DOI: 10.18698/0236-3933-2015-6-21-29

УДК 629.78

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ В ОКРЕСТНОСТИ МЕНЬШЕГО ТЕЛА ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Ф.В. Звягин, **Л.Н. Лысенко**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: pk-bmstu@ya.ru

При реализации миссий достижения планет солнечной системы получить на конечном этапе перелета рабочую орбиту, на поддержание которой требуется минимальный расход характеристической скорости, невозможно без решения задачи определения области существования периодических решений (движений с заданными характеристиками) в окрестности планеты назначения. Предложен эффективный интегральный критерий, основанный на принципе наименьшего действия и позволяющий по заданным начальным условиям определить принадлежность полученной траектории классу периодических или квазипериодических орбит задачи трех тел, а также выделить области начальных условий движения космического аппарата, которым соответствуют орбиты рассматриваемого класса. Полученные результаты демонстрируют высокую устойчивость и избирательность критерия, возможность его применения для анализа траекторий в автоматическом режиме вычислений.

Ключевые слова: эллиптическая ограниченная задача трех тел, орбиты F-класса, периодические орбиты, ляпуновские орбиты, интегральный критерий, принцип наименьшего действия.

INTEGRAL CRITERION FOR DETERMINING THE EXISTENCE DOMAIN OF PERIODIC ORBITS IN THE VICINITY OF SMALLER BODY IN THREE-BODY PROBLEM

F.V. Zvyagin, **L.N. Lysenko**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: pk-bmstu@ya.ru

While accomplishing space missions to the planets of the Solar System, it is impossible to obtain the operating orbit which requires the least expenditure of characteristic velocity without solving the problem of determining the existence domain of periodic solutions (motions with specified characteristics) in the vicinity of the target planet. An effective integral criterion is proposed. The criterion is based on the principle of the least action. Using the given initial conditions it allows both determining an attribution of the obtained trajectory to a class of either periodic or quasi-periodic orbits of the three-body problem and selecting some initial conditions of a spacecraft motion corresponding to the considered class orbits. These results demonstrate the high stability and selectivity of the criterion, as well as the possibility of its application to the analysis of the trajectories in the automated computation mode.

Keywords: elliptic restricted three-body problem, F-orbits, periodic orbits, Lyapunov orbits, integral criterion, principle of least action.

Постановка задачи. Одной из задач проектирования миссий автоматических станций и пилотируемых аппаратов дальнего космоса является получение на конечном этапе перелета периодической рабочей орбиты, требующей для поддержания минимального расхода характеристической скорости. Разработка перспективных миссий должна учитывать все возможные варианты реализации периодических орбит у планеты назначения, в том числе ранее не рассматриваемых. Таким образом, возникает задача определения области существования периодических решений в окрестности некоторой планеты. Поскольку предполагается, что периодическая орбита реализуется относительно самой планеты, а не ее спутников, то решение может быть найдено в рамках задачи трех тел. В случае поиска приемлемых периодических орбит относительно спутников планеты более корректной будет постановка задачи четырех тел, когда в исследуемую систему помимо Солнца и планеты включается также и ее спутник. В противном случае результат решения будет сопровождаться существенными погрешностями вследствие неучтенных возмущений от Солнца [1].

Для определения областей существования периодических орбит были предложены различные критерии, однако:

разработанные критерии определения областей существования периодических орбит для интегрируемых задач (в применении к задачам небесной механики — задаче двух тел) некорректны для задачи трех тел;

существующий аналитический критерий выделения областей движения в задаче трех тел, использующий интеграл энергии, следует признать неполным вследствие того, что, например, орбиты F-класса [2–5], называемые в англоязычной литературе Distant Retrograde Orbits (DRO), что в переводе на русский язык означает "удаленные ретроградные орбиты", не могут быть выделены с его помощью.

Кратко задачу можно сформулировать следующим образом. Требуется по заданным начальным условиям (НУ) движения космического аппарата (КА) определить принадлежность полученной траектории классу периодических или квазипериодических орбит задачи трех тел, а также выделить области НУ движения КА, которым соответствуют периодические орбиты указанной задачи.

