УДК 004.056: 519.854

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ

Э.Н. Гордеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: tatmigor@gmail.com

Рассмотрены возможности применения теории устойчивости, разработанной ранее для задач дискретной оптимизации, в двух типах прикладных проблем, возникающих в задачах моделирования сетей. Моделируется процесс P, происходящий во времени и имеющий несколько компонент $K_1, \ldots, K_s$, математические модели которых представлены оптимизационными задачами, задачами параметрического программирования или задачами вычислительной геометрии $Z_1, \ldots, Z_s$. Возникает практический вопрос о соотношении модели и реального процесса. Применение теории устойчивости в математическом моделировании связано с тем, что она позволяет увязать "единообразными" формулами и алгоритмами различные компоненты процесса и за счет этого более аргументированно указывать "узкие места" модели. При исследовании свойств геометрических конфигураций предлагаемый подход дает возможность выявить "критические" ситуации. Используя возможность параметризации исходных данных, можно представить их функциями времени. Это позволяет рассматривать при определенных условиях модели некоторых процессов, а затем на основе такого рассмотрения делать эвристические выводы об адекватности модели моделируемому процессу. Описана общая схема постановки задачи исследования устойчивости, показано применение такой схемы и приведены примеры, иллюстрирующие это применение.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, радиус устойчивости, моделирование, вычислительная геометрия, параметрическое программирование.

INVESTIGATION OF MATHEMATICAL MODELS STABILITY AND GEOMETRY CONFIGURATIONS

E.N. Gordeev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: tatmigor@gmail.com

The article discusses application of the theory of stability, previously developed for solving discrete optimization problems. The theory allows considering two types of the applied problems arising during a networks modelling. The modelled process P occurs in time and has several components $K_1, \ldots, K_s$. Its mathematical models are presented as optimization problems, parametric programming problems or computational geometry problems $Z_1, \ldots, Z_s$. A practical question arises if there is any relationship between the model and real process. The theory of stability is used in mathematical modelling because it allows linking various components of the process with the help of "uniform" formulae, algorithms and convincingly indicating *“bottlenecks” of the model. While analyzing properties of the geometric configurations, the proposed approach allows identifying the “critical” situations. By virtue of parameterization, the input data can be presented as time functions. This allows considering the models of some processes under certain conditions as well as drawing heuristic conclusions about the compatibility of the model with the simulated process. The article describes a general scheme of analyzing the stability analysis problem. It shows the application of this scheme and gives examples illustrating its application.*

Keywords: discrete optimization problems, theory of stability, radius of stability, mathematical modelling, computational geometry, parametric programming.

Введение. Предложенная схема исследования устойчивости проста и естественна. Имеется задача Z, входные параметры которой $e_1, \ldots, e_m$ характеризуются наборами чисел. Под решением задачи понимается поиск некоторого объекта τ (или совокупности объектов) из конечного или бесконечного множества. Этот объект — решение задачи. Если множество чисел, которыми характеризуются входные параметры задачи Z, могут представлять точками метрического пространства, то на множестве задач может быть введена некоторая функция близости $r_{ij} = r(Z_i, Z_j)$. При определенных ограничениях на тип пространства и свойства нормы может оказаться, что объект, являющийся решением конкретной задачи, сохраняется в качестве решения и для всех задач из некоторой ее ненулевой окрестности в метрическом пространстве. Подобное сохранение может интерпретироваться как устойчивость решения, а несуществование такой ненулевой окрестности может интерпретироваться как его неустойчивость. Количественную характеристику рассматриваемой окрестности можно назвать “радиусом устойчивости”.

Исследование устойчивости решений задач обычно преследует следующие цели.

1. *Получение формул для радиуса устойчивости.* Содержательные результаты находятся как для конкретных задач, так и для классов задач, которые характеризуются общими требованиями к свойствам решений. Рассматривались оптимизационные задачи с различного вида функционалами (задачи на максимум или минимум, задачи на “узкие места”, а также нетипичные “вырожденные случаи”), и задачи не являющиеся оптимизационными. Тип возмущений исходных данных задается через вид нормы (метрики) в пространстве. Естественную практическую интерпретацию имеет чебышевская метрика (возмущения параметров независимы друг от друга), а также метрика l_1. Однако с позиции теории исследовались широкие классы метрик.

2. *Построение алгоритмов вычисления радиуса устойчивости.* Практический интерес представляет не сама формула для радиуса устойчивости, а способ и трудоемкость ее вычисления. При этом напрашивается вопрос о сравнении трудоемкости алгоритма решения самой задачи и определения радиуса ее устойчивости. Такие

исследования были проведены для широкого класса задач дискретной оптимизации.

