DOI: 10.18698/0236-3933-2015-6-63-81

УДК 519.216:621.391

# БЫСТРЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ В ОДНООСНОВНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

**В.В. Сюзев**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: v.suzev@bmstu.ru

*Для расширения области практического применения спектральной обработки цифровых сигналов в информационно-управляющих комплексах реального времени различного назначения предложен оригинальный скалярный метод синтеза новых алгоритмов быстрых обобщенных преобразований Хартли в одноосновной системе счисления с произвольным основанием. Определены условия существования быстрых алгоритмов в обобщенных системах Хартли с порядком следования функций Пэли, Хармута и Адамара. Для каждого вида упорядочения систем Хартли получены аналитические описания быстрых алгоритмов на различных уровнях разных способов прореживания входного сигнала и его спектра. Показано, что все разработанные быстрые алгоритмы представляют собой легко программируемые итерационные вычислительные процессы единой структуры с начальными условиями в виде малоточечных прямых дискретных преобразований Фурье в базисе обычных функций Хартли. Проведена оценка вычислительной сложности разработанных быстрых алгоритмов и получены формульные зависимости для оценки числа действительных операций сложения и умножения. Выполнена сравнительная оценка сложности быстрых и прямых алгоритмов обобщенного анализа спектра Хартли, подтвердившая эффективность полученных результатов.*

***Ключевые слова***: базисная функция, базисная система, быстрые преобразования Фурье, спектральный анализ, система счисления.

# GENERALIZATION OF THE FAST HARTLEY TRANSFORM IN SINGLE-BASE NOTATION SYSTEMS

**V.V. Suzev**

Bauman State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: v.suzev@bmstu.ru

*The article proposes an original scalar method for synthesizing new algorithms of the generalized fast Hartley transform in a single-base notation system with an arbitrary radix. The proposed method extends the practical application area of the digital signal spectral processing in real time information management systems of different applications. The authors define the conditions under which fast algorithms exist in the generalized Hartley systems with the Paley, Hartmut and Hadamard functions sequence. The analytical descriptions of fast algorithms are given for various levels of different techniques of decimating the input signal and its spectrum. They are made for each type of Hartley system ordering. It is shown that all the developed fast algorithms are easily programmable iterative computational processes of a unified structure with some initial conditions. The latter are presented in the form of few point direct discrete Fourier transforms in the basis of the normal Hartley functions. The computational complexity of the developed fast algorithms is evaluated and the formulae for estimating the number of actual addition and multiplication operations* *are obtained. The complexity comparative assessment of both fast and direct algorithms of the Hartley spectrum generalized analysis is performed, which confirms the effectiveness of the obtained results.*

***Keywords*****:** basis function, basis system, fast Fourier transform, spectral analysis, number system.

Спектральные методы находят широкое применение в информационно-управляющих комплексах реального времени при решении различных научных и технических задач цифровой обработки сигналов (ЦОС): фильтрации, аппроксимации, интерполяции, идентификации, распознавания, структурного и энергетического анализа, реставрации, сжатия, имитации, кодирования, передачи по каналам связи и др. [1–6]. Математическую основу спектрального представления сигналов составляет дискретное преобразование Фурье (ДПФ) в различных ортогональных базисах. Поскольку вычислительная и функциональная эффективности спектральных алгоритмов ЦОС зависят от используемых систем базисных функций, а полных базисных систем существует неограниченное множество [7, 8], то выбор рационального базиса является важной теоретической и прикладной проблемой.

При решении могут оказаться особенно полезными параметрические базисные функции, содержащие в своей структуре изменяемые параметры, влияющие на их свойства. Известным и важным примером таких базисов служит класс экспоненциальных функций Виленкина – Крестенсона (ВКФ) [8, 9], управление свойствами которых достигается путем вариации основания используемой системы счисления и дополнительного применения различных способов упорядочения базисных функций в системе.

Функции Виленкина – Крестенсона являются комплексными, в которых в качестве действительной и мнимой частей используются обобщенные тригонометрические функции, записанные в одноосновной системе счисления [9]. Они обладают свойством мультипликативности, и поэтому для них справедливы все важные для ЦОС теоремы спектрального анализа (теоремы о модуляции, сдвиге, свертки, корреляции, энергетическом спектре и умножении сигналов) и существуют эффективные вычислительные процедуры анализа спектра — быстрые преобразования Виленкина – Крестенсона (БПВК) [9, 10].

Следует иметь в виду, что комплексный характер ВКФ приводит к использованию в алгоритмах ЦОС трудоемкой комплексной арифметики, что может послужить весомым ограничением области практического применения ВКФ, особенно при обработке высокочастотных многоразмерных сигналов в системах жесткого реального времени. В связи с этим ставилась актуальная теоретико-прикладная задача синтеза вещественного базиса со свойствами, близкими к свойствам ВКФ, но использующего вещественные числа и операции. Такая задача решена автором в работе [11] путем перехода от комплексной структуры

ВКФ к хартли-подобной вещественной структуре с помощью применения к обобщенным тригонометрическим функциям процедуры Хартли [12, 13], ориентированной на одноосновную систему счисления с произвольным основанием.

Для новых обобщенных функций Хартли (ОФХ) также справедливы все теоремы спектрального анализа [11], поэтому в этом смысле они являются вещественной альтернативой комплексным ВКФ. Однако эти функции не имеют свойства мультипликативности, и к ним напрямую не применимы существующие для ВКФ методы синтеза быстрых преобразований. Интересы же практического применения ОФХ требуют создания быстрых алгоритмов анализа спектра.

Существует два подхода к синтезу быстрых преобразований Фурье (БПФ). Первый подход использует матричную форму описания ДПФ и основывается на различных способах факторизации матриц значений базисных функций [8–11]. Быстрые преобразования Фурье в этом случае представляются произведением слабо заполненных матриц и их программирование требует дополнительного этапа преобразования матричных уравнений к алгебраическому виду. Во втором подходе используется скалярная форма записи ДПФ и декомпозиция многоточечных ДПФ на совокупность последовательно выполняемых малоточечных ДПФ. Последнее выполняется различными способами прореживания многомерных массивов входного сигнала и спектра. Второй подход приводит к алгоритмам БПФ, записанным сразу в виде аналитических выражений, удобных для последующего программирования.