Периодические орбиты задачи трех тел и принцип наименьшего действия. В статье "О некоторых частных решениях задачи трех тел" в журнале Bulletin astronomique (1884 г.) Анри Пуанкаре дал следующее объяснение [6] важности получения периодических решений как "промежуточных орбит": "*произвольное решение остается вблизи такого решения в течение длительного промежутка времени, если эти решения имеют близкие начальные условия*". Более точно это утверждение было сформулировано в 1892 г. в § 36 первого тома "Новые методы небесной механики" [7]: "*Более того: это факт, который я не могу доказать строго, но который, тем не менее, кажется мне* *очень правдоподобным. Для заданных уравнений формы ... и произвольного решения этих уравнений всегда можно найти периодическое решение (с периодом, который предположительно может быть очень большим) такое, что разность между двумя решениями произвольно мала. В действительности, эти решения так ценны для нас, поскольку они, так сказать, единственная возможность проникнуть туда, куда, как предполагалось до сих пор, проникнуть нельзя*". А также: "*Рассмотрим теперь, что говорит нам принцип наименьшего действия? Он учит нас: для того чтобы переместиться из начального положения в момент времени t_0 в положение в момент времени t_1, система должна описывать такой путь, что в интервале времени от t_0 до t_1 среднее значение "действия" (т.е. разность между двумя энергиями T и U) было как можно меньше. Первый из этих двух принципов (сохранение энергии) на самом деле является следствием второго. Если обе функции T и U известны, то этого принципа достаточно для определения уравнений движения*".

Другими словами, согласно Пуанкаре, каждое решение $x(t) = (\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \bar{r}_3(t)); t \in [t_0; t_1]$ задачи трех тел, а в более общем случае каждое решение задачи механики консервативных систем, является критической точкой лагранжева действия $\int L(x(t), \dot{x}(t))\,dt$, где лагранжиан определяется как разность между кинетической и потенциальной энергиями $L(x, \dot{x}) = T(x) - U(x)$. Именно критической точки, но не обязательно минимума.

Уравнения движения задачи эллиптической ограниченной задачи трех тел и аналог интеграла энергии. Уравнения движения эллиптической ограниченной задачи трех тел (ЭОЗТТ) в неравномерно вращающейся (пульсирующей) барицентрической системе координат в безразмерных величинах при расстоянии между основными телами (меньшего массы μ и большего массы $(1-\mu)$), принятом равным единице, истинной аномалии меньшего тела υ, постоянной тяготения, равной единице, и эксцентриситете орбит основных тел e могут быть записаны как [8]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial \upsilon^2} - 2\frac{dy}{d\upsilon} = \frac{1}{1+e\cos\upsilon}\frac{\partial\Omega}{\partial x};\\ &\frac{\partial^2 y}{\partial \upsilon^2} + 2\frac{dx}{d\upsilon} = \frac{1}{1+e\cos\upsilon}\frac{\partial\Omega}{\partial y}\\ &\frac{\partial^2 z}{\partial \upsilon^2} = \frac{1}{1+e\cos\upsilon}\frac{\partial\Omega}{\partial z} \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где силовая функция определена в следующей форме:

$$\Omega = \frac{1-\mu}{r_0} + \frac{\mu}{r_1} + \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{2}ez^2\cos\upsilon,\ r_0^2 = (x+\mu)^2 + y^2 + z^2,$$
$$r_1^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2.$$

Ограниченная эллиптическая задача трех тел не имеет интеграла энергии, который обычно заменяется его приближением, а именно функцией Якоби в представлении, предложенном Маршалом [9] и определяемом как

$$\begin{aligned}(x, y, z, V_x, V_y, V_z) = \\ = \mu\left((\mu+x-1)^2 + \frac{2}{\sqrt{(\mu+x-1)^2+y^2+z^2}} + y^2 + z^2\right) + \\ + (1-\mu)\left((\mu+x)^2 + \frac{2}{\sqrt{(\mu+x)^2+y^2+z^2}} + y^2 + z^2\right) - \\ - (e\cos\upsilon+1)\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2+z^2\right),\end{aligned} \quad (2)$$

где V_x, V_y, V_z — скорости движения пассивно гравитирующей материальной точки (КА). В общем случае, как следует из (2), третье слагаемое зависит от положения материальной точки на оси аппликат.

