

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 531.15

УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В ПОДВЕСЕ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

В.Ф. Судаков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: vvfss.inbox.ru

Исследована обобщенная модель некоторого класса механизмов в виде физического маятника, находящегося в подвесе на вращающейся платформе. Угловая скорость платформы задана и постоянна. Трение оси подвеса отсутствует. Найден гамильтониан системы и выполнено каноническое преобразование к переменным действие–фаза, что позволило получить две зависимости: угловой скорости вращения маятника и времени от угла поворота маятника. Зависимости рассматриваются как заданное в параметрическом виде соотношение между угловой скоростью вращения маятника и временем. Эта функция не имеет аналитического представления и реализована в виде зависимости, полученной с помощью компьютера. Алгоритм реализации в среде MathCAD позволяет оперативно исследовать изменение динамики угловой скорости при изменении характеристик маятника и подвеса, а также скорости вращения платформы.

Ключевые слова: маятник, моменты инерции, гамильтониан, канонические преобразования, канонические переменные действие–фаза.

ANGULAR VELOCITY OF PHYSICAL PENDULUM SUSPENDED ON MOVABLE BASE

V.F. Sudakov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: vvfss.inbox.ru

The paper considers a generalized model of some mechanisms presented in the form of a physical pendulum suspended on a rotating platform. The angular velocity of the platform is predetermined and constant. There is no friction of a suspension axis. The Hamiltonian of the system is found. The canonical transformation to action-phase variables is determined. It allows obtaining two relations: the pendulum's angular velocity and the relation of time to the pendulum's angular displacement. These relations are considered in terms of correlation between the pendulum's angular velocity and time. The correlation is defined in a parametric form. This function has no analytical representation. It is presented in the form of a relation calculated using the computer. The algorithm of its implementation in MathCAD software allows on-line monitoring the dynamic changes of the angular velocity, if the characteristics of a pendulum, a suspension, and the angular velocity of a platform rotation are changing as well.

Keywords: physical pendulum, moments of inertia, the Hamiltonian, canonical transformations, canonical action–phase variables.

Введение. Физический маятник (твердое тело, вращающееся без трения относительно одной оси, с центром масс вне этой оси) — классический пример нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы и одним действующим моментом — моментом силы тяжести. Данный пример всесторонне исследован, результаты исследования приведены в многочисленных источниках (например, работа [1]). Описание движения маятника получено как на фазовой плоскости, так и во временном представлении: обобщенная координата (угол) и обобщенный импульс (кинетический момент) определены как функции времени. В случае немалых колебаний и вращательного движения маятника это эллиптические функции Якоби. Они табулированы, их свойства известны, но временная зависимость не всегда может быть показана графически. В общем случае немалые колебания и вращения физического маятника исследованы только качественно. Проще и точнее представлять движение маятника в виде ряда Фурье. Такие результаты тоже известны. Другой путь — строить временные зависимости с помощью компьютера, не прибегая к программированию (т.е. в среде транслятора). Этот путь неоднозначен, возможны варианты. Один из них будет приведен в настоящей работе, но для более сложной модели, чем простой физический маятник.

Рассмотрим следующую модель. Маятниковый подвес (в котором установлена ось вращения маятника без трения в подшипниках) установлен (или подвешен) на платформе, вращающейся с известной постоянной угловой скоростью. Число степеней свободы маятника в таком подвесе не увеличивается. Однако он движется в неинерциальной системе отсчета. Силы инерции создают дополнительный момент на оси вращения, который должен зависеть не только от скорости вращения платформы, но и от угла поворота маятника. В зависимости от начальной энергии (она инвариант в этой системе) маятник может либо совершать немалые колебания, либо вращаться.

В случае немалых колебаний обычно ограничиваются определением на фазовой плоскости соответствующих особых точек (центров). В отличие от маятника на неподвижном подвесе в общем случае может быть две особые точки. Определяют также частоту малых колебаний в окрестности этих центров. Что касается вращательного движения (либрации), то оно, насколько известно, для такой модели не рассматривалось. В то же время вращательное движение представляет несомненный практический интерес. Теоретическое исследование вращательного движения важно потому, что в более сложных моделях, например в задачах электропривода, его аналитическое описание может быть использовано как порождающее решение (в теории возмущений).

