

## ДИНАМИКА НЕЧЕТКОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Н.П. Деменков, И.А. Мочалов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

e-mail: dnp@bmstu.ru; intelsyst@mail.ru

*Рассмотрена система автоматической оптимизации объекта управления типа нелинейность–линейность, линейная часть которого описывается нечетким дифференциальным уравнением первого порядка, а в качестве управляющего органа применяется экстремальный регулятор с запоминанием экстремума. Использован точный метод расчета переходных процессов в координатах вход–выход путем решения соответствующего нечеткого нелинейного дифференциального уравнения. Предположено, что его нечеткость обусловлена нечеткостью динамического параметра к начальным условиям. Приведены результаты моделирования.*

**Ключевые слова:** система автоматической оптимизации, объект управления, экстремальный регулятор, нечеткое дифференциальное уравнение, функция принадлежности, нечеткая начальная задача.

## FUZZY SYSTEM DYNAMICS OF AUTOMATIC OPTIMIZATION

N.P. Demenkov, I.A. Mochalov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

e-mail: dnp@bmstu.ru; intelsyst@mail.ru

*The automatic optimization system of the nonlinearity–linearity type plant is considered. Its linear part is described by first-order fuzzy differential equation and the extremal controller with memorizing of extremum is used as a control organ. The exact method is used for the transient analysis in the input-output coordinates by solution of a corresponding fuzzy nonlinear differential equation. Its fuzziness is supposed to be caused by the dynamic parameter fuzziness with respect to the initial conditions. The simulation results are given.*

**Keywords:** automatic optimization system, plant, extremal controller, fuzzy differential equation, membership function, fuzzy initial task.

**Введение.** В автоматизированных системах управления технологических процессов часто возникают ситуации, когда требуется на экстремальном уровне поддерживать некоторый показатель качества работы динамической системы, зависящий от свойств объекта управления и действующих на него возмущений, а также выполнять стабилизацию относительно найденной точки экстремума. Такая задача возникает, например, при поддержании скорости полета, соответствующей минимуму расхода горючего на единицу длины пути самолета. Примерами систем экстремального регулирования также могут служить различные типы топок, аппараты для выпаривания соков, флотационные машины обогатительных фабрик, радиотехнические

устройства, объекты химической промышленности и металлургии, реактивные двигатели самолетов, ракет и т.д. Подобные системы в процессе работы должны обеспечивать достижение минимума или максимума функции качества при недостаточной априорной информации о характере ее изменений. Например, автоматизация блока котел – турбина на мощных тепловых станциях (1200...2400 МВт) должна обеспечивать устойчивую работу сложной системы, состоящей из группы основных объектов (котел – турбогенератор) и вспомогательных элементов, обслуживающих блок. Автоматическое управление при полной автоматизации блока может осуществляться с помощью экстремального управления, обеспечивающего условия эксплуатации при наивысшем значении коэффициента полезного действия всего блока. Система экстремального регулирования поддерживает максимальное значение КПД парового котла в различных режимах нормальной эксплуатации. Управляющее воздействие осуществляется путем воздействия на расход воздуха, подаваемого в топку. Экстремальный регулятор автоматически поддерживает такой расход воздуха, при котором температура в топке имеет максимальное значение.

Актуальность создания систем экстремального управления, или автоматического поиска экстремума (Extremum Seeking Control) можно проиллюстрировать на примере следующей задачи, характерной для любого производства. Экономическая эффективность производственного процесса оперативно оценивается подходящим экономическим показателем, например, текущей себестоимостью готовой продукции. Такая задача контроля текущей себестоимости на любом заводе решается соответствующими службами. Существуют стандартизованные методики расчета себестоимости, учитывающие инерционность технологического процесса путем расчета так называемого незавершенного производства. Это некоторая модель производства, как динамического объекта, управляемого по экстремальному критерию качества – себестоимости продукции. Однако указанная математическая модель весьма несовершенна, а применяемые методы, по меркам современной теории автоматического управления, вообще примитивны. Поэтому заводскую себестоимость учитывают, но оперативно управлять ею по результатам такого учета уже поздно. Можно привести и другие примеры задач экстремального управления производством, например, достижение максимума или минимума технологического показателя, характеризующего качество и сортность готовой продукции.

Для промышленных объектов обычно применяют простые, но надежные поисковые системы автоматической оптимизации (САО), в которые входит экстремальный регулятор (ЭР). Использование поисковой системы обусловлено воздействием на объект управления различного рода возмущений монотонного и случайного характера, а также наличием у объекта управления значительной инерционности. Эти

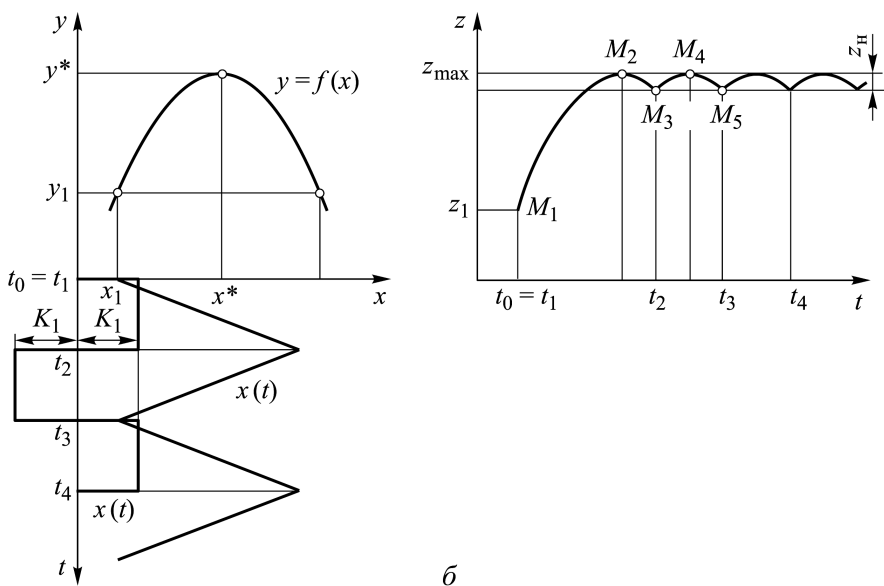
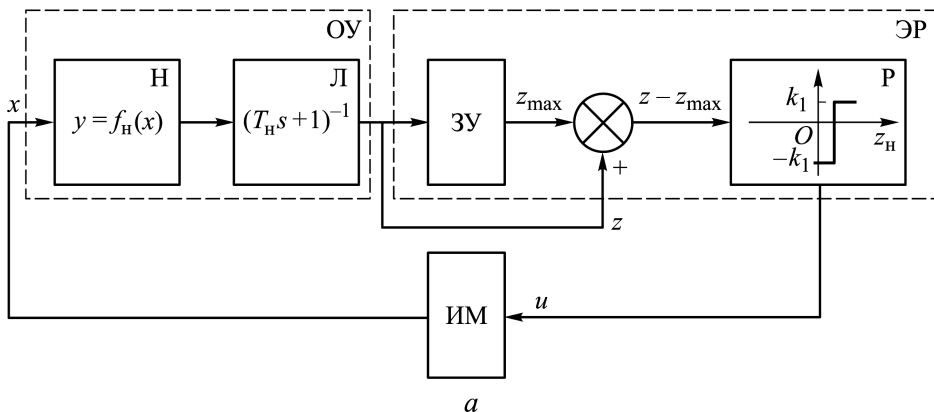
обстоятельства исключают применение традиционных систем управления и приводят к необходимости реализации поисковых САО.