3. *Качественные исследования свойств задач дискретной оптимизации.* В ряде случаев результаты теории устойчивости могут быть использованы для решения обратных задач, для табулирования решений множества задач, а также в задачах защиты информации и робототехники.

4. *Решение прикладных задач.* Результаты теории устойчивости позволяют, например, разработать методы защиты информации, строить новые математические модели, в том числе и за счет параметризации исходных данных, получать эвристические критерии оценки качества моделей и т.д.

Последняя цель и является целью настоящей работы. В математическом моделировании возникают одновременно несколько различных постановок задач, совокупность которых может быть единообразно интерпретирована и проанализирована с позиции теории устойчивости.

Элементы теории устойчивости. Изначально такой подход предлагался для задач дискретной оптимизации, но оказалось, что его также можно применить к задачам параметрического программирования, вычислительной геометрии и математического моделирования. Покажем на конкретных примерах тесную связь полученных результатов.

В простейшем виде схема выглядит так. Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ — некоторое множество, $D_m = \{t_1, \ldots, t_q\}$, $q > 1$ — система подмножеств множества E, называемых траекториями.

Элементам множества E приписаны веса $w(e_1) = a_1, \ldots, w(e_m) = a_m$. Пусть вектор $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$, берется из пространства $\Re^m$. На каждой траектории определяется функционал $\tau(A)$ — длина траектории при взвешивании вектора $\mathbf{A}$. Например, линейный функционал $\tau(A) = \sum\limits_{e_i \in \tau} a_i$, или функционал задачи на "узкие места" $\tau(A) = \max\limits_{e_i \in \tau} a_i$.

Под задачей понимается тройка $(E, D_m, \mathbf{A})$ с определенным на ней типом функционала. Пара (E, D_m) определяет "комбинаторику" задачи. В связи с этим, если эта пара и функционал фиксированы, а варьируется лишь вектор $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ в пространстве $\Re^m$ (конфигурационном пространстве), то получающуюся индивидуальную задачу будем обозначать как $\mathrm{Pr}_{\mathbf{A}}$.

Решениями задачи называются траектории, доставляющие экстремум (например, минимум) функционалу (оптимальные траектории).

Множество номеров оптимальных траекторий задачи при взвешивании вектора $\mathbf{A}$ обозначим через $\varphi(\mathbf{A})$, длину оптимальной траектории — $m(\mathbf{A})$, открытый шар в пространстве $\Re^m$ с центром в векторе $\mathbf{A}$ и радиусом Δ — $S_\Delta(\mathbf{A})$.

Пусть $R_0 = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \in \Re^m, |\varphi(\mathbf{A})| = q\}$ и в пространстве $\Re^m$ задана норма. Назовем задачу $\mathrm{Pr}_{\mathbf{A}}$ ε-устойчивой, если для любого $\mathbf{B} \in \Re^m$, $\|\mathbf{B}\| < \varepsilon$, выполняется условие $\varphi(\mathbf{A} + B) \subseteq \varphi(\mathbf{A})$. Радиус устойчивости задачи $\mathrm{Pr}_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A} \in R_0$, полагаем по определению равным нулю, в противном случае радиусом устойчивости назовем $\sup \varepsilon$, где супремум берется по всем ε, для которых радиус $\mathrm{Pr}_{\mathbf{A}}$ является ε-устойчивым.

Обозначим радиус устойчивости задачи $\mathrm{Pr}_{\mathbf{A}}$ через $\rho(\mathbf{A})$. Вектор $\mathbf{B}$ будем называть *возмущающим вектором*, или *возмущением*.

Обоснование, подробный анализ введенных определений, а также исследование устойчивости многих известных оптимизационных задач как с линейным, так и с минимаксным функционалом при различных типах норм в пространстве $\Re^m$ можно найти, например, в работах [1–5]. Таким образом, радиус устойчивости задает предел возмущений элементов весового вектора задачи $\mathrm{Pr}_{\mathbf{A}}$, при которых не расширяется множество оптимальных решений.

Оказалось, что кроме задач дискретной оптимизации в описанную выше схему укладываются многие задачи вычислительной геометрии, а методика исследования устойчивости имеет содержательные и практически значимые последствия. Примеры этого подхода можно найти в работах [6–8]. Допустимые решения задачи — некоторые геометрические объекты в некотором пространстве (пространство задачи). Эти объекты и будут траекториями $D_m = \{\tau_1, \ldots, \tau_q\}$, $q > 1$. В индивидуальной задаче они описываются числовыми характеристиками через координаты точек $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ пространства задачи. Значения указанных координат $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ могут подвергаться возмущению. Под решением задачи понимается объект с определенными свойствами. Если можно ввести понятие эквивалентности объектов и некоторую норму в конфигурационном пространстве, то возникает аналог шара устойчивости, внутри которого решения задачи эквивалентны.