Постановка задачи — найти зависимость угловой скорости либрации физического маятника на вращающемся с постоянной угловой

скоростью маятниковом подвесе от времени. Эта задача существенно сложнее, чем задача о маятнике на неподвижном подвесе, и нет шансов определить аналитический вид этой зависимости даже как специальной функции. Поэтому необходимо ориентироваться на построение зависимости с помощью компьютера. Использование компьютера тоже нетривиально, так как ввиду отсутствия указанной аналитической зависимости следует искать другую возможность построения зависимости.

В работе предложен и реализован метод представления исходных данных для построения машинного графика указанной выше временной зависимости в режиме транслятора, т.е. как линейного (без ветвлений) последовательного алгоритма. Кроме того, новым является использование для построения зависимости с помощью компьютера гамильтонова подхода в переменных действие – фаза. Отметим, что исследование немалых колебаний проводят исключительно на основе лагранжевых уравнений второго рода (например, см. работу [2]).

Характеристики маятника. Маятник представляет собой твердое тело из стали марки X25H20C2 (удельный вес $\rho = 8 \text{ г/см}^3$) с конической поверхностью, которое подвешено на горизонтальной оси вращения. Вид поверхности совершенно не критичен и конкретизирован только для определенности (может отсутствовать любой вид симметрии). Маятник может совершать относительно этой оси как колебательные (вибрационные), так и вращательные (либрационные) плоско-параллельные движения. Маятниковый подвес (стойка, удерживающая ось вращения) установлен на горизонтальную платформу, которая вращается с заданной постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг своей оси симметрии. Ось симметрии маятника образует с вертикалью (ось вращения платформы) угол θ .

Схема маятникового подвеса на платформе и используемые системы координат показаны на рис. 1. Инерциальная (неподвижная) система координат образована тремя осями $\vec{n}_{x_0}, \vec{n}_{y_0}, \vec{n}_{z_0}$. Назовем ее базовой системой координат (БСК). Относительно нее вращается неинерциальная система координат (относительно платформы неподвижна), образованная осями $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$. Эта система координат – платформенная (ПСК). Свяжем ПСК с подвесом: орт \vec{n}_x направим по оси вращения, $\vec{n}_z = n_{z_0}$, а орт \vec{n}_y образует с другими осями правую тройку ортов. Вектор угловой скорости вращения ПСК (относительно БСК) направлен по вертикали, т.е. $\vec{\varphi} = \dot{\varphi} \vec{n}_{x_0}$.

Положение точки подвеса маятника O_1 относительно центра платформы O определяется в ПСК вектором $\vec{R}_{O_1} = X\vec{n}_x + Y\vec{n}_y + Z\vec{n}_z$, где X, Y – координаты точки подвеса в плоскости платформы; Z – высота подвеса относительно платформы. Ось симметрии маятника, которая является одной из его главных осей инерции [3], задается единичным

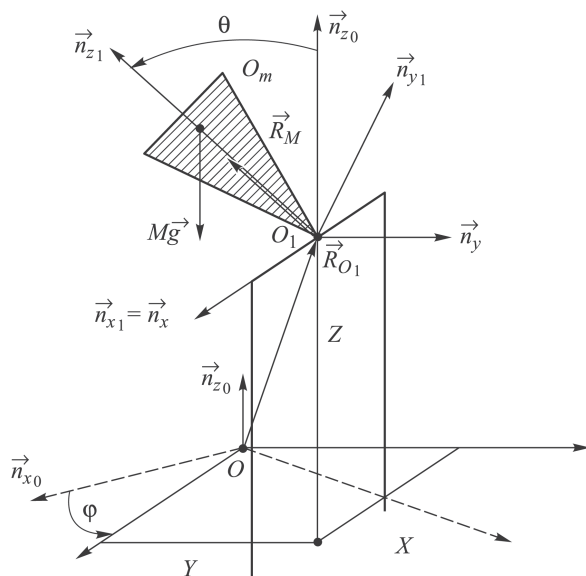


Рис. 1. Схема маятниковго подвеса на вращающейся платформе и используемые системы координат