Теория и практика адаптивных систем, в частности САО с ЭР достаточно хорошо изучена, и ее элементы входят в состав классических разделов по автоматическому управлению [1–3]. Однако неослабевающий интерес к задаче синтеза систем экстремального регулирования лишь подтверждает тот факт, что не решены многие практические вопросы, возникающие в рамках рассматриваемой проблемы. В настоящее время достигнуты значительные успехи в теории интеллектуальных систем, в частности, разработаны элементы теории нечеткого управления, нейронных сетей [4], предложены нейросетевые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных [5–7] и т.д. В связи с этим возникает необходимость решения традиционных задач управления путем применения новых достижений в теории решения нечетких дифференциальных уравнений.

Задача исследования переходных процессов в координатах вход–выход для нечеткой САО, в которой ЭР реализует принцип запоминания экстремума, а возмущения динамического параметра объекта управления и начальные условия представлены нечеткими переменными, решена ниже. Исследована модификация кратности системы управления при наличии нечеткости. Приведены результаты моделирования и выводы.

**Постановка задачи.** Рассмотрим объект управления, который имеет нелинейную часть в виде четкой характеристики  $y = f(x)$  и линейную часть, представляемую аperiodическим звеном первого порядка с нечеткой постоянной времени  $T_n$ . Наличие нечеткости моделирует возмущения в задании постоянной времени  $T$ . Для простоты рассмотрения будем полагать отсутствие каких-либо воздействующих на объект монотонных возмущений, которые деформируют характеристику  $f(x)$  и перемещают ее в координатной плоскости  $(x, y)$ . Для нахождения точки  $(x^*, y^*)$  оптимума зависимости  $y = f(x)$  используется ЭР с запоминанием экстремума  $z_{\max}$  [3], при котором система реагирует на разность наибольшего достигнутого в предыдущие моменты времени значения выхода и его текущего значения. В соответствии с этим алгоритмом исполнительный механизм (ИМ) имеет постоянную скорость перемещения  $\dot{x}_t = \pm K_1$ , где  $K_1$  — четкая константа скорости изменения входа, символ “ $\pm$ ” характеризует направление скорости ИМ, определяемое реле с зоной нечувствительности  $z_n$ . Это соответствует линейно изменяющемуся во времени  $t$  управляющему сигналу  $x(t) = x_0 \pm K_1 t$ , где  $x_0$  — начальная координата входа.

Структурная схема САО, состоящая из объекта управления типа нелинейность–линейность (Н–Л) и поискового ЭР с устройством для



**Рис. 1. Структурная схема САО (а) и временные диаграммы (б) ее функционирования при  $f_H = f$ ,  $T_H = T$ :**

ОУ — объект управления; ЗУ — запоминающее устройство; Р — регулятор

запоминания экстремума, приведена на рис. 1, а. Функционирование четкой САО ( $T_H = T$ ,  $z_{1H} = z_1$ ) представлено в виде временных диаграмм на рис. 1, б.

Цель настоящей работы — исследование нечеткой динамики (нечетких переходных процессов) в САО точными методами, когда  $T = T_H$ ,  $z_1 = z_{1H}$  являются нечеткими треугольными переменными и, следовательно,  $z = z_H$  представляет собой нечеткое отображение в координатах  $(x, z)$ . Кроме того, необходимо интерпретировать область взаимного пересечения  $z_H(x)$  друг с другом в нечетких терминах и сравнить их с четкими аналогами.

Новизна сформулированных задач заключается в обобщении классических результатов на нечеткий случай и новой их интерпретации.

Для этого используются достижения в области теории решения нечеткой начальной задачи [6–12].

В работе приняты следующие обозначения: нечеткие переменные имеют нижний индекс “н”, например  $\varphi_n(t)$ , нечеткое решение Баклей – Фейринга (Buckley – Feuring solution, BF)  $\varphi_n^{BFS}(x)$ , нечеткое решение Сейккалы (Seikkala solution)  $\varphi_n^{SS}(x)$ .

**Основные положения теории решения нечеткой начальной задачи.** Для дальнейших исследований использованы следующие определения и утверждения теории нечетких множеств, связанные с решением нечетких обыкновенных дифференциальных уравнений и изложенные в работах [6–12].

В теории нечетких множеств обозначение формализуется с помощью функции принадлежности,  $x = x_n \in X$  для нечеткого элемента  $x_n$  определяется следующим образом:

$$r(x) = \begin{cases} \underline{r}(x) \in [0; 1] \\ \bar{x} \in [0; 1], \end{cases}$$

где  $r(x)$  — многозначная функция;  $\underline{r}(x)$  — левая ветвь;  $\bar{r}(x)$  — правая ветвь относительно  $r(x) = 1$ . Для  $r(x)$  часто используется его уровневое представление в виде обратного отображения  $r^{-1}(x) = x = x(r) = (\underline{x}(r), \bar{x}(r) | \in [0; 1])$ . Совокупность  $\{x_n\}$  задает нечеткое множество  $X_n$ .

В зависимости от формы  $r(x)$  нечеткие числа подразделяются на треугольные  $x_n$ , обобщенные  $y_n$ , сильные (strong)  $u_n$ , слабые (weak)  $\gamma_n$ , одиночные (sington)  $z_n$ .

