DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-51-58

УДК 62-50

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УСЛОВИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ И РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА*

Н.Е. Зубов[1,2], **Е.А. Микрин**[1,2], **М.Ш. Мисриханов**[2], **В.Н. Рябченко**[1,2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: nezubov@bmstu.ru

[2]Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва,
Королёв, Московская обл., Российская Федерация
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Рассмотрены критерии управляемости линейной многомерной системы: ранговый критерий Калмана; модальный (частотный) критерий Попова – Белевича – Хотиса; критерий, когда для управляемости необходимо и достаточно невырожденности ленточной матрицы управляемости. Приведены утверждения, устанавливающие эквивалентность ленточных условий управляемости линейной многомерной системы и условий разрешимости линейного полиномиального матричного уравнения Сильвестра относительно полиномиальной матрицы степени $n-2$. *Даны дуальные утверждения для критериев наблюдаемости. На практическом примере показано применение разработанного подхода к линейным динамическим системам.*

Ключевые слова: критерий управляемости, критерий наблюдаемости, линейные многомерные системы, полиномиальное уравнение Сильвестра.

EQUIVALENCE OF CONTROLLABILITY CONDITIONS OF LINEAR MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS AND SOLVABILITY OF THE SILVESTER POLYNOMIAL MATRIX EQUATION

N.E. Zubov[1,2], **E.A. Mikrin**[1,2], **M.Sh. Misrikhanov**[2], **V.N. Ryabchenko**[1,2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: nezubov@bmstu.ru

[2]S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia,
Korolev, Moscow Region, Russian Federation
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

In the paper the following controllability criteria of linear multidimensional systems are considered: Kalman rank criterion; Popov – Belevich – Hautus modal (frequency) test, when nondegeneracy of the controllability band matrix is necessary and sufficient for a controllable system. The statements determining the equivalence of band controllability conditions of a linear multidimensional system and the solvability conditions of the Sylvester linear polynomial matrix equation relatively to polynomial matrix of degree are presented. The dual statements for the observability criteria are given. The application of the developed method to linear dynamic systems is shown in practice.

Keywords: controllability criterion, observability criterion, linear multidimensional system, Sylvester polynomial equation.

---

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00046).

Введение. Для анализа управляемости линейной многомерной системы со стационарными параметрами

$$\sigma x(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}$ — скалярное управление; $\sigma x(t) = \dot{x}(t)$ — оператор дифференцирования по времени или $\sigma x(t) = x(t+1)$ — оператор сдвига во времени; $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Используются два критерия (теста): 1) ранговый критерий Калмана; 2) модальный (частотный) критерий Попова – Белевича – Хотиса.

Согласно критерию Калмана, для управляемости (1) необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{2}$$

была обратима [1], т.е. $\operatorname{rank}\left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{array} \right) = n$, или $\det\left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{array} \right) \neq 0$.

В *модальном* (*частотном*) *критерии Попова – Белевича – Хотиса*, в котором для управляемости (1) требуется полнота ранга *n* матриц (сингулярного пучка матриц) [2] $\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \end{array} \right) \in \mathbb{C}^{n\times(n+1)}$, где $\lambda_j \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = 0\}$ — элементы спектра (множества собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$); $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел (комплексная плоскость).

В работе [3] предложен критерий, когда для управляемости (1) необходимо и достаточно *невырожденности ленточной матрицы управляемости* размером $n(n-1) \times n(n-1)$:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \boldsymbol{B}_L^{\perp} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}A & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{B}_L^{\perp} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{B}_L^{\perp} \end{array} \right), \tag{3}$$

т.е.

$$\operatorname{rank} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \boldsymbol{B}_L^{\perp} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{B}_L^{\perp} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{B}_L^{\perp} \end{array} \right) = n(n-1),$$

или

$$\det\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \boldsymbol{B}_L^{\perp} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{B}_L^{\perp} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{B}_L^{\perp} \end{array}\right) \neq 0. \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{B}_L^{\perp} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ — левый делитель нуля вектора $\boldsymbol{B}$, удовлетворяющий однородному уравнению [4] $\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{B} = 0_{(n-1)\times 1}$, имеющий размеры $(n-1)\times n$ и максимальный ранг $n-1$.