Относительная трудность при реализации второго подхода возникает при определении математической связи между много- и малоточечными базисными функциями. Для базиса ВКФ такая задача автором решена путем анализа $p$-ичных кодов индексов прореженных массивов [8, 10]. Аналогичным образом можно ее решить и для базиса ОФХ.

Однако для ОФХ можно предложить более простой способ реализации скалярного подхода, использующий существующую аналитическую взаимосвязь обобщенных спектров Хартли и спектров Виленкина – Крестенсона [8, 11] и позволяющий трансформировать известные алгоритмы БПВК в новые быстрые обобщенные преобразования Хартли (БОПХ). Цель настоящей работы — разработка такого метода синтеза БОПХ для трех наиболее изученных систем ОФХ — Пэли, Адамара и Хармута.

**Обобщенные функции и системы Хартли.** Дискретные ОФХ образуются из обобщенных тригонометрических функций

$$\mathrm{Cos}(k,i) = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k^{(m)} i^{(m)}\right), \qquad (1)$$

$$\mathrm{Sin}(k,i)=\sin\Big(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}k^{(m)}i^{(m)}\Big) \tag{2}$$

и записываются как

$$\mathrm{Cas}(k,i)=\cos(k,i)+\sin(k,i). \tag{3}$$

Они представляют собой обобщение известных функций Хартли [12, 13] на одноосновную систему счисления с произвольным основанием $p$. В формулах (1)–(3) величина $p$ принимает положительные целочисленные значения, а $k^{(m)}$ и $i^{(m)}$ — $m$-разрядные представления номера функции $k$ и ее аргумента $i$ в виде $n$-разрядных позиционных кодов

$$k=\sum_{m=1}^{n}k^{(m)}p^{m-1};\quad i=\sum_{m=1}^{n}i^{(m)}p^{m-1} \tag{4}$$

и лежат в диапазоне $[0,p)$. Обобщенные функции Хартли $\mathrm{Cas}(k,i)$ являются действительными ортонормированными функциями, определенными на интервале $[0,\ N=p^n)$ $(n=1,2,\ldots)$, и принимают на нем $N$ различных значений. Они обладают свойством двойственности

$$\mathrm{Cas}(k,i)=\mathrm{Cas}(i,k)$$

и периодичности с периодом, равным $N$. Среднее значение всех ОФХ, кроме нулевой, равно нулю, среднее значение функции $\mathrm{Cas}(0,i)=1$.

Объединение $N$ первых ОФХ приводит к полной базисной системе, пригодной для представления любых решетчатых сигналов конечной мощности, определенных на дискретном интервале $[0,\ N)$. Базисная система ОФХ, описываемых выражением (3), отличается тем, что матрица ее значений имеет блочную структуру [11]. Подобным свойством обладает матрица ВКФ для упорядочения Адамара [8, 9]. По аналогии и базисную систему ОФХ (3) называют системой ОФХ – Адамара [11]. Заменяя в этой системе прямой код чисел $k$ на инверсный $\overline{k}$, получаем из нее систему ОФХ – Пэли

$$\mathrm{Cas}(\overline{k},i)=\cos\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}k^{(n+1-m)}i^{(m)}\right]+\sin\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}k^{(n+1-m)}i^{(m)}\right], \tag{5}$$

а заменяя прямой код чисел $k$ их обобщенным кодом Грея $<k>$, — систему ОФХ – Хартли

$$\mathrm{Cas}(<k>,\ i)=\cos\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}<k^{(m)}>i^{(m)}\right]+\sin\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}<k^{(m)}>i^{(m)}\right]. \tag{6}$$

Разряды $<k^{(m)}>$ обобщенного кода Грея в системе счисления с основанием $p$ вычисляются по правилу

$$<k^{(m)}>=k^{(m)}+k^{(m+1)}(\mathrm{mod}\,p),\quad k^{(n+1)}=0.$$

Следует отметить, что фамилии Адамара, Пэли и Хармута включены в названия систем ОФХ по аналогии с системами ВКФ [9, 11].

**Обобщенные преобразования Хартли.** Обобщенные преобразования Хартли (ОПХ) представляются в виде следующей пары ДПФ

$$X_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i)\ \mathrm{Cas}(k,i), \tag{7}$$

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X_x(k)\ \mathrm{Cas}(k,i), \tag{8}$$

где $x(i)$ являются отсчетами дискретного входного сигнала, а $X_x(k)$ — составляющими его обобщенного спектра Хартли. Обе решетчатые функции $x(i)$и $X_x(k)$ в ОПХ являются действительными и определены на целочисленном интервале $[0,\ N)$. Практическая реализация прямого ОПХ (7) потребует выполнения

$$M_{\text{п}} = N^2,\ A_{\text{п}} = N(N-1) \tag{9}$$

вещественных умножений и сложений соответственно. При больших значениях $N$ их число становится существенными.

Обобщенные функции Хартли и ВКФ используют в своей структуре одинаковые обобщенные функции (1) и (2). В этом смысле обе соответствующие системы этих функций являются родственными и их отличие состоит только в том, что в действительных ОФХ эти функции используются в качестве слагаемых, а в комплексных ВКФ — в качестве их действительной и мнимой частей [8, 9]. Спектры в родственных базисах всегда взаимосвязаны и, как показано автором в работе [11], эта связь между спектрами $X_{\text{ВК}}(k)$ в базисе ВКФ и $X_x(k)$ в базисе ОФХ выражается следующими уравнениями:

$$X_{\text{ВК}}(k) = [X_x(k) + X_x(-k)]/2 - j[X_x(k) - X_x(-k)]/2, \tag{10}$$

$$X_x(k) = \ \mathrm{Re}[X_{\text{ВК}}(k)] + \ \mathrm{Im}[X_{\text{ВК}}(k)]. \tag{11}$$

Здесь $j = \sqrt{-1}$ является мнимой единицей, $\mathrm{Re}\,[\cdot]$ и $\mathrm{Im}\,[\cdot]$ служат для обозначения действительной и мнимой частей спектра, а $X_x(-k)$ представляет собой спектр ОФХ для отрицательных значений номера $k$.