Нечеткое треугольное число  $x_n$  с функцией принадлежности  $r(x)$  задается тремя числами  $a_1 < a_2 < a_3$ ,  $a_i \in R_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Нечеткое обобщенное число  $y_n$  определяется аналогично числу  $x_n$ , но отличается от него кусочно-нелинейным типом зависимости  $r(y)$ . Относительно зависимости  $r(y)$  полагается, что функция  $\underline{r}(y)$  полунепрерывна сверху, функция  $\underline{r}(y)$  монотонно возрастает, функция  $\bar{r}(y)$  монотонно убывает, для обратных отображений  $\underline{y}(r) \leq \bar{y}(r)$ . Если хотя бы одно из перечисленных выше свойств относительно  $r(y)$  не выполняется, то число  $y_n$  не является нечетким. В частности, если зависимость  $r(y)$  имеет в основании один из углов больше  $90^\circ$ , то число  $y_n$  не является нечетким.

Нечеткое сильное число  $u_n$  имеет зависимость всегда с острыми углами при ее основании, в этом случае  $u_n = x_n = y_n$ .

Нечеткое слабое число  $\gamma_n$  появляется, когда один из углов в основании зависимости  $r(y)$  больше  $90^\circ$ , поэтому не выполняется условие  $\underline{\gamma}(r) \leq \bar{\gamma}(r)$ . Тогда используется модификация

$$\gamma_n = (\min\{\underline{\gamma}(r), \bar{\gamma}(r), \gamma(r) = 1\}, \max\{\underline{\gamma}(r), \bar{\gamma}(r), \gamma(r) = 1\}) | r \in [0; 1]),$$

которую принято называть слабым нечетким числом. Возникновение таких чисел связано с различными нелинейными преобразованиями над сильными числами при решении нечетких систем линейных алгебраических уравнений, нелинейных дифференциальных уравнений и т.д.

Нечеткое одиночное число  $z_n$  возникает при необходимости представления четкого числа в нечетких терминах. Тогда функция  $r(z)$  равна

$$r(z) = (\underline{r}(z) = \bar{r}(z) | r \in [0; 1]) \Leftrightarrow r^{-1}(z) = (\underline{z}(r) = \bar{z}(r) | r \in [0; 1]).$$

Нечеткое отображение  $y_n(x)$  устанавливает соотношение между нечеткой областью  $x_n$  и нечеткой областью  $y_n$  с функцией принадлежности  $r_y(x)$ :  $X \supset x_n \xrightarrow{r_y(x)} y_n \in Y_n$ , где  $x_n$  и  $y_n$  — нечеткие вектора.

Банахово пространство нечетких переменных [9] вводится в соответствии с подходом, принятым в работе [12]. Для этого в совокупности  $\{x_{in}\}$  задаются операции:

1) сложения (+)  $x_{in}$  и  $y_{in}$  в виде  $x_{in} + y_{in} = (\underline{x}_i(r) + \underline{y}_j(r), \bar{x}_i(r) + \bar{y}_j(r) | r \in [0; 1])$ ;

2) умножения ( $\times$ )  $x_{in}$  на скаляр  $k \in R_i$  по правилу

$$k \times x_{in} = \begin{cases} (k + \underline{x}_i(r), k + \bar{x}_i(r) | r \in [0; 1]), & k \geq 0, \\ (k + \bar{x}_i(r), k + \underline{x}_i(r) | r \in [0; 1]), & k < 0; \end{cases}$$

3) существования у числа  $x_{in}$  обратного элемента  $x_{kn} = x_{in} + x_{kn} \equiv 0 \Leftrightarrow r_k(x) = r_i(-x)$ .

Относительно операций сложения и умножения выполняются аксиомы: коммутативность и ассоциативность для операции сложения; дистрибутивность для операции умножения. Поэтому совокупность  $\{x_{in}\}$  с существованием обратного элемента образует векторное пространство  $X_n$ , в котором определим матрицу  $S(x_{in}, x_{jn}) = \sup_r [\max(|\underline{x}_i(r) - \bar{x}_j(r)|, |\bar{x}_i(r) - \underline{x}_j(r)|)]$  и норму  $\|x_{in} - x_{jn}\| = S(x_{in}, x_{jn})$ , а также нечеткую последовательность Коши  $\{x_{nn}\}$ :  $S(x_{nn}, x_{mn})_{n,m \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  и полноту  $X_n$ :  $x_{nnn \rightarrow \infty} \rightarrow x_n, x_n \in X_n$ .

В результате получим банахово пространство нечетких переменных  $(X_n, S)$ . Задавая различным способом матрицу  $S$ , например, способом Хаусдорфа, Хакахары и другими, можно получить множество  $X_n$  различной структуры.

Нечеткая производная определяется путем нахождения для некоторой нечеткой переменной операций вычитания ( $-$ ), умножения на константу ( $\times$ ), предельного перехода ( $\lim$ ). В зависимости от способа их задания используются следующие нечеткие производные: Гойтшела – Воксмана (Goestshel – Voxman, GV)  $\dot{y}_{=n}^{GV}(x)$ ; Сейккалы  $\dot{y}_n^S(x)$ ; Дюбуа – Праде (Dubois – Prade, DP)  $\dot{y}_n^{DP}(x)$ ; Пури – Ралеску (Puri – Rolescu, PR)  $\dot{y}_n^{PR}(x)$ ; Кэндела – Фридмана – Минго (Kandel – Friedman – Ming, KFM)  $\dot{y}_n^{KFM}(x)$ . Справедливо утверждение: если переменные производные

существуют при  $x = x_*$  и непрерывны в этой точке, то все производные при  $x = x_*$  равны между собой.

*Нечеткая начальная задача* рассматривается лишь для нечетких производных  $\dot{y}_H^S(x)$ ,  $\dot{y}_H^{PR}(x)$ ,  $\dot{y}_H^{KFM}(x)$ , так как для нечетких производных  $\dot{y}_H^{GV}(x)$ ,  $\dot{y}_H^{DP}(x)$  при  $x = x_*$  возможна ситуация, когда эти производные не являются нечеткими числами, т.е. один из углов их функций принадлежности относительно основания больше  $90^\circ$ . В остальных случаях производные всегда существуют, поскольку при  $x = x_*$  также используются слабые числа.

Пусть есть четкая начальная задача, описываемая уравнением первого порядка

$$\dot{y} = f(x, y, k), \quad (1)$$

где  $y(x=0) = c = \text{const}$ ,  $k = (k_1, \dots, k_n)$  — вектор параметров. Для задачи (1) выполнены все условия существования и единственности, тогда  $y = g(x, k, c)$  представляет собой решение уравнения (1).

Вектор параметров  $k$  и константа  $c$  — неточно заданные, т.е. неопределенные. Представим эту неопределенность нечеткими треугольными числами, для чего заменим параметр  $k_i$  параметром  $k_{iH}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а параметр  $c$  — параметром  $c_H$ , получим

$$\dot{y}_H = f(x, y_H, k_H). \quad (2)$$

Здесь  $y_H(x=0) = c_H$ ;  $\dot{y}_H$  — некоторая нечеткая производная.

