–103.
- [9] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Band Formulas for Analysis and Synthesis of Controlled Dynamic MIMO Systems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2014, no. 3, pp. 3–15 (in Russ.).
- [10] Bogachev A.V., Vorob'eva E.A., Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N., Timakov S.N. Unloading Angular Momentum for Inertial Actuators of a Spacecraft in the Pitch Channe. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2011, vol. 50, pp. 483–490.

Статья поступила в редакцию 15.07.2015

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра РКК “Энергия” им. С.П. Королёва (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4-а), профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Zubov N.E. — Dr. Sci. (Eng.), Deputy Director for Science, Research and Development Center, S.P.Korolev Rocket and Space Corporation Energia (ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Professor of Automatic Control Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, первый заместитель генерального конструктора РКК “Энергия” им. С.П. Королёва (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4-а), заведующий кафедрой “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Mikrin E.A. — Dr. Sci. (Eng.), First Deputy of Chief Designer, Research and Development Center, S.P.Korolev Rocket and Space Corporation Energia (ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Head of Automatic Control Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра РКК “Энергия” им. С.П. Королёва (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4-а), профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Ryabchenko V.N. — Dr. Sci. (Eng.), Leading Researcher, Research and Development Center, S.P.Korolev Rocket and Space Corporation Energia (ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Professor of Automatic Control Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Поклад Максим Николаевич — канд. тех. наук, доцент кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Poklad M.N. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Automatic Control System Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Поклад М.Н. Параметризация аналитических законов управления боковым движением летательного аппарата // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 2. С. 3–17.  
DOI: 10.18698/0236-3933-2016-2-3-17

**Please cite this article in English as:**

Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N., Poklad M.N. Parameterization of analytic control laws for aircraft lateral motion. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 2, pp. 3–17. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-2-3-17