На рис. 1 приведен графический образ функции Якоби для различных значений интеграла энергии при фиксированном значении истинной аномалии меньшего тела. Характерной особенностью пред-

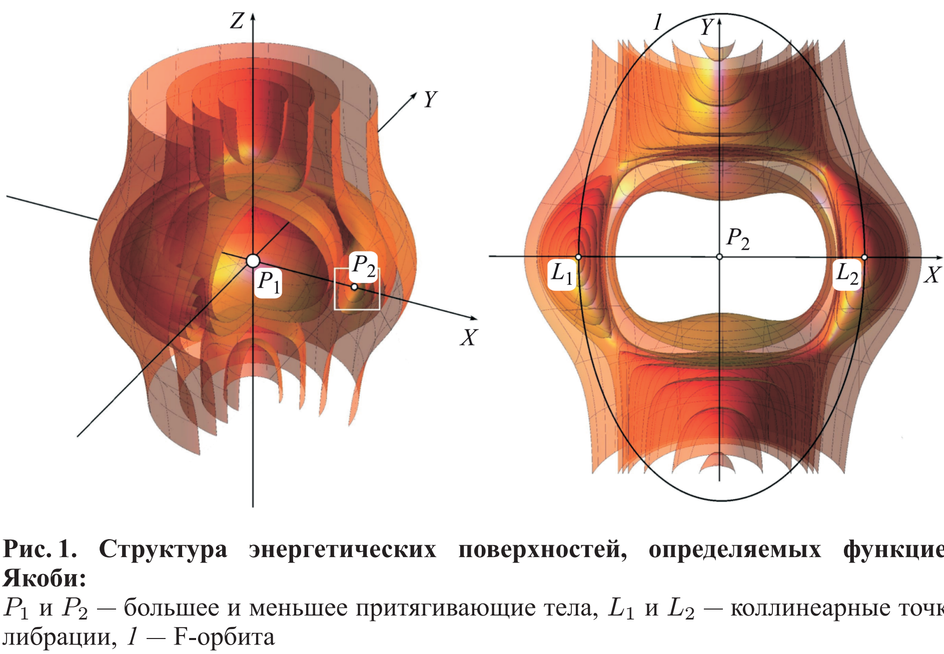

Рис. 1. Структура энергетических поверхностей, определяемых функцией Якоби:
P_1 и P_2 — большее и меньшее притягивающие тела, L_1 и L_2 — коллинеарные точки либрации, *1* — F-орбита

ставленной структуры является наличие энергетического тора вокруг всей орбиты обращения меньшего притягивающего тела относительно большего. Четко выявляются энергетические структуры в окрестностях коллинеарных точек либрации и самого меньшего притягивающего тела.

Интегральный критерий для выделения областей существования периодических орбит. Основываясь на приведенном принципе наименьшего действия, введен критерий, позволяющий кластеризовать орбиты перелета КА с круговой орбиты ожидания на ляпуновскую орбиту любого размера относительно коллинеарной точки либрации L_1 [10].

Смысл критерия заключается в вычислении лагранжиана задачи трех тел вдоль траектории движения КА.

Очевидно, что для каждой i-й траектории движения можно вычислить характеризующий ее показатель

$$\Gamma_{t_0}^i = \int\limits_{t_0^i}^{t_1^i} \Big(\Gamma\Big(x_{t_0}^i(t), y_{t_0}^i(t), z_{t_0}^i(t), \dot{x}_{t_0}^i(t), \dot{y}_{t_0}^i(t), \dot{z}_{t_0}^i(t)\Big) - \\ - \Big(x_{t_0}^i(t), y_{t_0}^i(t), z_{t_0}^i(t), 0, 0, 0\Big)\Big)dt, \quad (3)$$

представляющий собой интеграл по времени от разности функций Якоби для движущейся и покоящейся точек, имеющих одни и те же координаты.