*Типы нечетких решений* задачи (2) определяются типом производной: решение Сейккалы  $y_H^{SS}(x)$ ; решение Пури–Ралеску  $y_H^{PRS}(x)$ ; решение Кэндела–Фридмана–Минго  $y_H^{KFMS}(x)$ .

Пусть существует решение Сейккалы  $y_H^{SS}(x)$ , тогда также вводится решение Баклей–Фейринга  $y_H^{BFS}(x)$ , существующее при одновременном выполнении условий

$$\dot{f}_y > 0, \quad \dot{g}_c > 0, \quad \dot{f}_{k_i} \dot{g}_{k_i} > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где  $f(\cdot)$  — правая часть уравнения (1);  $g(\cdot)$  — решение уравнения (1);  $k_i$  — компоненты вектора  $k$ . Условия (3) эквивалентны условиям одновременного возрастания  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  относительно параметров.

Взаимосвязь нечетких решений следует из следующей теоремы (без доказательства): если существует решение  $y_H^{SS}(x)$ , то  $y_H^{BFS}(x) = y_H^{SS}(x)$ . Если хотя бы одно из условий (3) не выполняется, то  $y_H^{BFS}(x) \neq y_H^{SS}(x)$  и решения  $y_H^{BFS}(x)$  не существует.

Имеют место следующие теоремы (без доказательств).

**Теорема 1.** *Если уравнение (1) имеет решение, то существует решение  $y_H^{SS}(x)$  и оно находится из системы уравнений*

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, \underline{y}, \underline{k}, \bar{y}, \bar{k}); \\ \dot{\bar{y}}(x) = f(x, \underline{y}, \underline{k}, \bar{y}, \bar{k}); \\ \underline{y}(x=0) = \underline{c}, \quad \bar{y}(x=0) = \bar{c}, \end{cases} \quad (4)$$

зде  $k_{\text{н}} = (\underline{k}(r), \overline{k}(r) | r \in [0; 1])$ ,  $c_{\text{н}} = (\underline{c}(r), \overline{c}(r) | r \in [0; 1])$ ,  $y_{\text{н}}(x) = (\underline{y}(x, r), \overline{y}(x, r) | r \in [0; 1])$ .

**Теорема 2.** Если существует  $y_{\text{н}}^{SS}(x)$ , то  $y_{\text{н}}^{PRS}(x) = y_{\text{н}}^{SS}(x)$ .

**Теорема 3.** Если существует  $y_{\text{н}}^{SS}(x)$ , то  $y_{\text{н}}^{KFMS}(x) = y_{\text{н}}^{SS}(x)$ .

Алгоритм решения уравнения (2) следует из перечисленных выше теорем. Первоначально решается уравнение (1), которое обозначается как  $y = g(x, k, c)$ . Для правой части уравнения (1)  $f(x, y, k)$  выполняется процедура фазификации ( $fz$ ) для четких параметров  $k$ ,  $c$  и  $y(x)$ . Это приводит к уравнению (2). Для него определяется существование решения  $y_{\text{н}}^{BFS}(x)$  путем проверки условий (3). Если условия (3) выполняются, то решение существует, а также существуют решения  $y_{\text{н}}^{PRS}(x)$  и  $y_{\text{н}}^{KFMS}(x)$ . При этом решение  $y_{\text{н}}^{BFS}(x)$  имеет вид:  $y_{\text{н}}^{BFS}(x) = (\min_r g(x, k_{\text{н}}(r), c_{\text{н}}(r)), \max_r g(x, k_{\text{н}}(r), c_{\text{н}}(r)) | r \in [0; 1])$ .

Если хотя бы одно из условий (3) не выполняется, то решение  $y_{\text{н}}^{BFS}(x)$  не существует и ищется решение  $y_{\text{н}}^{SS}(x)$  из системы уравнений (4). При существовании решения  $y_{\text{н}}^{SS}(x)$  существуют и решения  $y_{\text{н}}^{PRS}(x)$  и  $y_{\text{н}}^{KFMS}(x)$ . Если решения  $y_{\text{н}}^{SS}(x)$  не существует, то не существует решения (2). Таким образом, имеет место следующая схема:

$$\left. \begin{array}{l} \exists \text{BFS}(2) \Rightarrow \exists \text{SS}(2) \\ \exists \text{BFS}(2) \Rightarrow \exists \text{SS}(2) \\ \exists \text{SS}(2) \neq \Rightarrow \exists \text{BFS}(2) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \text{BFS} \Leftrightarrow \exists \text{SS}.$$

**Метод решения.** Для CAO в соответствии со схемой и диаграммами, представленными на рис. 1, запишем

$$T_{\text{н}} \dot{z}_{\text{н}}(t) + z_{\text{н}}(t) = f(x(t)), \quad z(t = t_1) = z_{1\text{н}}; \quad (5)$$

$$u = K_1 \text{sign}(z - z_{\text{max}} + z_{\text{н}}); \quad (6)$$

$$\dot{x}_t = \pm K_1. \quad (7)$$

Уравнение (5) – модель объекта управления типа Н–Л, уравнение (6) – модель ЭР, уравнение (7) – модель ИМ.

Исключив время  $t$  и приняв для определенности  $y = f(x) = -kx^2$ ,  $x \in [x_0, x_n]$ , получим в координатах  $(x, z)$  нечеткую начальную задачу, которая будет подобна уравнению (2):

$$\pm K_1 T_{\text{н}} \dot{z}_{\text{н}}(x) + z_{\text{н}}(x) = -kx^2, \quad z(z(t = t_1) = x_1) = z_{1\text{н}}, \quad (8)$$

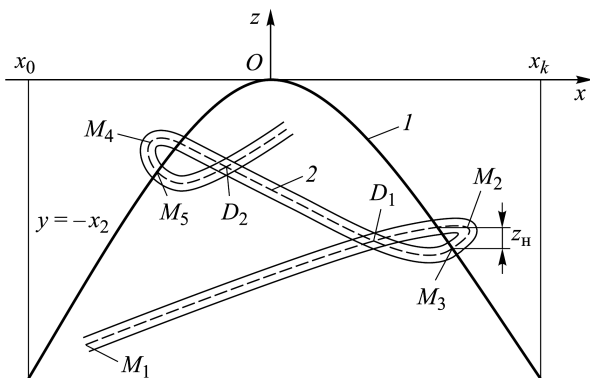
где  $\dot{z}_{\text{н}}(x)$  – некоторая нечеткая производная.