Следует отметить, что геометрия исходного пространства самой задачи вычислительной геометрии и норма конфигурационного пространства различны. Кроме того, связь между траекториями и элементами $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ не прямая, а опосредованная структурой исходных данных.

Согласно изложенному, наблюдается единообразие подходов к оценке устойчивости в оптимизационных и геометрических задачах. Пусть элементы вектора $\mathbf{A}$ зависят от параметра $\mathbf{A}(t) = (a_1(t), \ldots$ $\ldots, a_m(t))$. Здесь норма конфигурационного пространства уже роли не играет, а “близость” задач определяется близостью значений параметра. Устойчивость задачи предполагает сохранение комбинаторики ее решений при незначительных изменениях параметра. Для задачи линейного программирования такая постановка является классической, а методы решения параметрической задачи хорошо известны.

Для задач комбинаторной оптимизации она была предложена в работах [5, 9].

Определение. Параметрическая задача называется конечнозначной на $[a, b]$, если существует такой набор интервалов (t_i, t_{i+1}), $i = 1, \ldots, N-1$, что $[a, b] = \{a\} \cup \{b\} \bigcup\limits_{i=1}^{N} \{t_i\} \bigcup\limits_{i=1}^{N-1} (t_i, t_{i+1})$, и решение любой задачи в точке $t \in (t_i, t_{i+1})$ является ее решением на всем интервале (t_i, t_{i+1}), $i = 1, \ldots, N-1$.

Интервалы в этом определении представляют собой аналоги областей устойчивости, а размер интервала — аналог радиуса устойчивости. В работе [9] проведен подробный анализ параметрических задач оптимизации и получен критерий конечнозначности.

Пусть $\varphi_{ij}(t) = \tau_i(\mathbf{A}(t)) - \tau_j(\mathbf{A}(t))$, $i, j = 1, \ldots, q$. Множество этих функций обозначим как Φ. Знак функции — это знаки "+", "–" или "0". Точка t_0 называется точкой перемены знака функции, если для любого $\varepsilon > 0$ в любой ε-окрестности точки найдется точка t_1 такая, что знаки функции в этих точках разные.

Очевидно, что для задачи линейного программирования конечнозначность обеспечивается. В работе [9] показано, что и для полиномиальной зависимости от параметра можно доказать конечнозначность в случае линейного функционала и функционала на "узкие места". Получен ряд других достаточных условий конечнозначности, но они имеют весьма специфический характер. Однако в случае этих функционалов до сих пор неизвестен критерий (необходимое и достаточное условие) конечнозначности, который бы формулировался только на базе аналитических свойств функций $\mathbf{A}(t)$. Приведем пример указанного общего критерия, в котором необходимо учитывать структуру множества траекторий задачи.

Содержательный смысл критерия состоит в возможности исключения из рассмотрения некоторого подмножества траекторий в окрестности некоторых точек на интервале $[a, b]$. Этими точками являются "точки сгущения точек перемен знака", точки в полуокрестности которых некоторая функция $\varphi_{ij}(t)$ меняет знак бесконечное число раз. Если удается установить, что в этой окрестности ни одна из траекторий $\tau_i(\mathbf{A}(t))$, $\tau_j(\mathbf{A}(t))$ не может быть оптимальной, то получается необходимое и достаточное условие конечнозначности задачи. Конечнозначность дает возможность вместо решения задачи во всех точках $[a, b]$ ограничиться ее решением в конечном числе точек этого интервала.

Применение исследования устойчивости в математическом моделировании. Рассмотрим следующую ситуацию: моделируется процесс P, происходящий во времени и имеющий несколько компонент $K_1, \ldots, K_s$, математические модели которых представлены оптимизационными задачами или задачами вычислительной геометрии

$Z_1, \ldots, Z_s$. Возникает практический вопрос о соотношении модели и реального процесса.

Использование теории устойчивости в математическом моделировании связано с тем, что она позволяет увязать "единообразными" формулами и алгоритмами различные компоненты процесса и за счет этого более аргументированно указывать "узкие места" модели.

Рассмотрим некоторые результаты, которые приведены в виде теорем в работах [1–7, 9, 10], либо являются прямыми следствиями утверждений, полученных в перечисленных работах.

Утверждение 1. Если норма возмущающего вектора $\|\mathbf{B}\|$ не меньше радиуса устойчивости, а ошибка в исходных данных может быть не меньше $\|\mathbf{B}\|$, то решать оптимизационную задачу или задачу вычислительной геометрии бессмысленно, т.е. в реальности оптимальным может быть любое допустимое решение.