Практическое использование уравнений связи (10) и (11) требует знания спектральных составляющих с отрицательными номерами. Последние легко определить, если учесть, что каждому отрицательному значению номера $k$ в ОФК соответствует положительный номер $k^*$, причем номера $-k$ и $k^*$ являются $p$-ично противоположными числами, разряды $p$-ичных кодов которых связаны соотношением

$$-k^{(m)} = k^{*(m)} = (p - k^{(m)}) \pmod p). \tag{12}$$

Уравнения связи спектров (10) и (11) составляют основу процесса трансформации алгоритмов БПВК в алгоритмы БОПХ. Общая методика аналитического синтеза алгоритмов БОПХ в этом случае будет следующей. Для каждой базисной системы ОФХ и выбранного способа прореживания записывается соответствующий алгоритм БПВК [8, 10] на различных уровнях прореживания. Затем в данном алгоритме в правой части его выражений в соответствии с уравнением связи (10) заменяются спектры Виленкина – Крестенсона на обобщенные спектры Хартли. После этого в полученных комплексных соотношениях выделяется действительная и мнимая части, из которых по уравнению (11) формируется алгоритм БОПХ. Продемонстрируем эффективность приведенной методики и получаемых при этом быстрых алгоритмов.

**Быстрые обобщенные преобразования Хартли для систем ОФХ Пэли и Хармута с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и естественным порядком следования отсчетов спектра.** В этом случае на первом уровне прореживания исходная выборка сигнала $\{x(i)\}$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$ разбивается на $p$ промежуточных выборок, содержащих по $N/p$ отсчетов с номерами $i = pi_1 + \lambda_1$, где $i_1 = 0, 1, \ldots, p^{n-1}-1$, а $\lambda_1 = 0, 1, \ldots, p-1$. При этом используется естественный порядок следования отсчетов спектра, задаваемый законом изменения $k = k_1 + p^{n-1}q_1$, где $k_1 = 0, 1, \ldots, p^{n-1}-1$, $q_1 = 0, 1, \ldots, p-1$. Алгоритм БПВК – Пэли на этом уровне имеет следующий вид [8]:

$$X_{\text{ВК}}(k_1 + p^{n-1}q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1) \exp\Big(-j\frac{2\pi}{p}q_1\lambda_1\Big). \qquad (13)$$

Здесь $X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1)$ являются спектром Виленкина – Крестенсона промежуточных $\lambda_1 - x$ выборок $\{x_{\lambda_1}(i_1) = x(pi_1 + \lambda_1)\}$ входного сигнала. Если теперь над алгоритмом (13) выполнить все действия, сформулированные в общей методике, то после преобразования получим следующую запись алгоритма БОПХ – Пэли на первом уровне прореживания

$$X_x(k_1 + p^{n-1}q_1) = \\ = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1}\Big[X_x^{(\lambda_1)}(k_1)\cos\Big(\frac{2\pi}{p}q_1\lambda_1\Big) + X_x^{(\lambda_1)}(-k_1)\sin\Big(\frac{2\pi}{p}q_1\lambda_1\Big)\Big],$$

где

$$X_x^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)\,\mathrm{Cas}(\overline{k_1}, i_1),$$

$$X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)\,\mathrm{Cas}(-\overline{k_1}, i_1).$$

Очевидно, что описанную процедуру можно применить и для вычисления спектров промежуточных выборок, введя для них новый уровень прореживания. В результате на произвольном $\gamma$-м уровне будет получен БОПХ – Пэли в следующем виде записи:

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\gamma-1})}(k_\gamma + p^{n-\gamma}q_\gamma) = \sum_{\lambda_\gamma=0}^{p-1}\Big[X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma)\cos\Big(\frac{2\pi}{p}q_\gamma\lambda_\gamma\Big) + \\ + X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma)\sin\Big(\frac{2\pi}{p}q_\gamma\lambda_\gamma\Big)\Big], \quad (14)$$

$$q_\alpha,\ \lambda_\alpha = 0,1,\ldots,p-1;\ \alpha = 1,2,\ldots,\gamma;\ k_\gamma = 0,1,\ldots,p^{n-\gamma}-1,$$

где

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma) = \sum_{\lambda_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\mathrm{Cas}(\overline{k}_\gamma, i_\gamma), \quad (15)$$

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma) = \sum_{\lambda_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\mathrm{Cas}(-\overline{k}_\gamma, i_\gamma), \quad (16)$$

а

$$x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma) = x(p^\gamma i_\gamma + p^{\gamma-1}\lambda_\gamma + \ldots + p\lambda_2 + \lambda_1). \quad (17)$$

Изменяя в уравнениях (14)–(17) $\gamma$ от 1 до $n-1$, можно описать весь процесс построения алгоритма БОПХ – Пэли для $(n-1)$ уровней прореживания, получив в итоге полный алгоритм БОПХ – Пэли. На последнем уровне

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-2})}(k_{n-1} + pq_{n-1}) = \\ = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{p-1}\Big[X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(k_{n-1})\cos\Big(\frac{2\pi}{p}q_{n-1}\lambda_{n-1}\Big) + \\ + X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(-k_{n-1})\sin\Big(\frac{2\pi}{p}q_{n-1}\lambda_{n-1}\Big)\Big], \quad (18)$$

где $k_{n-1}$, $q_{n-1} = 0,1,\ldots,p-1$, а промежуточные спектры равны

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(k_{n-1}) = \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1})\mathrm{cas}(k_{n-1}, i_{n-1}), \quad (19)$$

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(-k_{n-1}) = \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1})\mathrm{cas}(p-k_{n-1}, i_{n-1}) \tag{20}$$

и вычисляются с помощью $p$-точечных ДПФ в базисе обычных функций Хартли над выборками

$$x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1}) = x(p^{n-1}i_{n-1} + p^{n-2}\lambda_{n-1} + \cdots + p\lambda_2 + \lambda_1). \tag{21}$$

При организации процесса вычисления спектра входного сигнала по БОПХ – Пэли (14)–(17) необходимо индекс $\gamma$ менять в обратном порядке следования от $n-1$ до 1. В этом случае процесс вычисления по этому алгоритму будет итерационным с начальными значениями в виде спектров (19), (20) конечных выборок (21).