Примеры и результаты применения интегрального критерия при исследовании периодических орбит. Результаты численного исследования представлены на рис. 2. В качестве начальных условий интегрирования траектории КА принималось его положение на оси абсцисс введенной системы координат, начальная скорость варьировалась вдоль оси ординат.

Наиболее важным является тот факт, что в первом приближении границы области существования периодических орбит по положению и скорости образованы ляпуновскими орбитами снизу и F-орбитами сверху. Этот факт можно объяснить из интерпретации графического образа функции Якоби (см. рис. 1) и рис. 3, описывающего структуру характеристических орбит в окрестности Земли.

С энергетической точки зрения, тело, выведенное на ляпуновскую орбиту любого радиуса, не может совершить охват меньшего притягивающего тела. Возмущение ляпуновской орбиты в сторону увеличения ее энергии приводит к образованию гомоклинической траектории, по которой рассматриваемое тело может совершить последовательный перелет из окрестности одной коллинеарной точки либрации в окрестность другой. Дальнейшее увеличение энергии приводит к уходу либо

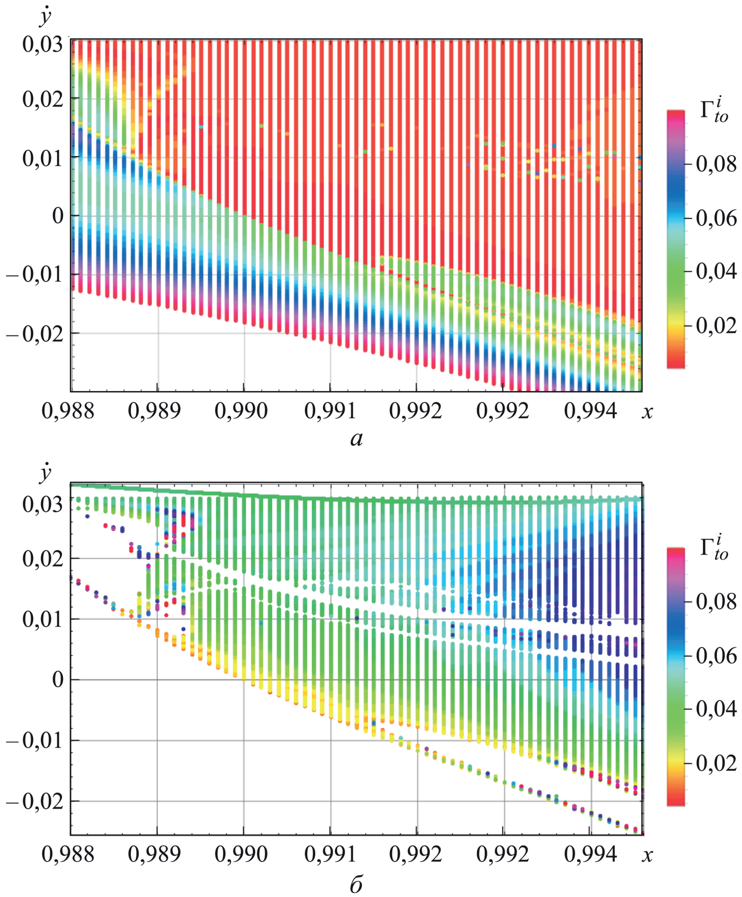

Рис. 2. Карта зависимости Γ_{to}^{i} для периодических орбит Земли:
а — при ограничении $\Gamma_{to}^{i} < 0{,}1$; *б* — при ограничении $\Gamma_{to}^{i} < 0{,}01$; значения приведены в безразмерных величинах для системы Солнце–Земля–КА

во внешние области меньшей планеты, либо во внутренние, т.е. в последнем случае тело начинает совершать обращения относительно меньшего притягивающего тела внутри сферы Хилла [11].