Утверждение 2. Для любой массовой дискретной оптимизационной задачи, которая укладывается в предложенную выше постановку можно показать, что "почти все" индивидуальные задачи имеют единственную оптимальную траекторию, поэтому необходимость рассмотрения всего множества $\varphi(\mathbf{A})$, которая присутствует в формулах и алгоритмах для радиуса устойчивости, не является большим препятствием с алгоритмической точки зрения. Для некоторых задач в явном виде получены оценки вероятности единственности решения [11].

Утверждение 3. Теоретически пространство задач может быть покрыто шарами устойчивости. Однако мощность такого покрытия (двойная экспонента размерности задачи) делает его практически непригодным. В то же время определенный практический интерес представляет гибридный алгоритм, когда наряду с решением задачи находится и ее радиус устойчивости. Это позволяет автоматически получать решения континуума задач из шара устойчивости исходной задачи. Как показали численные эксперименты с задачей коммивояжера, для "реальных" матриц это работает, а для случайных малоинтересно, что понятно в свете следующего утверждения.

Утверждение 4. Если анализировать ситуацию со значением радиуса устойчивости с вероятностной точки зрения, то радиус устойчивости "почти всегда" положителен, т.е. задача устойчива. Однако значение его, по-видимому, почти всегда мало в сравнении с минимальным значением веса параметра задачи.

Утверждение 5. В случае полиномиальной зависимости от параметра задача является конечнозначной. Однако никакие ограничения на гладкость функций $a(t)$ не гарантируют конечнозначности. Конечнозначность зависит не только от свойств самих функций $a(t)$, но и от комбинаторики задачи, т.е. структуры множества $D_m = \{t_1, \ldots, t_q\}$.

Результаты теории устойчивости применялись для решения ряда прикладных задач, в частности в робототехнике [8], защите информации [10] и телекоммуникациях [12]. Подробнее остановимся на последнем случае, который позволяет эффективно применить аппарат исследования устойчивости.

Задача моделирования сетей возникает как при проектировании сетей связи и компьютерных сетей, так и при обосновании вариантов их модернизации. При этом моделирование осуществляется либо "вручную" путем соотнесения параметров каналов связи, характеристик сетевых устройств и потребностей пользователей сети, либо с помощью коммерческого специализированного программного обеспечения, которое позволяет моделировать сетевые и вычислительные устройства, каналы связи, а также динамические сценарии нагрузок на сеть.

В процессе моделирования в качестве подзадач возникают оптимизационные задачи на графах при моделировании структуры сети, потоковые задачи при моделировании функций маршрутизации и динамических нагрузок. Кроме того, как показано в работе [12], к общей схеме оптимизационной задачи может быть сведена модель сети в целом. Модель представляет собой множество параметрических (зависящих от времени) задач на "узкие места" $Z_k = (E, D_m, \mathbf{A})_k$, в которых экстремумы решений $\tau_k(t, \mathbf{A}) = w_k$ соответствуют пиковым нагрузкам на сеть. Возникновение таких нагрузок приводит либо к "падению" сети, либо к непредсказуемым последствиям в ее работе. Такой подход позволяет получить критерий адекватности проекта сети ее задачам.

Критерий. Пусть Δ — некоторая константа. Если экстремумы решений $\tau_k(t, \mathbf{A})$ упомянутых выше задач на "узкие места" отличаются от пиковых значений менее чем на Δ (минимумы — в большую сторону, а максимумы — в меньшую), то спроектированная сеть будет работать непредсказуемо. Здесь Δ — результат исследования устойчивости используемых в модели задач.

Это эвристический критерий, так как искусство моделирования не поддается формализации. На первый взгляд, он выглядит достаточно тривиально, но при его выводе использованы многие приведенные выше результаты теории устойчивости и выявлены "подводные камни" процесса моделирования. Математические формулировки этих "подводных камней" представлены в работе [12], а здесь приведем практический смысл ряда утверждений.

Отметим, что эти утверждения относятся не к любой наперед заданной сети и ее модели (т.е. не к некоторой индивидуальной оптимизационной задаче, используемой в модели, а предполагают возможность решения массовой задачи).

Обозначим через $\mathbf{A}$ множество технических характеристик сети (устройств и каналов), участвующих в модели (ε-возмущением характеристики сети назовем возмущение элемента $\mathbf{A}$, например, увеличение пропускной способности канала, производительности сетевого устройства и т.п.) Под *заданием S* будем понимать задание исходных данных нагрузок на сеть в некоторый промежуток времени, а под *сценарием Z* — снятие ее характеристик в процессе работы в данное время. Именно с последним связаны решения оптимизационных задач в модели сети.