Для упорядочения Хармута алгоритм БПВК на первом уровне прореживания имеет вид [8]

$$X_{\text{ВК}}(k_1 + p^{n-1}q_1) = \sum_{i_1=0}^{p-1} x^{(q_1)}(i_1)\exp\Big(-j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n-1} < k_1^{(m)} > i_1^{(m)}\Big),$$

где

$$x_{(i_1)}^{(q_1)} = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} x_{\lambda_1}(i_1)\exp\Big[-j\frac{2\pi}{p}(\lambda_1 + i_1^{(1)})q_1\Big].$$

Применяя к нему описанную процедуру перехода к спектру Хартли, после преобразования получаем следующее аналитическое описание алгоритма БОПХ – Хармута на первом уровне прореживания:

$$X_x(k_1 + p^{n-1}q_1) = \\ = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1}\Big[x_c^{(q_1)}(i_1)\,\mathrm{Cas}(< k_1 >, i_1) + \ x_s^{(q_1)}(i_1)\,\mathrm{Cas}(< -k_1 >, i_1)\Big], \tag{22}$$

где

$$x_c^{(q_1)}(i_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} x_{\lambda_1}(i_1)\cos\Big[\frac{2\pi}{p}(\lambda_1 + i_1^{(1)})q_1\Big], \tag{23}$$

$$x_s^{(q_1)}(i_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} x_{\lambda_1}(i_1)\sin\Big[\frac{2\pi}{p}(\lambda_1 + i_1^{(1)})q_1\Big]. \tag{24}$$

В формулах (23) и (24) величина $i_1^{(1)}$ означает первый разряд $p$-ичного кода переменной $i_1$. В этом алгоритме искомый спектр не выражается через спектры промежуточных выборок, однако наличие однотипных вычислительных участков делает его реализацию проще прямого алгоритма (7).

Процедуру прореживания можно применить и при вычислении ДПФ (22), введя второй уровень прореживания, затем третий и т.д. до

$(n-1)$-го уровня, получив в итоге полный алгоритм БОПХ–Хармута. На произвольном $\gamma$-м уровне быстрый алгоритм будет иметь следующий вид:

$$X_x(k_\gamma + p^{n-\gamma}q_\gamma + \dots + p^{n-1}q_1) = \sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_c^{(q_1,q_2,\dots,q_\gamma)}(i_\gamma)\,\mathrm{Cas}(<k_\gamma>, i_\gamma) + \\ + \sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_s^{(q_1,q_2,\dots,q_\gamma)}(i_\gamma)\mathrm{Cas}(<-k_\gamma>, i_\gamma), \quad (25)$$

$$q_\alpha = 0,1,\dots,p-1; \quad \alpha = 1,2,\dots,\gamma; \; k_\gamma = 0,1,\dots,\; p^{n-\gamma}-1,$$

где

$$x_c^{(q_1,q_2,\dots,q_\gamma)}(i_\gamma) = \sum_{\lambda_\gamma=0}^{p-1} x_c^{(q_1,q_2,\dots,q_{\gamma-1})}(pi_\gamma + \lambda_\gamma)\cos\left[\frac{2\pi}{p}(\lambda_\gamma + i_\gamma^{(1)})q_\gamma\right], \quad (26)$$

$$x_s^{(q_1,q_2,\dots,q_\gamma)}(i_\gamma) = \sum_{\lambda_\gamma=0}^{p-1} x_s^{(q_1,q_2,\dots,q_{\gamma-1})}(pi_\gamma + \lambda_\gamma)\sin\left[\frac{2\pi}{p}(\lambda_\gamma + i_\gamma^{(1)})q_\gamma\right]. \quad (27)$$

В последних выражениях $i_\gamma^{(1)}$ означает первый разряд $p$-ичного кода числа $i_\gamma$. В предельном случае при $\gamma = n-1$ для полного алгоритма получаем

$$X_x(k_{n-1} + pq_{n-1} + \dots + p^{n-2}q_2 + p^{n-1}q_1) = \\ = \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_c^{(q_1,q_2,\dots,q_{n-1})}(i_{n-1})\,\mathrm{Cas}\left(\frac{2\pi}{p}k_{n-1}i_{n-1}\right) + \\ + \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_s^{(q_1,q_2,\dots,q_{n-1})}(i_{n-1})\,\mathrm{Cas}\left[\frac{2\pi}{p}(p-k_{n-1})i_{n-1}\right], \quad (28)$$

$$q_\alpha = 0,1,\dots,p-1; \; \alpha = 1,2,\dots,n-1; \; k_{n-1} = 0,1,\dots,p-1,$$

где

$$x_c^{(q_1,q_2,\dots,q_{n-1})}(i_{n-1}) = \\ = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{p-1} x_c^{(q_1,q_2,\dots,q_{n-2})}(pi_{n-1} + \lambda_{n-1})\cos\left[\frac{2\pi}{p}(\lambda_{n-1} + i_{n-1}^{(1)})q_{n-1}\right], \quad (29)$$

$$x_s^{(q_1,q_2,\dots,q_{n-1})}(i_{n-1}) = \\ = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{p-1} x_s^{(q_1,q_2,\dots,q_{n-2})}(pi_{n-1} + \lambda_{n-1})\sin\left[\frac{2\pi}{p}(\lambda_{n-1} + i_{n-1}^{(1)})q_{n-1}\right]. \quad (30)$$

Таким образом, в полном алгоритме БОПХ – Хармута по уравнениям (26) и (27) рекуррентно вычисляются все промежуточные величины $x_c^{(q_1,q_2)}(i_2)$, $x_s^{(q_1,q_2)}(i_2)$,. . . ,$x_c^{(q_1,q_2,\ldots,q_{n-1})}(i_{n-1})$, $x_s^{(q_1,q_2,\ldots,q_{n-1})}(i_{n-1})$ при начальных данных (23), (24), а затем с помощью $p$-точечных ДПФ Хартли (28) находятся все составляющие искомого спектра сигнала.