Ограничение сверху объясняется тем, что F-орбиты, несмотря на свое периодическое движение относительно меньшего притягивающего тела, фактически являются орбитами относительно большего. Они лежат в энергетическом торе, охватывающем всю орбиту меньшего тела. Область существования этих орбит весьма значительна и фактически точка пересечения оси абсцисс их восходящими ветвями может располагаться во всем промежутке между притягивающими телами. Внутри сферы Хилла F-орбиты практически сливаются с орбитами, являющимися решением задачи двух тел. Поскольку F-орбиты являются устойчивыми [12], то при автоматических численных расчетах верхняя граница существования периодических решений ЭОЗТТ оказывается размытой. Увеличение энергии приводит к возмущению F-орбиты и дальнейшей ее трансформации (при условии еще большего

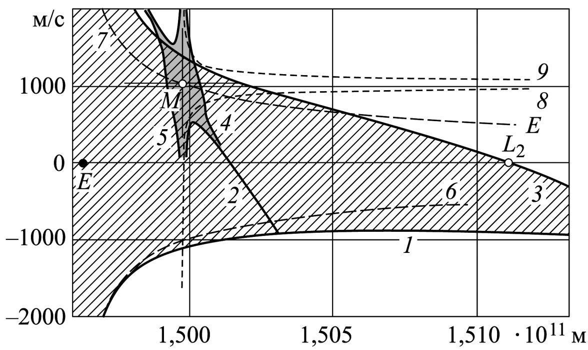

Рис. 3. Структура характеристических орбит в окрестности Земли:
E — Земля, M — Луна, L_2^E — коллинеарная точка либрации Земли; кривые НУ для движения: *1* — по F-орбитам Земли; *2* — по F-орбитам Луны; *3* — по ляпуновским орбитам Земли в окрестности точки L_2^E; *4*, *5* — по ляпуновским орбитам Луны в окрестностях точек L_1^M, L_2^M; *6–8* — по круговым орбитам вокруг Земли и Луны; штриховая и серая области — возможное существование периодических орбит Земли и Луны

увеличения энергии) в орбиту относительно большего притягивающего тела.

Проведенное численное исследование дает основание для следующих заключений.

1. Критерий позволяет четко выделить области существования периодических орбит ЭОЗТТ.
2. Топология областей для планет разной массы одинакова.
3. В первом приближении границы области существования периодических орбит по положению и скорости образованы ляпуновскими орбитами снизу и F-орбитами сверху.
4. Дополнительные лакуны внутри областей существования периодических орбит возникают вследствие возмущения гомо- и гетероклинических траекторий и перехода их в класс пролетных, а также вследствие удаления из рассмотрения орбит столкновения.

Выводы. Предложен эффективный критерий определения области существования периодических решений в окрестности меньшего тела эллиптической ограниченной задачи трех тел.

Данный критерий основан на принципе наименьшего действия и проявляет эффективные возможности при определении топологии траекторий движения КА. С его помощью может быть проведена кластеризация траекторий различных типов, установлены области существования периодических и квазипериодических орбит.

Критерий достаточно просто реализуется современными вычислительными средствами и позволяет выбирать периодические траектории в автоматическом режиме.

Найденные области существования периодических решений демонстрируют высокую избирательность критерия и хорошую топологическую устойчивость.

Проведенный качественный анализ полученных границ областей существования периодических орбит подтвердил достоверность результатов применения данного критерия даже в условиях сильных возмущений НУ движения по ляпуновским орбитам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Звягин Ф.В.*, *Лысенко Л.Н.* Анализ реализуемости продолжительного удержания КА в окрестности спутника планеты при движении по управляемым и свободным орбитам F-класса // ОНТЖ “Полет”. 2014. № 9. С. 15–20.
2. *Звягин Ф.В.* Двухимпульсные перелеты с околоземных орбит ожидания на орбиты F-класса задачи трех тел // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 04. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/353104.html
3. *Лысенко Л.Н.*, *Звягин Ф.В.* Перспективы использования орбит F-класса при решении задач баллистического обеспечения межпланетных полетов // ОНТЖ “Полет”. 2013. № 4. С. 31–37.
4. *Звягин Ф.В.*, *Лысенко Л.Н.* Энергетический анализ перспектив использования орбит F-класса для построения спутниковых систем прикладного назначения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 3. С. 81–91.
5. *Звягин Ф.В.* Одноимпульсные межорбитальные перелеты в системе тел Солнце–Земля–Луна // Изв. РАРАН. 2012. № 3. С. 82–85.
6. *Poincare H.* Sur certaines solutions particulieres du probleme des trios corps // Bulletin astronomique / Sous les auspices de l’Observatoire de Paris, 1884. 642 p.
7. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. М.: Наука, 1971. 772 с.
8. *Абалакин В.К.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука, 1976. 864 с.
9. *Маршал К.* Задача трех тел. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 640 с.
10. *Звягин Ф.В.* Об оптимизации орбит перелета в окрестность точки либрации L_1 системы Солнце–Земля // ОНТЖ “Полет”. 2010. № 4. С. 19–24.
11. *Wang Sang Koon*. Dynamical Systems: The Three-body Problem and Space Mission Design (Interdisciplinary Applied Mathematics) // Springer. 2011. 336 p.
12. *Звягин Ф.В.* Об одном классе орбит в задачах трех и четырех тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2010. № 2. С. 105–113.