Утверждение 6. Пусть фиксировано $\Delta > 0$. Существует пара S, Z такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое ε-возмущение вектора $\mathbf{A}$, что множество "узких мест" исходного сценария было пустым для любого t, а множество "узких мест" возмущенного сценария пустым не будет. При этом это изменение касается не отдельного момента времени, а некоторого промежутка.

Утверждение 7. Пусть фиксировано $\Delta > 0$. Существует пара S, Z такая, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое ε-возмущение вектора $\mathbf{A}$, что множество узких мест исходного сценария не содержится в множестве узких мест возмущенного, т.е. очевидное локальное улучшение сети со сложной топологией и разнородными устройствами может привести к ее глобальному ухудшению.

Утверждение 8. Длина траектории $\tau_k(t, \mathbf{A})$ как функция времени может быть разрывной функцией.

Поясним, каким образом приведенные утверждения приводят к сформулированному выше критерию. Структурные параметры сети можно полагать точно заданными. Задания же (нагрузки на сеть) естественно моделировать функциями, зависящими от параметра (времени). Это приводит к возникновению внутри модели параметрических задач. Топология сети также может меняться. Подобные изменения можно моделировать путем вариации переменных в геометрических задачах. Наличие алгоритмов решения оптимизационных задач, например, алгоритмов маршрутизации, приводит к появлению неточно заданных исходных данных (время доставки пакета между вершинами, загруженность буферов и т.п.).

При этом в модели сети результат работы одной ее части — это входные данные для алгоритма, моделирующего другую часть сети. Если полученное решение неустойчиво, то из утверждения 1 для оптимизационных задач следует, что решением может быть любая допустимая траектория. Если это решение поступает на вход следующего элемента модели, представленного параметрической задачей, то задача будет решаться в условиях полной неопределенности входных данных, так как по истечении сколь угодно малого промежутка времени Δt, на ее вход поступит любое другое допустимое решение предыдущей задачи.

В этом случае описать аналитически зависимость $\mathbf{A}(t)$, как правило, невозможно (попытка это сделать может привести к появлению функций с разрывами второго рода), поэтому согласно утверждению 5, теоретически ни о какой конечнозначности утверждать нельзя. В модели время дискретно, а промежуток $[a, b]$ конечен, в связи с этим случай отсутствия конечнозначности смоделировать формально нельзя, но его моделью естественно считать ситуацию, когда число перемен знака "сравнимо" с числом тактов времени, на которые разбивается промежуток $[a, b]$. Таким образом, сколь угодно малое изменение одного параметра задачи может привести к скачку значения другого параметра. При этом в сети эти параметры могут описывать каналы, устройства или задания, никак не связанные между собой с прикладной или содержательной точки зрения.

Приведены только самые серьезные опасения эффективности моделирования сетевых процессов с позиции теории устойчивости. Конечно, для простых сетей никакая теория устойчивости не нужна. То же самое можно утверждать для сетей, построенных с большим запасом. Здесь вместо значений радиуса устойчивости достаточно использовать его простые оценки. Если параметр Δ в них укладывается, то это дает возможность сделать эвристический вывод о благополучной эксплуатации сети.

Однако в сетях со сложной топологией и большим числом устройств необходимо быть очень осторожным при выборе стратегий реконструкции или модернизации. Следует понимать, что все они носят исключительно эвристический характер, т.е. любой довод "за" теоретически может быть разрушен путем построения "контрпримера".

При изменении топологии сети необходимо уметь оценивать "критичность" этих изменений. Здесь также помогает теория устойчивости. Другими словами, геометрические конфигурации могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Первые еще могут позволить изменения, а вторые — рассматриваться как "критические".

Применение теории устойчивости к исследованиям геометрических конфигураций. Рассмотрим математическую модель сети мобильного оператора в условиях, когда некоторое число точек доступа может быть разрушено (временно или постоянно). В рамках этой математической модели может быть использована задача отнесения пользователя к зоне той или иной точки доступа. Она возникает в модели наряду с другими задачами. Если выбирается простейший геометрический критерий близости пользователя к точке доступа, то получаем классическую задачу вычислительной геометрии — построение диаграммы Вороного. Здесь области Дирихле и будут определять правила доступа.

Задача построения диаграммы Вороного (ДВ) состоит в нахождении для заданного конечного набора точек (терминалов) $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ в d-мерном метрическом пространстве U^d (пространстве задачи) областей близости $P_1, \dots, P_n$ ($P_i \subset U^d$), т.е. таких множеств, что расстояние от любой точки $t \subset P_i$ до точки p_i, не превосходит расстояния от t до p_j, $j \neq i$. В общем виде можно принять, что на пространстве U^d задана положительно-определенная дистанционная функция $\mathrm{dist}(\,\cdot\,)$. В частности, можно, например, полагать, что метрика индуцируется произвольной нормой в пространстве U^d, и тогда соответствующая дистанционная функция будет симметрична. Отметим, в частности, что на плоскости для любой метрики l_q, $q = 1, 2, \dots, \infty$, задача решается за время $O(n \log n)$.