вектором \vec{n}_{z_1} . Две другие главные оси инерции маятника ортогональны ей и друг другу (в остальном они могут быть выбраны произвольно [3]). В качестве таких осей возьмем оси с ортами $\vec{n}_{x_1} = \vec{n}_x, \vec{n}_{y_1}$. Таким образом, с маятником связана неинерциальная система координат (в ней маятник неподвижен) $O_1\vec{n}_x, \vec{n}_{y_1}, \vec{n}_{z_1}$. Ее центр находится в точке подвеса, а оси совпадают с осями инерции. Эту систему координат назовем *связанной* (ССК). Центр масс маятника находится на этой оси на расстоянии S от вершины конуса в точке O_m , т.е. положение центра масс маятника относительно его точки подвеса определяет вектор $\vec{R}_M = S\vec{n}_{z_1}$.

В центре масс приложена единственная внешняя сила, действующая в данной системе, $M\vec{g} = -Mg\vec{n}_{z_0}$, где g — ускорение свободного падения; M — масса маятника. Под действием этой силы маятник совершает движение относительно оси подвеса, причем в зависимости от начальных условий оно различно. В том числе может быть и либрационным.

Характеристики маятника, определяющие его динамику, — его **масса, положение центра масс, три главных момента инерции**. Их определение не представляет труда. Известные расчетные формулы для нахождения указанных характеристик приведены ниже.

Заданными параметрами маятника являются удельный вес материала ρ , угол при вершине 2α , высота h . Следовательно, могут быть найдены масса маятника M и расстояние до его центра масс S . Поскольку объем конуса $V_M = \frac{1}{3}\pi R_M^2 h = \frac{1}{3}\pi h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$ (R_M — радиус

основания конуса), то $M = \rho V_M = \frac{\pi}{3} \rho h^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$. Для конуса $S = \frac{3}{4} h$.

Главные моменты инерции маятника обозначим как $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$. Это моменты инерции осесимметричного конуса относительно главных осей инерции в его вершине. Известно [3], что

$$\begin{aligned} I_{x_1} = I_{y_1} &= \frac{3}{5} M \left(\frac{R_M^2}{4} + h^2 \right) = \frac{3}{20} M h^2 (4 + \operatorname{tg}^2 \alpha); \\ I_{z_1} &= \frac{3}{10} M R_M^2 = \frac{3}{10} M h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Кинетическая энергия системы. Маятник, неподвижный относительно ССК, относительно БСК движется как поступательно, так и вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Поэтому кинетическая энергия $T = T_{V_{O_1}} + T_{\Omega} + T_{in}$ подвеса с маятником на вращающейся платформе включает в себя три составляющих: 1) энергия вращательного движения T_{Ω} ; 2) энергия поступательного движения $T_{V_{O_1}}$; 3) кинетическая энергия T_{in} , связанная с действием сил инерции вследствие вращения платформы.

Энергия поступательного движения определяется линейной скоростью \vec{V}_{O_1} движения начала отсчета ССК, т.е. точки подвеса маятника O_1 . Эта скорость описывается выражением (квадратная скобка — векторное произведение) $\vec{V}_{O_1} = \frac{d\vec{R}_{O_1}}{dt} = [\vec{\varphi}, \vec{R}_{O_1}]$. Поскольку $\vec{R}_{O_1} = X\vec{n}_x + Y\vec{n}_y + Z\vec{n}_{z_0}$, $\vec{\varphi} = \dot{\varphi}\vec{n}_{z_0}$, то

$$\vec{V}_{O_1} = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_{z_0} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -\dot{\varphi} Y \vec{n}_x + \dot{\varphi} X \vec{n}_y. \quad (2)$$

Отсюда

$$T_{O_1} = \frac{1}{2} M V_{O_1}^2 = \frac{1}{2} M \vec{V}_{O_1} \cdot \vec{V}_{O_1} = \frac{1}{2} M \dot{\varphi}^2 (X^2 + Y^2). \quad (3)$$