REFERENCES

[1] Zvyagin F.V., Lysenko L.N. Feasibility Analysis of Prolonged Keeping the Spacecraft Moving on Controlled and Free F-Class Orbits near a Planet’s Satellite. *ONTZh Polet*, 2014, no. 9, pp. 15–20 (in Russ.).

[2] Zvyagin F.V. Double-pulse flights from near-earth waiting orbits to F-orbits of the three-body-problem. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2012, no. 4. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/353104.html

[3] Lysenko L.N., Zvyagin F.V. Prospects for Using F-Class Orbits in Solving Problems of Interplanetary Mission Ballistic Support. *ONTZh Polet*, 2013, no. 4, pp. 31–37 (in Russ.).

[4] Zvyagin F.V., Lysenko L.N. Energy Analysis of Prospects of Using the F-Class Orbits for Formation of Applied Satellite Systems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2014, no. 3, pp. 81–91 (in Russ.).

[5] Zvyagin F.V. One-Impulse Interorbital Flights in Sun-Earth-Moon System. *Izvestiya Rossiyskoy akademii raketnykh i artilleriyskikh nauk* [Proc. Russian Academy of Rocket and Artillery Sciences], 2012, no. 3, pp. 82–85 (in Russ.).

[6] Poincaré H. Sur certaines solutions particulieres du probleme des trios corps // Bulletin astronomique. Sous les auspices de l'Observatoire de Paris, 1884. 642 p.

[7] Poincaré. H. Izbrannye trudy v trekh tomakh [Selected works in three volumes]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 358 p.

[8] Abalakin V.K.Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoy mekhanike i astrodinamike [Reference Book on Celestial Mechanics and Astrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 864 p.

[9] Marshal K. Zadacha trekh tel [Three-Body Problem]. Moscow –Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2004. 640 p.

[10] Zvyagin F.V. On the Optimization of Flight Orbits in the Neighborhood of L_1 Libration Point in the Sun-Earth System. *ONTZh Polet*, 2010, 4, pp. 19–24 (in Russ.).

[11] Wang Sang Koon. Dynamical Systems: The Three-body Problem and Space Mission Design (Interdisciplinary Applied Mathematics). Springer, 2011. 336 p.

[12] Zvyagin F.V. About One Class of Orbits in Three- and Four-Body Problems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2010, no. 2, pp. 105–113 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 30.06.2015

Лысенко Лев Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры "Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов" МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Lysenko L.N. — D.Sc. (Eng.), Professor, Department of Dynamics, Ballistics and Flight Vehicles Movement Control, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Звягин Феликс Валерьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры "Системы автоматического управления" МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Zvyagin F.V. — Ph.D. (Eng.), Associate Professor, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Звягин Ф.В., Лысенко Л.Н. Интегральный критерий определения области существования периодических орбит в окрестности меньшего тела задачи трех тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 6. С. 21–29.

Please cite this article in English as:

Zvyagin F.V., Lysenko L.N. Integral criterion for determining the existence domain of periodic orbits in the vicinity of smaller body in three-body problem. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 6, pp. 21–29.