Обозначим ДВ конфигурации терминальных точек $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ через $D(P)$. Рассмотрим гиперграф $H(P)$, вершинами которого являются области близости $P_1, \dots, P_n$, а ребрами — те семейства областей близости, пересечение которых не пусто, а также пустое множество. Тем самым гиперграф пересечений $H(P)$ — гиперграф пересечений (нерв) семейства множеств и является, по определению, симплициальным комплексом.

Определение 1. Диаграммы Вороного, которым соответствуют одинаковые комплексы, называются эквивалентными. Использование этой задачи в описанной выше модели сети мобильного оператора требует дополнительных уточнений возможных целей.

Цель 1. Корректно построить алгоритм отнесения пользователя к точке доступа. Ведь может оказаться так, что при любом сколь угодно малом изменении координат пользователя возникает неопределенность в выборе такой точки.

Цель 2. Необходимо предусмотреть в упомянутом алгоритме возможность выхода из строя любой точки доступа.

Достижение цели 1 может быть обеспечено использованием теории устойчивости. Сначала определяется факт устойчивости. Для неустойчивых конфигураций вводятся дополнительные правила с учетом координат пользователя. В двух приведенных ниже утверждениях приведен пример исследования устойчивости. При этом дополнительные правила следуют из смысла вводимых ниже параметров.

Пусть близость конфигураций в конфигурационном пространстве $R^{d \times n}$ задается некоторой нормой. Как было отмечено выше, в общем случае эта норма никак не связана с дистанционной функцией в исходном пространстве.

Определение 2. Диаграмма Вороного конфигурации терминалов P называется устойчивой, если эквивалентны ДВ всех конфигураций в некоторой окрестности конфигурации P в конфигурационном пространстве. Диаграмма Вороного, которая не является устойчивой, называется неустойчивой.

Полагается, что устойчивой диаграмме соответствует устойчивая конфигурация (устойчивое множество терминалов P), а неустойчивой диаграмме — неустойчивая.

Определение 3. Радиусом устойчивости ДВ конфигурации P называется точная нижняя грань расстояний в конфигурационном пространстве от конфигурации P до неустойчивых конфигураций. Таким образом, радиус устойчивости неустойчивой диаграммы равен нулю.

Исчерпывающее исследование устойчивости проведено в работе [7]. Для наглядности ограничимся случаем обычной евклидовой плоскости. Аналогичное рассмотрение легко провести для любой фиксированной нормы метрики l_q, $q = 1, 2, \ldots, \infty$. Координаты терминальной точки p_i обозначим через (x_i, y_i). Оценим возмущения в абсолютной (чебышёвской) норме, т.е. расстояния в конфигурационном пространстве измеряются в норме l_∞.

Пусть $n > 2$. Обозначим расстояние в абсолютной норме от точки a до множества M плоскости через $\rho(a, M)$. Введем три параметра.

Рассмотрим тройку точек $t = \{a_1, a_2, a_3\}$ и множество прямых L на плоскости. Обозначим $\inf\limits_{l \in L} \max\limits_{i=1,2,3} \rho(a_i, l)$ через $\delta(t)$, $\min \delta(t_i)$ — через $\delta(P)$, где минимум берется по всем тройкам t_i терминалов таким, что в ДВ есть вершина, равноудаленная от них.

Рассмотрим теперь неограниченную область Дирихле D_k. Среди ребер ее границы имеются ровно два неограниченных. Если они параллельны, то полагаем $\beta(D_k) = 0$. В противном случае эти ребра лежат на границах области D_k с областями D_u и D_v, и примем $\beta(D_k) = \delta(t(k, u, v))$, где $t(k, u, v)$ — конфигурация из трех точек $\{p_k, p_u, p_v\}$. Обозначим минимум $\beta(D_k)$ по всем неограниченным областям ДВ через $\beta(P)$.

Сопоставим теперь ДВ помеченный граф $G(V, E)$. Вершинами графа являются вершины диаграммы и точки a ребра, соответствующие либо конечным ребрам диаграммы, либо бесконечным ребрам, помеченным номерами областей Дирихле, которые они разделяют. Назовем флип-ребрами такие конечные ребра ДВ, что в графе G инцидентные им вершины имеют степень 3. Каждой такой вершине соответствует тройка терминалов, а флип-ребру — некая четверка терминалов, являющаяся объединением двух соответствующих троек.