**Быстрые обобщенные преобразования Хартли для систем ОФХ Пэли и Хармута с естественным порядком следования отсчетов сигнала и прореженным порядком следования отсчетов спектра.** В этом случае на первом уровне прореживания вся $N$-точечная выборка входного сигнала $x(i)$ разбивается на $p$ соприкасающихся промежуточных выборок $x_{\lambda_1}(i_1)$, $\lambda_1 = 0, 1, \ldots, p-1$; $i_1 = 0, 1, \ldots, p^{n-1} - 1$ с естественным порядком следования отсчетов, что достигается следующим законом изменения индекса $i$: $i = i_1 + p^{n-1}\lambda_1$ (т.е. $x_{\lambda_1}(i_1) = x(i_1 + p^{n-1}\lambda_1)$). Спектральные же составляющие располагаются в прореженном порядке следования с изменением их номера $k$ по формуле $k = pk_1 + q_1$, где $k_1 = 0, 1, \ldots, p^{n-1} - 1$; $q_1 = 0, 1, \ldots, p-1$. Тогда алгоритм БПВК – Пэли принимает следующий вид записи [8]:

$$X_{\text{ВК}}(pk_1 + q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1) \exp\left(-j\frac{2\pi}{p}\lambda_1 q_1\right), \qquad (31)$$

где

$$X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) \exp\left[-j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n-1} k_1^{(n-m)} i_1^{(m)}\right]$$

представляют собой спектр Виленкина – Крестенсона – Пэли промежуточных выборок $x_{\lambda_1}(i_1)$ входного сигнала при данном способе прореживания. Применив к уравнению (31) процедуру трансформации спектров Виленкина – Крестенсона в обобщенные спектры Хартли, после преобразования получим

$$X_x(pk_1+q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} \left[X_x^{(\lambda_1)}(k_1) \cos\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_1 q_1\right) + X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) \sin\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_1 q_1\right)\right],$$

где

$$X_x^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) \mathrm{Cas}(\overline{k}_1, i_1),$$

$$X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) \mathrm{Cas}(-\overline{k}_1, i_1).$$

Это и есть алгоритм БОПХ – Пэли на первом уровне этого способа прореживания выборок сигнала и спектра. При этом связь разрядов положительных $k_1$ и отрицательных $-k_1$ индексов по-прежнему определяется соотношением (12).

Продолжая прореживание, на $\gamma$ уровне получаем

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\gamma-1})}(pk_\gamma+q_\gamma)=\sum_{\lambda_\gamma=0}^{p-1}\Bigg[X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma)\cos\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_\gamma q_\gamma\right)+ \\ +X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\lambda_\gamma q_\gamma\right)\Bigg], \quad (32)$$

$$q_\alpha,\lambda_\alpha=0,1,\ldots,p-1;\quad \alpha=1,2,\ldots,\gamma;\quad k_\gamma=0,1,\ldots,p^{n-\gamma}-1,$$

где

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma)=\sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1}x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\mathrm{Cas}(\overline{k}_\gamma i_\gamma), \quad (33)$$

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma)=\sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1}x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\mathrm{Cas}(-\overline{k}_\gamma i_\gamma), \quad (34)$$

а

$$x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)=x(i_\gamma+p^{n-\gamma}\lambda_\gamma+\cdots+p^{n-2}\lambda_2+p^{n-1}\lambda_1). \quad (35)$$

Изменяя $\gamma$ от 1 до $n-1$, можно с помощью соотношений (32)–(35) описать полный БОПХ – Пэли для данного способа прореживания. При этом промежуточный спектр на последнем $(n-1)$-м уровне вычисляется с помощью $p$-точечного ДПФ в обычном базисе Хартли

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(k_{n-1})=\sum_{i_{n-1}=0}^{p-1}x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1})\,\mathrm{Cas}(k_{n-1},i_{n-1}), \quad (36)$$

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(-k_{n-1})=\sum_{i_{n-1}=0}^{p-1}x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1})\,\mathrm{Cas}(p-k_{n-1},i_{n-1}). \quad (37)$$

над выборками

$$x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1})=x(i_{n-1}+p\lambda_{n-1}+\cdots+p^{n-2}\lambda_2+p^{n-1}\lambda_1). \quad (38)$$

Сам вычислительный процесс быстрого анализа спектра реализуется изменением индекса $\gamma$ от $n-1$ до 1.

Для упорядочения Хармута алгоритм БПВК на первом уровне второго способа прореживания имеет вид [8]

$$X_{\text{ВК}}(pk_1+q_1)=\sum_{\lambda_1=0}^{p-1}X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1)\exp\Big[-j\frac{2\pi}{p}(k_1^{(1)}+q_1)\lambda_1\Big],$$

где

$$X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) \exp\left[-j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n-1} < k_1^{(m)} > i_1^{(m)}\right].$$

Применяя к нему ту же процедуру трансформации спектров, что использовалась и в предыдущих случаях, после преобразования получаем алгоритм БОПХ – Хармута на этом же уровне:

$$X_x(pk_1 + q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1}\left\{X_x^{\lambda_1}(k_1)\cos\left[\frac{2\pi}{p}(k_1^{(1)} + q_1)\lambda_1\right] + \right.$$

$$\left. + X_x^{\lambda_1}(-k_1)\sin\left[\frac{2\pi}{p}(k_1^{(1)} + q_1)\lambda_1\right]\right\},$$

$$k_1 = 0, 1, \ldots, p^{n-1} - 1; \quad q_1 = 0, 1, \ldots, p - 1,$$

где

$$X_x^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)\,\mathrm{Cas}(< k_1 >,\, i_1),$$

$$X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)\,\mathrm{Cas}(< -k_1 >, i_1)$$

есть спектр Хартли промежуточных выборок на первом уровне прореживания. В этом алгоритме искомый полный спектр выражается в виде линейной комбинации промежуточных спектров, в чем состоит его принципиальное отличие от БОПХ – Хармута для предыдущего способа прореживания.

Процесс прореживания можно продолжить, применив его к вычислению промежуточных спектров. При этом будут введены новые уровни прореживания. На $\gamma$-м уровне

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\gamma-1})}(pk_\gamma + q_\gamma) = \sum_{\lambda_\gamma=0}^{p-1}\left\{X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma)\cos\left[\frac{2\pi}{p}(k_\gamma^{(1)} + q_\gamma)\lambda_\gamma\right] + \right.$$

$$\left. + X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma)\sin\left[\frac{2\pi}{p}(k_\gamma^{(1)} + q_\gamma)\lambda_\gamma\right]\right\}, \quad (39)$$

$$q_\alpha, \lambda_\alpha = 0, 1, \ldots, p - 1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \gamma; \quad k_\gamma = 0, 1, \ldots, p^{n-\gamma} - 1,$$

где

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma) = \sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\mathrm{Cas}(< k_\gamma >, i_\gamma),$$

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma) = \sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\,\mathrm{Cas}(< -k_\gamma >, i_\gamma),$$

а промежуточные выборки описываются уравнением (35).