В соответствии с алгоритмом решения для уравнения (8) необходимо определить тип решения, решив для этого соответствующую четкую начальную задачу с параметрами  $T_{\text{н}} = T$ ,  $z_{1\text{н}} = z_1$ :

$$\pm K_1 T \dot{z}(x) + z(x) = -kx^2, \quad z(x = x_1) = z_1, \quad (9)$$

далее по условию (3) определить какие типы решений ( $y_{\text{н}}^{BFS}(x)$  или  $y_{\text{н}}^{SS}(x)$ ) имеют место для уравнения (8) с построением нечеткой зависимости  $z_{\text{н}}(x)$  при  $x \in [x_0, x_l] \subset R_1$ .





**Рис. 2.** Траектория движения САО на фазовой плоскости вход–выход  $(x, z)$  объекта управления для нечеткой (1) и четкой (2) САО

Исследования относительно решений  $y_H^{BFS}(x)$  или  $y_H^{SS}(x)$  проводим в несколько этапов. Далее будем отождествлять номер  $l$  этапа с номером переключения ИМ с помощью реле экстремального регулятора.

Траектория движения нечеткой САО на фазовой плоскости вход–выход объекта управления с характерными точками приведена на рис. 2.

**Этап 1** (кривые  $M_1M_2$ , см. рис. 2). Находим решение уравнения (9). Предположим, что ЭР включит ИМ на увеличение  $x(t)$  (см. рис. 1, б). Тогда в левой части уравнения (9) будет знак “+” и оно примет вид

$$\dot{z}_1 = \varphi(z_1, x, T) = -(K_1T)^{-1}z_1 - k(K_1T)^{-1}x^2, \quad z_1(x_1) = z_1, \quad (10)$$

где  $(x_1, z_1)$  – координаты точки  $M_1$ , задающие начальные условия уравнения.

Решение уравнения (10)

$$z_1(x) = g(x, z_1, T) = C_1 e^{-(K_1T)^{-1}x} - k(x^2 - 2K_1Tx + 2K_1^2T^2), \quad (11)$$

где  $C_1 = e^{-(K_1T)^{-1}x} [z_1 + k(x_1^2 - 2K_1Tx_1 + 2K_1^2T^2)]$  – константа интегрирования, получаемая из начальных условий  $(x_1, z_1)$ .

Проверяем условие (3) существования решения  $z_H^{BFS}(x)$  относительно  $T$ :

$$\dot{\varphi}_{z_1}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial z_1} [-(K_1T)^{-1}z_1 - k(K_1T)^{-1}x^2] = -(K_1T)^{-1} < 0,$$

так как  $K_1 > 0$  и  $T > 0$ . Одно из условий (3) не выполняется, поэтому независимо от знаков остальных условий решения  $z_H^{BFS}(x)$  не существует.

Ищем решение  $y_H^{SS}(x)$ . Для упрощения решения примем  $k = K_1 = 1$ , тогда в правой части уравнения (10) получим

$$\varphi(\cdot) = -(K_1T)^{-1}z_1 - k(K_1T)^{-1}x^2 = -T^{-1}z_1 - T^{-1}x^2, \quad T > 0.$$

Согласно свойствам арифметических операций в банаховом пространстве (умножение на отрицательную константу), имеем для решения  $z_{1H}^{SS}(x)$  нечеткую начальную задачу в виде системы дифференциальных уравнений [6]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1H}^{SS}(x) = \begin{cases} -T_H^{-1} z_{1H}^{SS}(x) - T_H^{-1} x^2 \\ z_{1H}^{SS}(x = x_1) = C_{1H} \end{cases} & \iff \begin{cases} \dot{z}_1(x) = -\underline{T}^{-1} z_1(x) - \underline{T}^{-1} x^2; \\ \dot{\bar{z}}_1(x) = -\overline{T}^{-1} \bar{z}_1(x) - \overline{T}^{-1} x^2; \\ z_1(x_1) = \underline{C}_1, \quad \bar{z}_1(x_1) = \overline{C}_1, \end{cases} \end{aligned}$$

или в матричной форме в соответствии с уравнением (4)

$$\dot{z}_{1H}^{SS}(x) = A z_{1H}^{SS}(x) + B x^2; \quad z_{1H}^{SS}(x = x_1) = C_{1H}. \quad (12)$$

Здесь  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\underline{T}^{-1} \\ -\overline{T}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = (-\underline{T}^{-1}, -\overline{T}^{-1})^T$ ,  $z_{1H}^{SS}(x) = (z_1, \bar{z}_1)^T$ ,  $C_{1H} = (\underline{C}_1, \overline{C}_1)^T$ . Решение уравнения (12) имеет вид

$$z_{1H}^{SS}(x) = z_{c1H}^{SS}(x) + z_{b1H}^{SS}(x), \quad (13)$$

где  $z_{c1H}^{SS}(x) = \Phi(x) C_{1H}$ ,  $z_{b1H}^{SS}(x) = \int_0^x \Phi(x - \tau) B \tau^2 d\tau$  — свободная и вы-

нужденная нечеткие составляющие решения, полученные на этапе 1;  $\Phi(x)$  — переходная матрица. В результате вычислений матриц  $\Phi(x)$ ,  $\Phi(x - \tau)$  общее решение соотношения (13) составит

$$\begin{aligned} z_{1H}^{SS}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \bar{z}_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & -\varepsilon^{-1} R_2 \\ -\varepsilon R_2 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{C}_1 \\ \overline{C}_1 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} x^2 - 2\overline{T}x + 2(\underline{T}\overline{T}) \\ (\overline{T}/\underline{T})x^2 - 2\underline{T}x + 2(\underline{T}\overline{T}) \end{pmatrix}. \quad (14) \end{aligned}$$

Здесь  $R_1 = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}$ ;  $R_2 = e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}$ ;  $\lambda = (\underline{T}\overline{T})^{1/2}$ ;  $\varepsilon = (\underline{T}\overline{T})^{1/2}$ ;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{C}_1 \\ \overline{C}_1 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(x = x_1) \begin{pmatrix} z_1 + x_1^2 - 2\overline{T}x_1 + 2\lambda^2 \\ \bar{z}_1 + \varepsilon^2 x_1^2 - 2\underline{T}x_1 + 2\lambda^2 \end{pmatrix}; \\ \Phi^{-1}(x = x_1) = |\Phi(x = x_1)|^{-1} \begin{pmatrix} R_1 & \varepsilon^{-1} R_2 \\ \varepsilon R_2 & R_1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$|\Phi(x = x_1)| = R_1^2(x = x_1) - R_2^2(x = x_1) = 4$ ;  $(x_1, z_{1H})$ ,  $z_{1H} = (z_1, \bar{z}_1)^T$  — координаты начальных условий для уравнения (12).