Известно [4], что $T_{in} = -M \vec{V}_{O_1} \cdot [\vec{\Omega}, \vec{R}_m]$. При $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{n}_x + \dot{\varphi}\vec{n}_{z_0}$ и $\vec{R}_m = S\vec{n}_{z_1} = S(\cos \theta \vec{n}_{z_0} - \sin \theta \vec{n}_y)$ находим

$$[\vec{\Omega}, \vec{R}_m] = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_{z_0} \\ \dot{\theta} & 0 & \dot{\varphi} \\ 0 & -S \sin \theta & S \cos \theta \end{vmatrix} = S \dot{\varphi} \sin \theta \vec{n}_x - S \dot{\theta} \cos \theta \vec{n}_y - S \dot{\theta} \sin \theta \vec{n}_{z_0}.$$

Тогда

$$T_{in} = M \left(Y S \dot{\varphi}^2 \sin \theta + X S \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \right). \quad (4)$$

Вращательная составляющая кинетической энергии определяется по известной формуле [3]:

$$T_{\Omega} = \frac{1}{2}I_{x_1}\Omega_{x_1}^2 + \frac{1}{2}I_{y_1}\Omega_{y_1}^2 + \frac{1}{2}I_{z_1}\Omega_{z_0}^2 = \frac{1}{2}I_{x_1}(\Omega_{x_1}^2 + \Omega_{y_1}^2) + \frac{1}{2}I_{z_1}\Omega_{z_1}^2,$$

где $\Omega_{x_1}, \Omega_{y_1}, \Omega_{z_0}$ – проекции угловой скорости вращения системы $\vec{\Omega}$ на оси инерции ССК. Очевидно, что при $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{n}_x + \dot{\varphi}\vec{n}_{z_0}$ получим $\Omega_{x_1} = \dot{\theta}, \Omega_{y_1} = \dot{\varphi} \sin \theta, \Omega_{z_1} = \dot{\varphi} \cos \theta$. В результате

$$T_{\Omega} = \frac{1}{2}I_{x_1}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_{z_1}\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta. \quad (5)$$

В силу (3)–(5) кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2}M(X^2 + Y^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_{x_1}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_{z_1}\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + M(YS\dot{\varphi}^2 \sin \theta + XS\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta). \quad (6)$$

Только одно слагаемое $\frac{1}{2}I_{x_1}\dot{\theta}^2$ связано с вращением маятника вокруг оси подвеса. Все остальные составляющие кинетической энергии определяются вращением платформы, так как зависят от угловой скорости ее вращения.

Гамильтониан системы. Система имеет одну степень свободы с обобщенной координатой θ . Потенциал действующей силы тяжести $U = -MgS \cos \theta$. Лагранжиан системы равен $\Lambda = T - U$ или с учетом (6)

$$\Lambda = \frac{1}{2}M(X^2 + Y^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_{x_1}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_{z_1}\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + M(YS\dot{\varphi}^2 \sin \theta + XS\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) + MgS \cos \theta.$$

В лагранжиане могут быть опущены слагаемые, являющиеся полными производными какой-либо функции. Поэтому окончательный вид выражения для лагранжиана следующий:

$$\Lambda = \frac{1}{2}I_{x_1}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(I_{x_1} - I_{z_1})\omega^2 \sin^2 \theta + MYS\omega^2 \sin \theta + MgS \cos \theta. \quad (7)$$

В (7) было учтено, что угловая скорость вращения платформы известна и постоянна $\dot{\varphi} = \omega$. Определим обобщенный импульс p_{θ} маятника (в этом случае – его кинетический момент). По определению $p_{\theta} = \partial\Lambda/\partial\dot{\theta}$, следовательно

$$p_{\theta} = I_{x_1}\dot{\theta}. \quad (8)$$

Гамильтониан есть функция p_{θ}, θ вида $H = T + U$. Тогда с учетом (7), (8) получим

$$H = \frac{1}{2}I_{x_1}^{-1}p_{\theta}^2 + \frac{1}{2}(I_{x_1} - I_{z_1})\omega^2 \sin^2 \theta + MYS\omega^2 \sin \theta - MgS \cos \theta. \quad (9)$$