Для полного алгоритма БОПХ – Хармута $\gamma = n - 1$ и

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(k_{n-1}) = \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1})\,\mathrm{Cas}(k_{n-1},\quad i_{n-1})$$

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(-k_{n-1}) = \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1})\,\mathrm{Cas}(p - k_{n-1},\quad i_{n-1})$$

являются $p$-точечными ДПФ для обычных функций Хартли над выборками (38).

Перейдем теперь к упорядочению Адамара. Как показано в работе [8], для этого упорядочения ВКФ существование быстрых алгоритмов возможно только при одинаковых законах изменения номера и аргумента функций. Аналогичная ситуация складывается и в случае ОФХ. Здесь возможно построение двух типов БОПХ – Адамара: с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и спектра и с естественным порядком следования сигнала и спектра. Рассмотрим их.

**Быстрые обобщенные преобразования Хартли для системы ОФХ Адамара с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и спектра.** В этом случае для сигнала и спектра используется один и тот же вид прореживания, что применялся при разработке алгоритмов БОПХ – Пэли для первого способа прореживания. Поэтому алгоритм БПВК – Адамара на первом уровне прореживания имеет следующий вид [8]:

$$X_{\text{ВК}}(pk_1 + q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1)\exp\left(-j\frac{2\pi}{p}\lambda_1 q_1\right),$$

где

$$X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)\exp\left(-j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n-1} k_1^{(m)} i_1^{(m)}\right).$$

Преобразовав спектры Виленкина – Крестенсона в обобщенные спектры Хартли, получим

$$X_x(pk_1+q_1)=\sum_{\lambda_1=0}^{p-1}\left[X_x^{(\lambda_1)}(k_1)\cos\left(\frac{2\pi}{p}q_1\lambda_1\right)+X_x^{(\lambda_1)}(-k_1)\sin\left(\frac{2\pi}{p}q_1\lambda_1\right)\right],$$

где

$$X_x^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)\mathrm{Cas}(k_1, i_1),$$

$$X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)\mathrm{Cas}(-k_1, i_1).$$

Это и есть алгоритм БОПХ – Адамара на первом уровне данного способа прореживания.

Как и ранее, прореживание можно продолжить, применив его для вычисления промежуточных спектров $X_x^{(\lambda_1)}(k_1)$. На произвольном $\gamma$-м уровне алгоритм БОПХ – Адамара примет вид

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\gamma-1})}(pk_\gamma + q_\lambda) = \sum_{\lambda_\gamma=0}^{p-1}\left[X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma)\cos\left(\frac{2\pi}{p}q_\gamma\lambda_\gamma\right)+\right.$$
$$\left.+\, X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\gamma_\gamma\lambda_\gamma\right)\right], \quad (40)$$

$$q_\alpha, \lambda_\alpha = 0, 1, \ldots, p-1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \gamma; \quad k_\gamma = 0, 1, \ldots, p^{n-\gamma} - 1,$$

где

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma) = \sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\mathrm{Cas}(k_\gamma, i_\gamma),$$

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma) = \sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\mathrm{Cas}(-k_\gamma, i_\gamma),$$

а промежуточные выборки описываются уравнением (17).

При $\gamma = n - 1$ из этих соотношений получаем полный БОПХ – Адамара со следующими начальными условиями:

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(k_{n-1}) = \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1})\,\mathrm{Cas}(k_{n-1}, i_{n-1}),$$

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1})}(-k_{n-1}) = \sum_{i_{n-1}=0}^{p-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}(i_{n-1})\,\mathrm{Cas}(p - k_{n-1}, i_{n-1}),$$

вычисляемые с помощью $p$-точечных ДПФ – Хартли над выборками (21).

**Быстрые обобщенные преобразования Хартли для системы ОФХ Адамара с естественным порядком следования отсчетов сигнала и спектра.** Разобъем исходный сигнал и соответствующий ему спектр Виленкина – Крестенсона на $p$ соприкасающихся секций

$x_{\lambda_1}(i_1) = x(i_1 + p^{n-1}\lambda_1)$, $\lambda_1 = 0, 1, \ldots, p-1$; $i_1 = 0, 1, \ldots, p^{n-1}-1$, и $X_{\text{ВК}}(k_1 + p^{n-1}q_1)$, $q_1 = 0, 1, \ldots, p-1$; $k_1 = 0, 1, \ldots, p^{n-1}-1$. Для них можно записать [8], что

$$X_{\text{ВК}}(k_1 + p^{n-1}q_1) = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1} X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1) \exp\left(-j\frac{2\pi}{p} q_1\lambda_1\right),$$

где

$$X_{\text{ВК}}^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1) \exp\left(-j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n-1} k_1^{(m)} i_1^{(m)}\right).$$

Эти выражения определяют алгоритм БПВК – Адамара на первом уровне прореживания. Из него с помощью процедуры трансформации спектров можно получить аналогичный алгоритм БОПХ – Адамара на том же уровне

$$X_x(k_1 + p^{n-1}q_1) = \\ = \sum_{\lambda_1=0}^{p-1}\left[X_x^{(\lambda_1)}(k_1)\cos\left(\frac{2\pi}{p}q_1\lambda_1\right) + X_x^{(\lambda_1)}(-k_1)\sin\left(\frac{2\pi}{p}q_1\lambda_1\right)\right],$$

где

$$X_x^{(\lambda_1)}(k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)\,\mathrm{Cas}(k_1, i_1),$$

$$X_x^{(\lambda_1)}(-k_1) = \sum_{i_1=0}^{p^{n-1}-1} x_{\lambda_1}(i_1)\,\mathrm{Cas}(-k_1, i_1).$$

Продолжая прореживание, на $\gamma$-м уровне будем иметь

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\gamma-1})}(k_\gamma + p^{n-\gamma}q_\gamma) = \sum_{\lambda_\lambda=0}^{p-1}\left[X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma)\cos\left(\frac{2\pi}{p}q_\gamma\lambda_\gamma\right) + \right. \\ \left. + X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma)\sin\left(\frac{2\pi}{p}q_\gamma\lambda_\gamma\right)\right], \quad (41)$$

$$q_\alpha, \lambda_\alpha = 0, 1, \ldots, p-1; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \gamma; \quad k_\gamma = 0, 1, \ldots, p^{n-\gamma}-1,$$

где

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(k_\gamma) = \sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\,\mathrm{Cas}(k_\gamma, i_\gamma),$$

$$X_x^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma)}(-k_\gamma) = \sum_{i_\gamma=0}^{p^{n-\gamma}-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma}(i_\gamma)\,\mathrm{Cas}(-k_\gamma, i_\lambda),$$

а промежуточные выборки определяются уравнением (35).