Качественный анализ зависимости (14) для решения  $z_{1H}^{SS}(x)$  позволяет выявить следующие ее свойства (см. рис. 2).

1. Нечеткая зависимость  $z_{1H}(x)$  совпадает с ее четким аналогом  $z_1(x)$  (11) при  $\underline{T} = \overline{T} = T$ ,  $\underline{C} = \overline{C} = C$ . Тогда  $\varepsilon = \varepsilon^{-1} = 1$ ,  $\lambda = (\underline{T}\overline{T})^{1/2} = T$ , что косвенно указывает на корректность преобразований при получении соотношения (14).

2. Вычисления показывают, что  $\delta(x) = |z_1(x) - \bar{z}_1(x)|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$ .

Перечисленные свойства означают, что поведение нечеткой  $z_{1H}^{SS}(x) = (z_1(x)|z_1(x)|\bar{z}_1(x))$  можно охарактеризовать поведением четкой зависимости  $z_1(x)$ , которая при фиксированном значении  $x$  окружена окрестностью  $O_1 S \delta(x)$ , увеличивающейся с возрастанием  $x$ .

Методика построения четкой траектории (кривая 2 на рис. 2) подробно изложена в работе [3]. Характерные точки  $M_1 - M_5$  определяются моментами переключения реле. Знак “+” реле — этап 1 четкой траектории, знак “-” реле — этап 2 и т.д. Нечеткие характеристики  $z_{iH}^{SS}(x)$  соответствующего  $i$ -го этапа изображены в виде совокупностей  $\{z_i(x, r), \bar{z}_i(x, r) | r \in [0; 1]\}$ . Для упрощения индекс “ $i$ ” на рис. 2 и далее опущен.

**Этап 2** (кривые  $M_2 M_3$  на рис. 2). Здесь ЭР включает ИМ на уменьшение  $x(t)$  (реверс  $x$ ). Тогда в левой части уравнения (9) будет знак — и оно примет вид

$$-\dot{z} = \varphi(z, x, T) = -(K_1 T)^{-1} z - k(K_1 T)^{-1} x^2, \quad z(x = x_2) = z_2, \quad z_2 > 0, \quad (15)$$

где  $(x_2, z_2)$  — координаты точки  $M_2$ , определяемые из соответствующего решения уравнения (13) этапа 1. Как и ранее, проверяем условие (3) существования решения  $z_H^{BFS}(x)$  на этапе 2. Для этого представляем уравнение (15) в эквивалентной стандартной форме при  $k = K_1 = 1$ :

$$\dot{z} = \varphi(z, x, T) = T^{-1} z + T^{-1} x^2, \quad z(x_2) = z_2, \quad z_2 > 0, \quad T > 0, \quad (16)$$

а его решение в виде

$$z(x) = g(x, z, T) = z_{c.в.} + z_в = z_2 e^{-T^{-1}x} + (-x^2 - 2Tx - 2T^2), \quad C_2 > 0. \quad (17)$$

Исследуем знаки величин  $\dot{\varphi}_z, \dot{g}_{z_2}, \dot{\varphi}_T$  и  $\dot{g}_T$ :

$$\dot{\varphi}_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (T^{-1} z + T^{-1} x^2) = T^{-1} > 0; \quad (18)$$

$$\dot{g}_{z_2} = \frac{\partial g}{\partial z_2} = \frac{\partial}{\partial z_2} (z_2 e^{-T^{-1}x} + (-x^2 - 2Tx - 2T^2)) = e^{-T^{-1}x} > 0; \quad (19)$$

$$\dot{\varphi}_T = \frac{\partial \varphi}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} (T^{-1} z + T^{-1} x^2) = -T^{-2} (z + x^2); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_T &= \frac{\partial g}{\partial T} = \\ &= \frac{\partial}{\partial T} (z_2 e^{-T^{-1}x} + (-x^2 - 2Tx - 2T^2)) = z_2 T^{-2} x e^{-T^{-1}x} - 2x - 4T = \\ &= (z_2 T^{-2} e^{-T^{-1}x} - 2)x - 4T, \quad x \in [x_0, x_1], \quad x_0 < 0, \quad x_1 > 0. \quad (21) \end{aligned}$$

Из уравнения (20) очевидно, что зависимость  $(z + x^2)$  разбивает плоскость  $(x, z)$  на две области: область 1, где  $(z + x^2) > 0$ , и область 2, где  $(z + x^2) \leq 0$ . Поэтому в области 1 имеем  $\dot{\varphi}_T < 0$ , а в области 2 —  $\dot{\varphi}_T > 0$  (см. рис. 2).

Для функции  $u(x) = \dot{g}_T(x)$  из уравнения (21) имеем следующие характерные точки:  $u(x)_{x \rightarrow 0} \rightarrow -4T < 0$ ;  $u(x = T) = 0,37z_2T^{-1} - 6T < 0$  для объекта со значительной инерционностью, когда постоянная времени  $T > (0,06z_2)^{1/2}$ ;  $u(x_1)_{x_1 \rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$ ;  $u(x_0)_{x_0 \rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$ ; уравнения  $u(x)$ ,  $\dot{u}(x)$  не имеют корней при  $x \in [x_0, x_1]$ , поэтому  $u(x) = \dot{g}_T(x) < 0$ .

Перечисленные свойства относительно функций (18)–(21) показывают, что в области 1  $\dot{\varphi}_T \dot{g}_T > 0$ ,  $\dot{\varphi}_z > 0$ ,  $\dot{g}_{z_2} > 0$ . Следовательно, в этой области существует решение

$$z_{\text{H}}^{BFS}(x) = (\underline{z}(x, r), \bar{z}(x, r) | r \in [0; 1]), \quad (22)$$

где  $\underline{z}(x, r) = z_2 e^{-\bar{T}^{-1}x} - x^2 - \underline{T}x - 2\underline{T}^2$ ;  $\bar{z}(x, r) = \bar{z}_2 e^{-\bar{T}^{-1}x} - x^2 - \underline{T}x - 2\underline{T}^2$ . В координатах  $(x, z)$  (кривые  $M_2M_3$  на рис. 2) для  $r \in [0; 1]$  зависимость  $z_{\text{H}}^{BFS}(x)$  представлена совокупностью кривых, равноудаленных относительно кривой при  $r = 1$ .