Канонические переменные. Рассматриваемая система консервативна, поэтому ее полная энергия — инвариант: $H = H_0$, где H_0 — энергия начального состояния. Вместо обобщенных координаты и импульса $\{\theta, p_\theta\}$ введем новые канонические переменные: действие I (как новый импульс) и фазу Φ (как новую координату). Производящая функция такого канонического преобразования [3] имеет вид¹

$$S(H_0, \theta) = \int_0^\theta p_\theta(H_0, \theta') d\theta'. \text{ Действие определим как}$$

$$I(H_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\theta(H_0, \theta') d\theta'. \quad (10)$$

Здесь именно выбор верхнего предела соответствует рассмотрению либрационного (а не колебательного) движения маятника.

Вторую каноническую переменную определим через производящую функцию также

$$\begin{aligned} \Phi(H_0, \theta) &= \frac{\partial S(H_0, \theta)}{\partial I} = \\ &= \int_0^\theta \frac{\partial p_\theta(H_0, \theta')}{\partial I} d\theta' = \int_0^\theta \frac{\partial p_\theta(H_0, \theta')}{\partial H_0} \frac{\partial H_0}{\partial I} d\theta'. \end{aligned} \quad (11)$$

Для действия и фазы уравнения Гамильтона имеют вид $\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi}$, $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I}$. Согласно формуле (10), гамильтониан зависит только от действия. Следовательно, фаза есть циклическая переменная и $dI/dt = 0$, т.е. действие сохраняется, что видно и из формулы (10). Скорость изменения фазы (второе уравнение Гамильтона) обозначим через Ω_{NL} :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial I} = \left(\frac{\partial I}{\partial H_0} \right)^{-1} = \Omega_{NL}. \quad (12)$$

Используя (12), перепишем (11) так:

$$\Phi(H_0, \theta) = \Omega_{NL} \int_0^\theta \frac{\partial p_\theta(H_0, \theta')}{\partial H_0} d\theta'. \quad (13)$$

Как видно из (11), время равно $t = \Phi/\Omega_{NL}$. Используем это соотношение совместно с (13) для определения связи между временем и

¹Здесь и далее различия между величинами H и H_0 не делается.

$$t(H_0, \theta) = \int_0^\theta \frac{\partial p_\theta}{\partial H_0}(H_0, \theta') d\theta'. \quad (14)$$

Для обобщенного импульса зависимость $p_\theta(H_0, \theta')$ может быть получена из (9):

$$p_\theta(H_0, \theta) = \left\{ 2I_{x_1} \left[H_0 - \frac{1}{2} (I_{x_1} - I_{z_1}) \omega^2 \sin^2 \theta - MYS\omega^2 \sin \theta + MGS \cos \theta \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Следовательно, $\frac{\partial p_\theta}{\partial H_0} = 2I_{x_1} p_\theta^{-1}$. Зависимость (14) с помощью (15) перепишем так:

$$t(H_0, \theta) = 2I_{x_1} \int_0^\theta p_\theta^{-1}(H_0, \theta') d\theta'. \quad (16)$$

При фиксированной начальной энергии H_0 зависимости (15) и (16) определяют скорость вращения маятника относительно оси подвеса $\dot{\theta}(H_0, \theta) = I_{x_1}^{-1} p_\theta(H_0, \theta)$ и время $t(H_0, \theta)$ как функции угла поворота маятника относительно той же оси. Таким образом, в параметрическом виде (параметр — угол θ) получена временная зависимость $\theta(H_0, t)$.