Для полного БОПХ – Адамара $\gamma = n - 1$ и начальные условия определяются с помощью $p$-точечных обычных ДПФ Хартли над выборками (38). При реализации БОПХ – Адамара индекс $\gamma$ пробегает значения от $(n - 1)$ до 1.

**Оценка вычислительной сложности БОПХ.** Из математических описаний приведенных алгоритмов БОПХ следует, что все они вне зависимости от способов прореживания сигнала и спектра и упорядочения ОФХ являются итерационными процедурами с близкой вычислительной структурой и требуют для своей реализации одинакового числа вещественных умножений и сложений. Это позволяет провести оценку сложности только для одного алгоритма БОПХ, распространив затем полученные результаты на все виды БОПХ. Выберем для расчетов в качестве базового алгоритма алгоритм БОПХ – Пэли с прореженным порядком следования отсчетов сигнала и естественным порядком следования отсчетов спектра.

Начнем с подсчета числа умножений. На $\gamma$-м шаге при одной комбинации индексов $\{\lambda_\gamma\}$ необходимо для каждого значения $q_\gamma \neq 0$ и при всех значениях $\{k_\gamma\}$ выполнить число умножений на тригонометрические множители, равное $p^{n-\gamma}(p-1)+(p-1)(p-2)$. Здесь учтено, что часть произведений равны между собой. Для $q_\gamma = 0$ тригонометрические множители в алгоритме равны единице и нулю и умножения не выполняются. Поэтому для всех $p^{\gamma-1}$ комбинаций индексов $\{\lambda_\gamma\}$ число умножений составит $(p-1)[p^{n-1} + (p-2)p^{\gamma-1}]$. На последнем $(n-1)$-м шаге при образовании начальных значений требуется выполнить $(p-1)^2 p^{n-1}$ умножений на значения обычных функций Хартли. Суммируя результаты для всех значений $\gamma$ от 1 до $(n-1)$ получаем следующую оценку числа умножений в полном алгоритме БОПХ:

$$M_{\text{Б}} = p^{n-1}[p(p-2) + n(p-1)] - p + 2. \qquad (42)$$

Перейдем к сложениям. На каждом $\gamma$-м уровне при одной комбинации индексов $\{\lambda_\gamma\}$ для значения $q_\gamma = 0$ и всех значений $k_\gamma$ число сложений, выполняемых в алгоритме, равно $p^{n-\gamma}(p-1)$. Поскольку число комбинаций индексов $\{\lambda_\gamma\}$ равно $p^{\gamma-1}$, то общее число сложений для всех них будет $(p-1)p^{n-1}$. Для каждого значения $q_\gamma \neq 0$ и для всех $k_\gamma$ при одной комбинации $\{\lambda_\gamma\}$ число сложений будет равно $p^{n-\gamma}(p-1)^2 + (p-1)(p^{n-\gamma}-1)$, а для всех комбинаций — $(p-1)(p^n - p^{\gamma-1})$. В последней формуле учтено, что члены с одинаковыми множителями можно объединить, сократив тем самым число сложений. Это связано с тем, что в уравнениях БОПХ участвуют тригонометрические множители, принимающие только $p$ различных значений. Общее число сложений для $\gamma$-го шага будет равно $(p-1)[p^{n-1}(p+1) - p^{\gamma-1}]$. На последнем $(n-1)$-м шаге при вычислении начальных значений необходимо затратить $(p-1)p^n$ сложений. Окончательное общее число сложений на всех шагах БОПХ будет равно

$$A_{\text{Б}} = p^{n-1}[n(p^2-1)-p]+1. \tag{43}$$

Сравним вычислительную сложность прямых и быстрых алгоритмов. Для этого воспользуемся относительными коэффициентами по умножениям $\theta_{\text{М}} = M_{\text{П}}/M_{\text{Б}}$ и сложениям $\theta_A = A_{\text{П}}/A_{\text{Б}}$. С учетом формул (9), (42) и (43) они будут равны

$$\theta_{\text{М}} = \frac{p^{2n}}{p^{n-1}[p(p-2)+n(p-1)]-p+2} \approx \frac{p^{n+1}}{p(p-2)+n(p-1)},$$

$$\theta_{\text{А}} = \frac{p^n(p^n-1)}{p^{n-1}[n(p^2-1)-p]+1} \approx \frac{p^{n+1}}{n(p^2-1)-p}.$$

Даже при наименьших возможных значениях $p = 2$ и $n = 2$ эти коэффициенты существенно больше единицы. С увеличением $p$ и $n$ они быстро возрастают.

Следует отметить, что при конкретных значениях $p$ реальное число умножений и сложений в БОПХ может быть дополнительно уменьшено за счет исключения тривиальных умножений на нули и единицы и более рациональной организации вычислительного процесса. При этом будут получены эффективные оптимизированные алгоритмы БОПХ.

**Заключение.** Разработаны теоретические основы скалярного метода синтеза быстрых преобразований в базисах новых дискретных вещественных параметрических обобщенных функций Хартли для различных способов их упорядочения. Полученные алгоритмы быстрого анализа обобщенного спектра Хартли имеют высокую вычислительную эффективность и могут использоваться в качестве действенного инструмента спектрального анализа при решении различных задач ЦОС. Они носят обобщенный характер и при конкретных значениях параметра $p$ могут приводить как к известным, так и к новым результатам. Так, например, при $p = 2$ и $p = 4$, когда ОФХ превращаются в функции Уолша, быстрые обобщенные преобразования Хартли переходят в соответствующие быстрые преобразования Уолша [14]. Интересно, что при $p = N$ и $n = 1$, когда ОФХ становятся обычными функциями Хартли, БОПХ переходят не в быстрые преобразования Хартли, а в обычные ДПФ Хартли, причем при любом способе упорядочения ОФХ.