В области 2  $\dot{\varphi}_T \dot{g}_T < 0$ , т.е. условие (3) не выполняется, поэтому решения  $z_{\text{H}}^{BFS}(x)$  не существует, однако есть решение  $z_{\text{H}}^{SS}(x)$ , которое находится из системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\text{H}}^{SS}(x) = \begin{cases} T_{\text{H}}^{-1} z_{\text{H}}^{SS}(x) + T_{\text{H}}^{-1} x^2 \\ z_{\text{H}}^{SS}(x = x_1) = z_{3\text{H}} > 0 \end{cases} & \iff \begin{cases} \dot{\underline{z}}(x) = \underline{T}^{-1} \underline{z}(x) + \underline{T}^{-1} x^2; \\ \dot{\bar{z}}(x) = \bar{T}^{-1} \bar{z}(x) + \bar{T}^{-1} x^2; \\ \underline{z}(x) = \underline{z}_3, \bar{z}(x) = \bar{z}_3, \end{cases} \end{aligned}$$

или в матричной форме в соответствии с уравнением (4) по аналогии с уравнением (12) имеем

$$\dot{z}_{\text{H}}^{SS}(x) = Az_{\text{H}}^{SS}(x) + Bx^2, \quad z_{\text{H}}^{SS}(x = x_2) = z_{2\text{H}}, \quad (23)$$

где  $A = \begin{pmatrix} \underline{T}^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{T}^{-1} \end{pmatrix}$ ;  $B = (\underline{T}^{-1}, \bar{T}^{-1})^T$ ;  $z_{\text{H}}^{SS} = (\underline{z}, \bar{z})^T$ ;  $\dot{z}_{\text{H}}(x) = (\dot{\underline{z}}, \dot{\bar{z}})^T$ .

Решение матричного уравнения (23), полученное на этапе 2, будет иметь вид, аналогичный выражению (14) (в области 2 показано совокупностью кривых  $M_2M_3$ , см. рис. 2).

**Этап 3** (кривые  $M_3M_4$  на рис. 2). Происходит очередное переключение ИМ, в левой части уравнения (9) по аналогии с этапом 1 будет знак “+”, далее появится этап 4 (со знаком “-”) и т.д.

На этапе 1, когда ИМ увеличивает вход  $x(t)$  объекта управления (знак “+”), переходной процесс описывается совокупностью  $S$ -кривых. На этапе 2, когда ЭР переключает ИМ (знак “-”), тогда переходной процесс содержит  $BS$ - и  $S$ -кривые. На этапе 3 снова происходит переключение ИМ (знак “+”) и переходной процесс описывается

совокупностью  $S$ -кривых и т.д., т.е. на четном этапе — совокупности решений  $y_{\text{н}}^{BFS}(x)$  и  $y_{\text{н}}^{SS}(x)$ , на нечетном — только совокупность решений  $y_{\text{н}}^{SS}(x)$ .

**Множественная нечеткая САО.** При исследовании переходных процессов в линейных и нелинейных динамических системах, описываемых четкими дифференциальными уравнениями или системами, часто используется метод фазового пространства, который в двухмерном случае представляется фазовой плоскостью, а переходной процесс в ней — фазовой траекторией. Между состоянием динамической системы и фазовой траекторией существует взаимно-однозначное соответствие. В нечетком случае по аналогии с четким случаем будем полагать, что между нечетким состоянием и нечеткой фазовой траекторией также существует взаимно-однозначное соответствие. Это означает, что на фазовой плоскости переходной процесс отображается соответствующей нечеткой функцией (нечеткое отображение). Например, применительно к нечеткой САО с запоминанием экстремума нечеткие фазовые траектории на фазовой плоскости  $(x, z)$  отображаются нечеткой кривой  $M_1M_2$  (см. рис. 2).

При нарушении условия однозначного соответствия как в четком, так и нечетком случае возникают множественные системы [3]. В двухмерном случае это двукратная нечеткая система. Например, области  $D_1$  и  $D_2$  (см. рис. 2) являются пересечениями двух нечетких фазовых траекторий, поэтому для них не выполняется условие однозначного соответствия. Тогда фазовая плоскость — двулистная, на каждом листе изображается движение нечеткой САО при одном из состояний ИМ и далее эти листы “склеиваются”.

**Методика моделирования.** Последовательность решения задачи моделирования определяется решением следующих задач:

1) нахождение численного решения  $y_{\text{н}}^{SS}(x)$  или  $y_{\text{н}}^{BFS}(x)$  уравнений, определяемых номером этапов, которые связаны с направлением перемещения ИМ нечеткой САО;

2) определение граничных условий соответствующего типа уравнения при переходе от одного этапа расчетов к другому;

3) графическое представление нечетких фазовых траекторий на различных этапах, определение областей  $D_1$  и  $D_2$  и их параметров для неоднозначных фазовых траекторий нечеткой САО.

Для этапа 1, когда ЭР включил ИМ на увеличение входа  $x(t)$  и в левой части уравнения (9) будет знак “+”, задаются следующие исходные данные:  $k = K_1 = 1$ ;  $x \in [-8, 10]$ ;  $\Delta x = x_2 - x_1 = 0,1$ ;  $T_{\text{н}} = (\underline{T} = 95 \text{ с}; \bar{T} = 105 \text{ с})$ ;  $(x_1, z_1) = (-7; 15)$ ; зона нечувствительности реле  $z_{\text{н}} = 1$ . Для них соответствующая нечеткая фазовая траектория  $z_{\text{н}}^{SS}(x, r)$ ,  $r \in [0; 1]$  ( $z_{\text{н}}^{SS}(x, r)$ ,  $\bar{z}_{\text{н}}^{SS}(x, r)$ ), полученная на этапе 1, представлена кривой 1, а четкая фазовая траектория ( $z^S(x, r) = \bar{z}^S(x, r) = z(x, r = 1)$ ) — кривой 2 (см. рис. 2).

На этапе 2 из условия  $\text{sign}(z(x, r = 1) - z_{\max}(x, r = 1) + z_{\text{н}})$  определяется величина  $x_2$  переключения ЭР — знак “—” в уравнении (9), полученного на этапе 1 и  $z_{2\text{н}}^{SS}(\underline{z}_2, \bar{z}_2)$  из уравнений  $\underline{z}_2(x = x_2, r = 0)$ ,  $\bar{z}_2(x = x_2, r = 0)$  этапа 1 и далее находится решение  $z_{\text{н}}^{BFS}(x, r) = (\underline{z}^{BFS}(x, r), \bar{z}^{BFS}(x, r))$  из соотношения (22), принадлежащее области 1. Находятся граничные точки  $\underline{M}_3$  и  $\bar{M}_3$  из решения уравнений  $\bar{z}^{BFS}(x, r) = x^2 \iff (\underline{z}^{BFS}(x, r = 0) = x^2, \bar{z}^{BFS}(x, r = 0) = x^2)$ , которые являются нечеткими начальными условиями при нахождении решений  $z_{\text{н}}^{SS}(x)$  из уравнения (23). Далее графическим способом определяется область  $D_1$  неоднозначности нечетких фазовых траекторий нечеткой САО.