Основная цель работы — установление эквивалентности условий управляемости линейной многомерной системы на основе ленточной матрицы (2) и условий разрешимости линейного полиномиального матричного уравнения. В силу дуальности свойств управляемости системы (1) и наблюдаемости системы

$$\sigma x(t) = \boldsymbol{A}x(t),\ y(t) = \boldsymbol{C}x(t), \tag{5}$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$ — скалярный выход, конечные результаты по аналогии распространяются на задачу анализа наблюдаемости.

Управляемость. Линейным полиномиальным матричным уравнением относительно неизвестной матрицы $\boldsymbol{Y}(\lambda)$ называется уравнение [5]

$$(\boldsymbol{F}_0 + \lambda\boldsymbol{F}_1)\,\boldsymbol{Y}(\lambda) = 0, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{F}_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $i = 1,\,2$ — заданные матрицы.

Матрица $\boldsymbol{Y}(\lambda)$ представляет собой правое полиномиальное нуль-пространство линейного пучка матриц $\boldsymbol{F}_0 + \lambda\boldsymbol{F}_1$ или, другими словами, правый делитель нуля этой матрицы. Если требуется определить решение матрицы $\boldsymbol{Y}(\lambda)$ в виде

$$\boldsymbol{Y}(\lambda) = \boldsymbol{Y}_0 + \lambda\boldsymbol{Y}_1 + \ldots + \lambda^{\delta(\boldsymbol{Y})}\boldsymbol{Y}_{\delta(\boldsymbol{Y})}, \tag{7}$$

где $\delta(\boldsymbol{Y})$ — заданное натуральное число (*заданная степень*), тогда от уравнения (6) переходят к эквивалентной записи [5, 6]

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \boldsymbol{F}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \boldsymbol{F}_1 & F_0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{F}_1 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \boldsymbol{F}_0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{F}_1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{Y}_0 \\ \hline \boldsymbol{Y}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{Y}_{\delta(Y)} \end{array}\right) = 0.$$

Матрицу

$$
\boldsymbol{S} = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\boldsymbol{F}_0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\boldsymbol{F}_1 & \boldsymbol{F}_0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \boldsymbol{F}_1 & \ddots & \vdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \boldsymbol{F}_0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{F}_1
\end{array}\right) \tag{8}
$$

называют *матрицей Сильвестра.*

Справедлива лемма [7].

Лемма. *Для разрешимости линейного полиномиального матричного уравнения* (*6*) *относительно матрицы* $\boldsymbol{Y}(\lambda)$ *с заданной степенью* $\delta(\boldsymbol{Y})$ *необходимо и достаточно неполноты ранга по столбцам матрицы Сильвестра* (*8*).

Следовательно, полнота ранга по столбцам матрицы Сильвестра (8) гарантирует отсутствие решения уравнения (6) относительно матрицы $\boldsymbol{Y}(\lambda)$ (7) с заданным числом $\delta(\boldsymbol{Y})$.

Сравнивая матрицы (3) и (8), нетрудно прийти к выводу, что эти матрицы имеют совпадающую (эквивалентную) структуру. На основании этого факта, а также справедливости приведенной леммы сформулируем теорему.

Теорема 1. *Для неуправляемости многомерной линейной системы* (1) *необходимо и достаточно разрешимости линейного полиномиального матричного уравнения*

$$
\left(\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}_L^{\perp}\right)\boldsymbol{Y}(\lambda) = 0 \tag{9}
$$

относительно матрицы

$$
\boldsymbol{Y}(\lambda) = \boldsymbol{Y}_0 + \lambda \boldsymbol{Y}_1 + \ldots + \lambda^{n-2}\boldsymbol{Y}_{n-2}. \tag{10}
$$

Обратная теорема: *для управляемости многомерной линейной системы* (1) *необходимо и достаточно неразрешимости линейного полиномиального матричного уравнения* (9) *относительно матрицы* (10).

◀ Воспользовавшись сравнением матриц (3) и (8), сопоставим задаче (4) линейное полиномиальное уравнение (9). Ясно, что согласно лемме уравнение (9) будет разрешимо с заданной степенью $n-1$, если и только если

$$
\det\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\boldsymbol{B}_L^{\perp}A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\boldsymbol{B}_L^{\perp} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \boldsymbol{B}_L^{\perp} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \cdots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{B}_L^{\perp}
\end{array}\right) = 0,
$$

но это соответствует неуправляемости линейной системы (1).