Обобщенный характер новых быстрых преобразований Хартли позволяет использовать их как при обобщении алгоритмов решения известных задач ЦОС, так и при решении новых задач обработки сигналов любой формы. Расширению области прикладного применения БОПХ будет способствовать разработка специальных быстрых процедур анализа скользящего спектра, используемых в обработке сигналов по методу “скользящего окна” [8]. Разработка таких скользящих процедур в ОФХ рассматривается автором в качестве актуальной задачи последующих исследований.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Оппенгейм А.*, *Шафер Р.* Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2007. 856 с.
2. *Айфичер Э.*, *Джервис Б.* Цифровая обработка сигналов: практический подход. М.: ИД “Вильямс”, 2004. 992 с.
3. *Арслан Х.*, *Чен Чж. Н.*, *Бенедетто М.* Сверхширокополосная беспроводная связь. М.: Техносфера, 2008. 550 с.
4. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.
5. *Бортовые* инфракрасные фурье-спектрометры для температурно-влажностного зондирования атмосферы Земли / Ю.М. Головин, Ф.С. Завелевич, А.Г. Никулин, Д.А. Козлов, Д.А. Морохов, И.А. Козлов, С.А. Архипов, А.С. Романовский // Журнал Президиума РАН “Исследование Земли из космоса”. 2013. № 6. С. 1–13.
6. *Многоцелевой* фурье-спектрометр космического базирования / Б.Е. Мошкин, В.А. Вагин, А.В. Шарков, С.В. Максименко, Ю.Р. Мацицкий, А.С. Романовский // Приборы и техника эксперимента. 2012. № 6. С. 78–84.
7. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов. радио, 1972. 352 с.
8. *Сюзев В.В.* Основы теории цифровой обработки сигналов. М.: РТСофт, 2014. 752 с.
9. *Трахтман А.М.*, *Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
10. *Сюзев В.В.* Методы синтеза быстрых преобразований Виленкина – Крестенсона // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 1. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/687462.html
11. *Сюзев В.В.* Обобщенные функции и преобразования Хартли в системах счисления с постоянным основанием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 2. С. 60–79.
12. *Брейсуэлл Р.* Преобразования Хартли. М.: Мир, 1990. 175 с.
13. *Сюзев В.В.* Теоретические основы спектрального анализа в базисе Хартли // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10. URL: http://technomag.edu.ru/doc/230816.html
14. *Сюзев В.В.* Скалярный метод синтеза быстрых преобразований Уолша – Адамара // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. Спец. вып. “Информационные технологии и компьютерные системы”. 2011. С. 128–137.


## REFERENCES


[1] Oppenheim A., Schafer R. Digital Signal Processing. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[2] Ifeachor Emmanuel, Jervis Barrie. Digital Signal Processing: A Practical Approach. Addison Wesley, 2nd Ed., 2002.

[3] Arslan Huseyin, Chen Zhi Ning, Di Benedetto Maria-Gabriella. Ultra Wideband Wireless Communication. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.

[4] Zalmanzon L.A. Preobrazovaniya Fur’e, Uolsha, Khaara i ikh primenenie v upravenii, svyazi i drugikh oblastyakh [Fourier, Walsh, and Haar Transforms and Their Application for Controlling, Communications and Other Fields]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 496 p.

[5] Golovin Yu.M., Zavelevich F.S., Nikulin A.G., Kozlov D.A., Monakhov D.O., Kozlov I.A., Arkhipov S.A., Tselikov V.A., Romanovskiy A.S. Airborne Infrared Fourier Spectrometer for the Temperature and Humidity Sensing the Earth's Atmosphere. *Issledovanie Zemli iz kosmosa* [Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics], 2013, no. 6, pp. 1–13 (in Russ.).
[6] Moshkin B.E., Vagin V.A., Zharkov A.V., Maksimenko S.V., Matsitskii Yu.P., Romanovskii A.S., Khorokhorin A.I., Shilov M.A. A Prototype of the Multipurpose Space-Based Fourier Spectrometer Pribory i tekhnika eksperimenta [Instruments and Experimental Techniques], 2012, no. 6, pp. 680–687.
[7] Trakhtman A.M. Vvedenie v obobshchennuyu spektral'nuyu teoriyu signalov [Introduction to the Generalized Spectral Theory of Signals]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1972. 352 p.
[8] Syuzev V.V. Osnovy teorii tsifrovoy obrabotki signalov [Basic Theory of Digital Signal Processing]. Moscow, RTSoft Publ., 2014. 752 p.
[9] Trakhtman A.M., Trakhtman V.A. Osnovy teorii diskretnykh signalov na konechnykh intervalakh [Basic Theory of Discrete Signals on Finite Intervals]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1975. 208 p.
[10] Syuzev V.V. Synthesis methods of the fast Vilenkin-Chrestenson transforms. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. Science and Education], 2014, no. 1 (in Russ.). Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/687462.html
[11] Syuzev V.V. Generalized Functions and Hartley Transforms in Number Systems with a Permanent Base. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2014, no. 2, pp. 60–79 (in Russ.).
[12] Bracewell Ronald N. The Hartley Transform. Oxford University Press. N.Y. Clarendon Press. Oxford, 1986.
[13] Syuzev V.V Spectral analysis in Hartley basis: theoretical foundations. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. Science and Education], 2011, no. 10 (in Russ.). Available at: http://technomag.edu.ru/doc/230816.html
[14] Syuzev V.V Scalar Method of Synthesis of Fast Walsh-Hadamard Transformations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr., Spetsvyp* "*Informatsionnye tekhnologii i komp'yuternye sistemy*" [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng., Spec. Issue Information Technologies and Computer Systems], 2011, pp. 128–137 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 15.06.2015

Сюзев Владимир Васильевич — д-р техн. наук, профессор кафедры "Компьютерные системы и сети" МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Suzev V.V. — D.Sc. (Eng.), Professor, Department of Computer Systems and Networks, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Сюзев В.В. Быстрые обобщенные преобразования Хартли в одноосновных системах счисления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 6. С. 63–81.

**Please cite this article in English as:**

Suzev V.V. Generalization of the fast Hartley transform in single-base notation systems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 6, pp. 63–81.