Численный эксперимент. Интегралы (15), (16), задающие указанные выше зависимости, не могут быть представлены через элементарные функции, нет и подходящих для этого специальных функций. В то же время можно организовать вычислительный процесс на компьютере так, что будет получена зависимость угловой скорости от времени. Для этого на оси декартова графика (используется пакет MathCAD13) выводятся массивы $\dot{\theta}(H_0, t)$ и $t(H_0, \theta)$ при заданном массиве θ в виде равномерно распределенных по интервалу $[0, 2\pi]$ точек. Начальная энергия фиксируется заданием начального угла $\theta_0 = 0$ и начальной скорости $\dot{\theta}_0$:

$$H_0 = \frac{1}{2} I_{x_1} \dot{\theta}_0^2 - MGS. \quad (17)$$

Начальная энергия (начальная угловая скорость) должна быть достаточно большой, чтобы гарантировать вращение (а не колебания).

Приведем зависимости, характеризующие вращательное движение, для удобства они представлены в безразмерных системах координат. Все приводимые зависимости периодичны по своему аргументу, поэтому рассматривается только один период. Угол поворота нормирован на период 2π , время нормировано на период $T_{NL} = 2\pi/\Omega_{NL}$.

Начальная энергия H_0 и скорость вращения платформы ω считаются параметрами системы. Характеристики маятника и подвеса неизменны: длина маятника $h = 30$ см; угол при вершине $2a = 30^\circ$; удельный вес материала $\rho = 8$ г/см³; положение центра масс относительно точки подвеса $S = (3/4)h$, масса маятника $M = 16,24$ кг; осевой главный момент инерции $I_{z_1} = 0,031$ кг · м²; экваториальные главные моменты инерции $I_{E_1} = I_{C_1} = 0,893$ кг · м²; смещение точки подвеса относительно ПСК $Y = 9$ см; все расчеты проводятся в среде MathCAD по приведенным выше формулам.

Для оценки особенностей динамики маятника на вращающемся подвесе вначале рассмотрим зависимости, характеризующие вращательное движение маятника на неподвижном подвесе (эти результаты известны), т.е. при $\omega = 0$. По зависимости, показанной на рис. 2, а, определяется максимальное значение энергии 35,809 Дж, значение начальной энергии берется больше этого значения $H_0 = 39,624$ Дж (соответствует начальной скорости $\dot{\theta}_0 = 13$ рад/с), что обеспечивает вращательное движение маятника. Этому начальному условию соответствует зависимость времени от угла поворота маятника (рис. 2, б). Зависимость обобщенного импульса от угла поворота представлена на рис. 2, в (фактически это фазовая кривая маятника выше сепаратрисы). В параметрическом виде зависимости, приведенные на рис. 2, б и в, (параметр θ) определяют зависимость $p_\theta(t)$ (рис. 2, г), обобщенный импульс и угловая скорость вращения $\dot{\theta}$ связаны соотношением (8), что

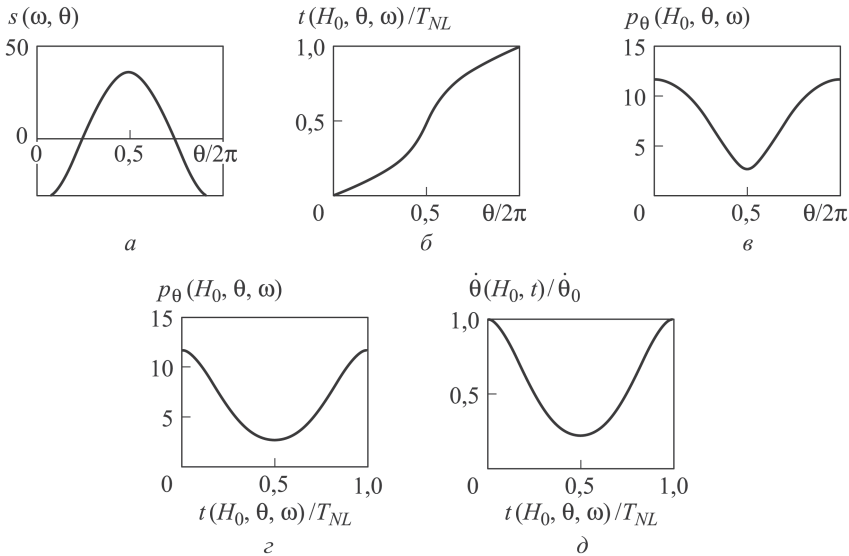


Рис. 2. Зависимости определения нижней границы начальной энергии, обеспечивающей вращательное движение маятника (а), времени от угла поворота при вращательном движении маятника (б), обобщенного импульса от угла поворота при вращательном движении маятника (в), обобщенного импульса от времени (г), угловой скорости от времени (д) маятника на неподвижном основании