Сделаем замечание: поскольку левый делитель нуля $\boldsymbol{B}_L^\perp$ матрицы $\boldsymbol{B}$ определяется с точностью до некоторой обратимой матрицы $\boldsymbol{T}$ размером $(n-1)\times(n-1)$ [4], то уравнению (9) может быть поставлено в соответствие множество уравнений вида $\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{B}_L^\perp \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}_L^\perp\right)\boldsymbol{Y}(\lambda) = 0$. Это, очевидно, никак не влияет в алгебраическом смысле на условия разрешимости, но может оказать существенное влияние на вычислительные особенности задачи, поскольку в этом случае возникает возможность определенного влияния на обусловленность изучаемых матриц. ►

Наблюдаемость. Одна из модификаций ленточного критерия наблюдаемости многомерной линейной системы (5) имеет вид [3]: для наблюдаемости линейной системы (5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^\perp & \boldsymbol{C}_R^\perp & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
0 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^\perp & \boldsymbol{C}_R^\perp & \cdots & 0 \\ \hline
0 & 0 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^\perp & \cdots & 0 \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{C}_R^\perp
\end{array}\right) = n(n-1),$$

или

$$\det\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^\perp & \boldsymbol{C}_R^\perp & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
0 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^\perp & \boldsymbol{C}_R^\perp & \cdots & 0 \\ \hline
0 & 0 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^\perp & \cdots & 0 \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{C}_R^\perp
\end{array}\right) \neq 0,$$

где матрица называется *ленточной матрицей наблюдаемости* и имеет размер $n(n-1)\times n(n-1)$; $\boldsymbol{C}_R^\perp$ — правый делитель нуля матрицы $\boldsymbol{C}$, удовлетворяющий уравнению $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}_R^\perp = 0_{1\times(n-1)}$ и имеющий размер $n\times$ $\times\,(n-1)$ и максимальный ранг $n-1$ [4].

В силу дуальности задач управляемости и наблюдаемости [1, 2] приведем без доказательства еще одну теорему.

Теорема 2. *Для ненаблюдаемости многомерной линейной системы* (5) *необходимо и достаточно разрешимости линейного полиномиального матричного уравнения*

$$\boldsymbol{X}(\lambda)\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_R^\perp + \lambda\boldsymbol{C}_R^\perp\right) = 0 \tag{11}$$

относительно матрицы

$$\boldsymbol{X}(\lambda) = \boldsymbol{X}_0 + \lambda\boldsymbol{X}_1 + \ldots + \lambda^{n-2}\boldsymbol{X}_{n-2}. \tag{12}$$

Обратная теорема: *для наблюдаемости многомерной линейной системы необходимо и достаточно неразрешимости линейного полиномиального матричного уравнения* (11) *относительно матрицы* (12).

Пример. Пусть задана линейная система (1) с матрицами

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{array}\right). \tag{13}$$

Вычислим левый делитель нуля матрицы $\boldsymbol{B}$ из (13): $\boldsymbol{B}_L^{\perp} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$.
Теперь составим уравнение (9), в результате получим

$$\left(\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}_L^{\perp}\right)\boldsymbol{Y}(\lambda) = \left(\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \lambda \\ \hline \lambda & 0 & 0 \end{array}\right)\right)\boldsymbol{Y}(\lambda) = 0, \tag{14}$$

где матрица $\boldsymbol{Y}(\lambda)$ имеет степень $n - 2 = 1$, т.е.

$$\boldsymbol{Y}(\lambda) = \left(\begin{array}{c} Y_{01} \\ \hline Y_{02} \\ \hline Y_{03} \end{array}\right) + \lambda \left(\begin{array}{c} Y_{11} \\ \hline Y_{12} \\ \hline Y_{13} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} Y_{01} + \lambda Y_{11} \\ \hline Y_{02} + \lambda Y_{12} \\ \hline Y_{03} + \lambda Y_{13} \end{array}\right). \tag{15}$$

Уравнение (15) неразрешимо, поскольку ленточная матрица

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & 0 \\ \hline \boldsymbol{B}_L^{\perp} & \boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} \\ \hline 0 & \boldsymbol{B}_L^{\perp} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} & 0 \\ \hline \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \end{array}\right)$$

является невырожденной, что, в свою очередь, соответствует условию полной управляемости линейной системы с матрицами (13).