Рассмотрим четверку точек $s = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и множество окружностей F на плоскости. Обозначим $\inf\limits_{f \in F} \max\limits_{i=1,2,3,4} \rho(a_i, f)$ через $\pi(s)$, $\min \pi(s_i)$ — через $\pi(P)$, где минимум берется по всем четверкам терминалов, соответствующим флип-ребрам. Если множество флип-ребер пусто, то полагаем $\pi(P) = \infty$. Кроме того, обозначим через $J(P)$ множество бесконечных областей Дирихле, имеющих граничные параллельные бесконечные ребра.

Следующие две теоремы полностью описывают ситуацию исследования устойчивости в рассматриваемом случае.

Теорема 1. *Диаграмма Вороного является неустойчивой тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из двух условий*:

1) *существует вершина* $v \in V$ *степени более 3*;

2) *множество* $J\{P)$ *не пусто.*

Итак, если задача неустойчива, то $r(P) = 0$. Для устойчивой задачи следующее утверждение дает формулу вычисления радиуса устойчивости. Пусть $l(P) = \min(\delta(P), \beta(P), \pi(P))$.

Теорема 2. *Существует равенство* $r(P) = l(P)$. *Можно показать, что проверка устойчивости задачи и нахождение радиуса устойчивости могут быть осуществлены за линейное время*.

Достижение цели 2 (без учета технических характеристик оборудования и физики задачи) также обеспечивается с использованием устойчивости. Наиболее просто это выглядит для случая выхода из строя одной точки доступа. Тогда задача сводится к предыдущей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гордеев Э.Н.*, *Леонтьев В.К.* Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // ЖВМиМФ. 1996. № 36. С. 66–72.
2. *Леонтьев В.К.* Устойчивость в линейных дискретных задачах. В кн.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып. 35. С. 169–185.
3. *Гордеев Э.Н.* Алгоритмы полиномиальной сложности для вычисления радиуса устойчивости в двух классах траекторных задач // ЖВМиМФ. 1987. Т. 27. № 7. С. 984–992.
4. *Гордеев Э.Н.* Устойчивость решений в задаче о кратчайшем пути на графе // Дискретная математика. 1989. Т. 1. № 3. С. 39–46.
5. *Леонтьев В.К.*, *Гордеев Э.Н.* Качественное исследование траекторных задач. Кибернетика и системный анализ. 1986. № 5. С. 82–90.
6. *Гордеев Э.Н.* Об устойчивости решений в задачах вычислительной геометрии // Тезисы докладов международ. научн. конф. “Интеллектуальная обработка информации”. Крымская Академия Наук. 1996. С. 8.
7. *Вялый М.Н.*, *Гордеев Э.Н.*, *Тарасов С.П.* Об устойчивости диаграммы Вороного // ЖВМиМФ.1996. Т. 36. № 3. С. 405–414.
8. *Метод* формирования оптимальных программных траекторий робота-манипулятора / Артеменко В.И., Гордеев Э.Н., Журавлев Ю.И. и др. // Кибернетика и системный анализ. 1986. № 5. С. 84–107.
9. *Гордеев Э.Н.*, *Леонтьев В.К.* Траекторные параметрические задачи // ЖВМиМФ. 1984. № 24. С. 37–46.
10. *Гордеев Э.Н.* Использование радиуса устойчивости оптимизационных задач для скрытия и проверки корректности информации. Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 11. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/993.html (дата обращения: 15.09.2014).
11. *Гордеев Э.Н.*, *Липкин Л.И.* О единственности решения некоторых комбинаторных задач выбора Методы дискретного анализа. Сб. труд. Новосибирск, 1989. Вып. 49. С. 13–31.

12. *Гордеев Э.Н.* Об адекватности моделирования процессов в сетях // Электросвязь. 1999. № 8. С. 16–21.