На этапе 3 аналогично предыдущему этапу определяется очередное переключение ЭР — знак “+” в уравнении (9) и соответствующие начальные условия из  $S$  нечеткой фазовой траектории этапа 2 (точка  $M_3$  на рис. 2). В результате находится решение  $z_{\text{н}}^{SS}(x)$  из уравнения (23) с обновленными нечеткими начальными условиями на этапе 3.

Далее выполняются аналогичные вычисления на этапах 4, 5 и т.д., определяемые моментами переключения ЭР.

**Выводы.** Приведены некоторые положения, связанные с теорией обыкновенных нечетких дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (нечеткая начальная задача). Для нее определены различные типы нечетких решений и их взаимосвязи. Выделены решения Сейккалы и Баклей–Фейринга нечеткой начальной задачи, найдены условия их существования и взаимосвязи.

Сформулирована задача по модификации четкой САО с запоминанием экстремума для инерционного объекта в соответствующий нечеткий аналог, обусловленный нечеткостью динамических параметров линейной части объекта управления.

В зависимости от направления перемещения входа поэтапно исследован тип нечеткой фазовой траектории системы управления. Показано, что при положительном перемещении входа имеет место нечеткая фазовая  $S$ -траектория, а при отрицательном перемещении входа траектория состоит из  $S$ - и  $BF$ -кривых.

Показано, что в нечетком случае имеет место нечеткая неоднозначность (нечеткая двукратность) фазовых траекторий в виде области, получаемой в результате пересечения двух фазовых  $S$ -траекторий. Результаты исследований подтверждены моделированием.

**Заключение.** Предложена методика исследования нечеткой САО с запоминанием экстремума для объекта управления с инерционностью на выходе. Представляет теоретический и практический интерес применение предложенного метода для исследования нечеткой системы с измерением производной статической характеристики инерционного объекта с запаздыванием, а также нечетких импульсных САО с оптимальными типами накоплений и обработкой текущих измерений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. М.: Наука, 1975.
2. *Растринин Л.А.* Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974.
3. *Казакевич В.В., Родов А.Б.* Системы автоматической оптимизации. М.: Энергия, 1977.
4. *Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления*; под ред. К.А. Пупкова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
5. *Otadi M., Mosleh M.* Numerical solution of quadratic Riccati differential equation by neural network // *Mathematical sciences*. 2011. Vol. 5. No. 3. P. 249–257.
6. *Buckley J.J., Feuring T.* Universal approximators for fuzzy functions // *Fuzzy sets and systems*. 2000. Vol. 113. Iss. 3. P. 411–415. DOI: 10.1016/S0165-0114(98)00069-4
7. *Buckley J.J., Feuring T.* Introduction to fuzzy partial differential equations // *Fuzzy sets and systems*. 1999. Vol. 105. Iss. 2. P. 241–248.
8. *Goetschel Jr.R., Voxman W.* Elementary fuzzy calculus // *Fuzzy sets and systems*. 1986. No. 18. Iss. 1. P. 31–43. DOI: 10.1016/0165-0114(86)90026-6
9. *Мочалов И.А., Хрисат М.С.* Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // *Информационные технологии*. 2014. № 2. С. 14–22.
10. *Деменков Н.П., Мочалов И.А.* Нечеткие сплайны // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*. 2012. № 2. С. 8–59.
11. *Деменков Н.П., Мочалов И.А.* Нечеткая интерполяция // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2012. № 2. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/308732.html>
12. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

## REFERENCES

- [1] Besekerskiy V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of Automatic Control Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1975.
- [2] Rastrigin L.A. *Sistemy ekstremal'nogo upravleniya* [Systems of Extreme Control]. Moscow, Nauka Publ., 1974.
- [3] Kazakevich V.V., Rodov A.B. *Sistemy avtomaticheskoy optimizatsii* [Systems of Automatic Optimization]. Moscow, Energiya Publ., 1977.
- [4] Pupkov K.A., ed. *Metody robastnogo, neyro-nechetkogo i adaptivnogo upravleniya* [Methods of Robust, Neuro-Fuzzy and Adaptive Control]. Moscow, MG TU im. N.E. Bauman Publ., 2001.
- [5] Otadi M., Mosleh M. Numerical solution of quadratic Riccati differential equation by neural network. *Mathematical sciences*, 2011, vol. 5, no. 3, pp. 249–257.
- [6] Buckley J.J., Feuring T. Universal approximators for fuzzy functions. *Fuzzy sets and systems*, 2000, vol. 113, iss. 3, pp. 411–415. DOI: 10.1016/S0165-0114(98)00069-4
- [7] Buckley J.J., Feuring T. Introduction to fuzzy partial differential equations. *Fuzzy sets and systems*, 1999, vol. 105, iss. 2, pp. 241–248.
- [8] Goetschel Jr.R., Voxman W. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy sets and systems*, 1986, no. 18, iss. 1, pp. 31–43. DOI: 10.1016/0165-0114(86)90026-6
- [9] Mochalov I.A., Khrisat M.S. Estimation Parameter Model Using Fuzzy Random Data *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2014, no. 2, pp. 14–22 (in Russ.).
- [10] Demenkov N.P., Mochalov I.A. Fuzzy Splines. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2012, no. 2 (87), pp. 48–59 (in Russ.).
- [11] Demenkov N.P., Mochalov I.A. Fuzzy interpolation. *Nauka i obrazovanie. MG TU im. N.E. Bauman* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2012, no. 2. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/308732.html>

[12] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza*. [Elements of Functional Analysis and the Theory of Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1972.

Статья поступила в редакцию 13.04.2015

Деменков Николай Петрович — канд. техн. наук, доцент кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Demenkov N.P. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Automatic Control Systems department, Bauman Moscow State Technical University.  
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Мочалов Иван Александрович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Mochalov I.A. — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Automatic Control Systems department, Bauman Moscow State Technical University.  
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Деменков Н.П., Мочалов И.А. Динамика нечеткой системы автоматической оптимизации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 1. С. 59–74. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-59-74

**Please cite this article in English as:**

Demenkov N.P., Mochalov I.A. Fuzzy system dynamics of automatic optimization. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 1, pp. 59–74.  
DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-59-74