Отметим, что уравнение (14) оказывается разрешимым, но уже относительно матрицы $\boldsymbol{Y}(\lambda)$ степени $n - 1 = 2$:

$$\boldsymbol{Y}(\lambda) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \end{array}\right) + \lambda \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right) + \lambda^2 \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline -1 \\ \hline 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \lambda \\ \hline 1 - \lambda^2 \\ \hline 1 \end{array}\right),$$

что в таком случае является недостаточным.

Заключение. В статье приведены утверждения, согласно которым существует взаимно однозначная связь между условиями управляемости и наблюдаемости линейной системы и условиями разрешимости линейного полиномиального матричного уравнения Сильвестра относительно полиномиальной матрицы степени $n - 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калман Р.*, *Фалб П.*, *Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

2. *Zhou K.* Essentials of robust control. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1998.
3. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Ленточная формула решения задачи Крылова // АиТ. № 12. 2011. С. 53–69.
4. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 196–240.
5. *Antsaklis P.J., Gao Z.* Polynomial and rational matrix interpolation: theory and control applications // Int. J. Contr. 1993. Vol. 58 (2). P. 349–404.
6. *Kailath T.* Linear Systems. New Jersey: Prentice Hall. Englewood Cliffs. 1980.
7. *Henrion D.*, *Sebek M.* Efficient algorithms for polynomial matrix equation triangularization // Proc. of the IEEE Mediterranean Conference on Contr. and Automat, 1998. Alghero, Sardinia, Italy.

REFERENCES

[1] Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in mathematical system theory. McGraw-Hill, 1969.
[2] Zhou K. Essentials of robust control. Upper Saddle River. N.J., Prentice Hall, 1998.
[3] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. The band formula for A.N. Krylov's problem. *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 12, pp. 2142–2157.
[4] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Algebraic and matrix methods in the theory of linear MIMO-systems. *Vestnik IGEU*, 2005, vol. 5, pp. 196–240 (in Russ.).
[5] Antsaklis P.J., Gao Z. Polynomial and rational matrix interpolation: theory and control applications. *Int. J. Contr.*, 1993, vol. 58 (2), pp. 349–404.
[6] Kailath T. Linear Systems. N.J., Prentice Hall. Englewood Cliffs, 1980.
[7] Henrion D., Sebek M. Efficient algorithms for polynomial matrix equation triangularization. *Proc. of the IEEE Mediterranean Conference on Contr. and Automat*. Alghero, Sardinia, Italy, 1998.

Статья поступила в редакцию 22.12.2014

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра РКК “Энергия” им. С.П. Королёва, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
РКК “Энергия” им. С.П. Королёва, Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4-а.

Zubov N.E. — Dr. Sci. (Eng.), Deputy Director for Science, Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia; Professor of Automatic Control Systems department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation.

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, первый заместитель генерального конструктора РКК “Энергия” им. С.П. Королёва, заведующий кафедрой “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
РКК “Энергия” им. С.П. Королёва, Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4-а.

Mikrin E.A. — Dr. Sci. (Eng.), First Deputy of Chief Designer, Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Head of Automatic Control Systems department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation.

Мисриханов Мисрихан Шапиевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра РКК "Энергия" им. С.П. Королёва.
РКК "Энергия" им. С.П. Королёва, Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4-а.

Misrikhanov M.Sh. — Dr. Sci. (Eng.), Senior Staff Scientist, Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia.
S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation.

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра РКК "Энергия" им. С.П. Королёва, профессор кафедры "Системы автоматического управления" МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
РКК "Энергия" им. С.П. Королёва, Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4-а.

Ryabchenko V.N. — Dr. Sci. (Eng.), Leading Researcher, Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Professor of Automatic Control Systems department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Эквивалентность условий управляемости линейной многомерной системы и разрешимости полиномиального матричного уравнения Сильвестра // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 1. С. 51–58. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-51-58

Please cite this article in English as:

Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Equivalence of controllability conditions of linear multidimensional systems and solvability of the silvester polynomial matrix equation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 1, pp. 51–58. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-51-58