REFERENCES

[1] Gordeev E.N., Leont'ev V.K. The General Approach to the Study of the Solution Stability in Discrete Optimization Problems. *Zhurnal Vychislit. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1996, no. 36, pp. 66–72 (in Russ.).
[2] Leont'ev V.K. Ustoychivost' v lineynykh diskretnykh zadachakh. Vkn.: Problemy kibernetiki [Stability in Linear Discrete Problems. In the book: Problems of Cybernetics]. Moscow, Nauka Publ., 1979, Iss. 35, pp. 169–185.
[3] Gordeev E.N. Algorithms of Polynomial Complexity for Computing the Radius of Stability in Two Classes of Trajectory Problems. *Zhurnal Vychislit. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1987, vol. 27, no. 7, pp. 984–992(in Russ.).
[4] Gordeev E.N. Stability of Solutions to the Problem of the Shortest Path on a Graph. Diskretnaya matematika [Discrete Mathematics and Applications], 1989, vol. 1, no. 3, pp. 39–46 (in Russ.).
[5] Leont'ev V.K., Gordeev E.N. Kachestvennoe issledovanie traektornykh zadach. [Qualitative Research of Trajectory Problems]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis], 1986, no. 5, pp. 82–90 (in Russ.).
[6] Gordeev E.N. On the Stability of Solutions in Problems of Computational Geometry. *Abstracts of International Scientific Conference "Intelligent Information Processing."* Crimean Academy of Sciences, 1996, p. 8 (in Russ.).
[7] Vyalyy M.N., Gordeev E.N., Tarasov S.P. On the Stability of the Voronoi Diagram. *Zhurnal Vychislit. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1996, vol. 36, no. 3, pp. 405–414 (in Russ.).
[8] Artemenko V.I., Gordeev E.N., Zhuravlev Yu.I. The Method of Constructing the Optimal Program Trajectories for the Robot Manipulator. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis], 1986, no. 5, pp. 84–107 (in Russ.).
[9] Gordeev E.N., Leont'ev V.K. Trajectory Parametric Problems. *Zhurnal Vychislit. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1984, no. 24, pp. 37–46 (in Russ.).
[10] Gordeev E.N. The use of the stability radius of optimization problems to hide and verify correctness of information. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii" MGTU im. Baumana* [El. Sc.-Techn. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation" of Bauman MSTU], 2013, iss. 11. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/993.html (accessed: 15.09.2014).
[11] Gordeev E.N., Lipkin L.I. O edinstvennosti resheniya nekotorykh kombinatornykh zadach vybora. Metody diskretnogo analiza. *Sb. tr*. [On the Uniqueness of Solutions of Some Combinatorial Problems of Selection. Methods of Discrete Analysis.]. *Proc*., 1989, Novosibirsk, iss. 49, pp. 13–31 (in Russ.).
[12] Gordeev E.N. The Adequacy of Modeling Processes in Networks. *Elektrosvyaz'* [Telecommunications], 1999, no. 8, pp. 16–21 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 22.09.2014

Гордеев Эдуард Николаевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры "Информационная безопасность" МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Gordeev E.N. — D.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Information Security, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

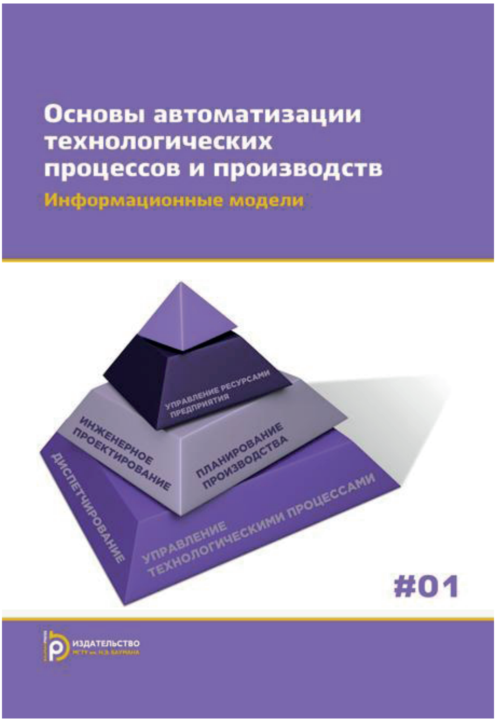
Гордеев Э.Н. Об исследовании устойчивости математических моделей и геометрических конфигураций // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 5. С. 61–74.

Please cite this article in English as:

Gordeev E.N. Investigation of mathematical models stability and geometry configurations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 5, pp. 61–74.

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышла в свет книга

ОСНОВЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ПРОИЗВОДСТВ. ТОМ 1. ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ



Изложены теоретические основы и практические методы автоматизации технологических процессов и производств в соответствии с профессиональной деятельностью магистров по направлению “Автоматизация технологических процессов и производств”.

Приведены материалы, относящиеся к метаонтологии и предметной онтологии. Описаны языки представления информационных моделей, включая основы системологии, язык построения реляционных баз данных IDEF1X, язык функционального моделирования систем IDEF0, унифицированный язык моделирования UML и онтологии инженерных знаний. Представлена функциональная модель жизненного цикла изделий.

Содержание учебного пособия соответствует курсу лекций, читаемых авторами в МГТУ им. Н.Э. Баумана. Представленные материалы могут быть использованы при подготовке бакалавров по направлению “Автоматизация технологических процессов и производств”.