позволяет найти зависимость угловой скорости от времени (рис. 2, *д*). Такая же зависимость приведена во всех литературных источниках. Однако она построена по аналитически полученной временной зависимости (эллиптической функции Якоби). Это можно было выполнить, так как интеграл (16) в таком случае есть эллиптический интеграл первого рода, допускающий обращение. В настоящей работе функция Якоби не использована, зависимость получена только на компьютере. Главная особенность временной зависимости угловой скорости в том, что на периоде она имеет начальный максимум (равный начальному значению скорости при нулевом начальном угле) и только один минимум в середине периода (соответствует углу $\theta = \pi$ в нижней точке маятника). Это вполне предсказуемо, поскольку вращающий момент (момент силы тяжести) в наибольшей степени противодействует вращению при этом угле.

Рассмотрим те же зависимости, но при условии вращения платформы со скоростью $\omega = 26$ рад/с. Начальная энергия маятника $H_0 = 575,246$ Дж. Все остальные характеристики неизменны. Зависимость, позволяющая оценить предельно малое значение начальной энергии, приведена на рис. 3, *а*. Вследствие возникновения сил инерции значение нижней границы возрастает до 514,197 Дж. Поэтому начальная энергия принята равной $H_0 = 575,246$ Дж, что обеспечивает режим либрации. Зависимость времени от угла поворота ма-

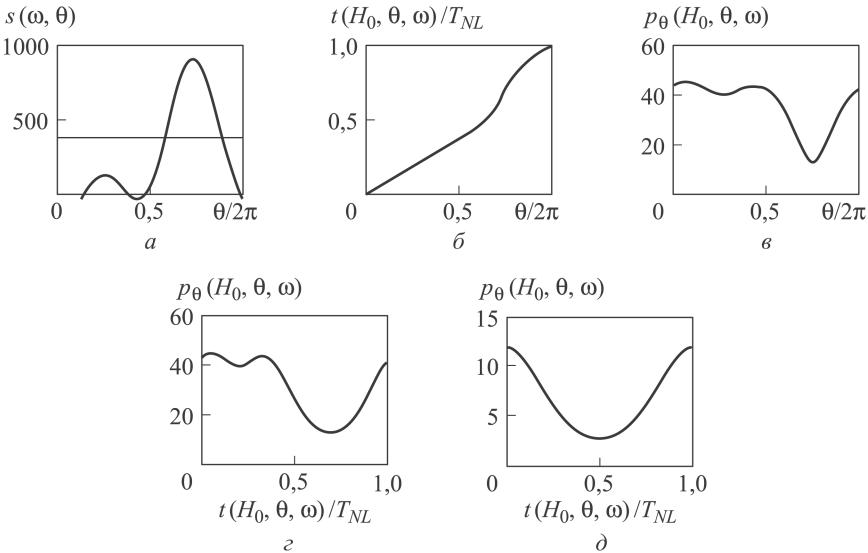


Рис. 3. Зависимости определения нижней границы начальной энергии, обеспечивающей вращательное движение маятника (*а*), времени от угла поворота при вращательном движении маятника (*б*), обобщенного импульса от угла поворота при вращательном движении маятника (*в*), обобщенного импульса от времени (*г*), угловой скорости вращения от времени (*д*) маятника на вращающемся основании

ятника (обратной функции из числа специальных функций не существует) представлена на рис. 3, б. По сравнению с зависимостью, показанной на рис. 2, б, качественные изменения невелики. Наблюдается либрация, но с изменившейся средней скоростью вращения $\Omega_{NL} = (2\pi) / T_{NL}$ (это отношение пределов на зависимости). Информация о влиянии инерции сравнительно невелика. Именно поэтому необходимо использовать более информативную зависимость угловой скорости вращения от времени. Сначала рассмотрим зависимость фазовой траектории (рис. 3, в), которая существенно отличается от аналогичной зависимости, показанной на рис. 2, в. Зависимость обобщенного импульса (кинетического момента маятника от времени) представлена на рис. 3, г, угловая скорость вращения маятника как функция времени в виде кривой, полученной на компьютере, — на рис. 3, д.

Согласно рассмотренным зависимостям, угловая скорость вращения в случае маятника на вращающемся основании в среднем более стабильна, чем у маятника на неподвижном основании: полпериода (по времени) в среднем она удерживается около своего начального значения, а во втором полупериоде изменяется существенно, но все-таки меньше, чем в отсутствии сил инерции. Можно сделать вывод о существовании режима, когда вращение подвеса делает либрацию маятника более равномерной (по скорости). Другими словами, вращение подвеса в какой-то степени может компенсировать момент силы тяжести. В эту задачу не входит подробный анализ динамики рассматриваемой системы. Показано, что это можно выполнить, используя изложенную методику. Достаточно выписать последовательность приведенных выше выражений в среде любого транслятора и вывести зависимость на компьютере вида кривых, приведенных на рис. 2, д или рис. 3, д.

Заключение. Получено аналитическое описание физического маятника, вращающегося относительно оси в подвесе на вращающейся платформе, в форме гамильтониана. Явным образом выполнено каноническое преобразование от обобщенных координаты (угол) и импульса (кинетический момент) к каноническим переменным действие–фаза. Это позволило получить зависимость времени от угла поворота маятника, которая имеет интегральный характер, не соответствующий эллиптическому интегралу, типичному для задачи о маятнике в неподвижном подвесе. Тем не менее возможно построить зависимость угловой скорости от времени как параметрическую при изменении угла в пределах периода. Предложенный метод решения поставленной задачи является новым. Получаемые с помощью компьютера кривые зависят от характеристик маятника, подвеса и угловой скорости вращения платформы и начальной энергии (начальной угловой скорости). Это позволяет исследовать динамику либрации маятника в различных

условиях, например, при изменении силы инерции (угловая скорость или смещение центра масс маятника относительно точки подвеса) или при смещении подвеса как целого по платформе. Алгоритм представляет собой последовательность формул, приведенных в статье, и реализован в среде MathCAD 13, но без труда воспроизводим в любом другом вычислителе. Простоту и прозрачность алгоритма решения поставленной задачи также следует отнести к достигнутым результатам статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса М.: Наука, 1988. 368 с.
2. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л. Введение в теорию нелинейных колебаний М.: Наука, 1976. 385 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика М.: Наука, 2001. 220 с.
4. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Изд-во Московского университета, 1978. 575 с.

REFERENCES

- [1] Zaslavskiy G.M., Sagdeev R.Z. Vvedenie v nelineynuyu fiziku: ot mayatnika do turbulentnosti i khaosa [Introduction to nonlinear physics: from the pendulum to turbulence and chaos]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 368 p.
- [2] Butenin N.V., Neymark Yu.I., Fufaev N.L. Vvedenie v teoriyu nelineynykh kolebaniy [Introduction to the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 385 p.
- [3] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. 1. Mekhanika [Theoretical physics. Vol. 1. Mechanical science]. Moscow, Nauka Publ., 2001. 220 p.
- [4] Ol'khovskiy I.I. Kurs teoreticheskoy mekhaniki dlya fizikov [Course of engineering mechanics for physicists]. Moscow, Izd. Mosk. Univer. Publ., 1978. 575 p.

Статья поступила в редакцию 06.11.2014

Судаков Владимир Федорович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная электротехника и промышленная электроника” МГТУ им. Н.Э. Баумана. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Sudakov V.F. — D.Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Electrical Engineering and Industrial Electronics, Bauman Moscow State Technical University. Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Судаков В.Ф. Угловая скорость вращения физического маятника в подвесе на подвижном основании // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 5. С. 124–135.

Please cite this article in English as:

Sudakov V.F. Angular velocity of physical pendulum suspended on movable base. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 5, pp. 124–135.