УДК 519.216:621.391

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ В МНОГООСНОВНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

В.В. Сюзев
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: v.suzev@bmstu.ru

Для решения задач спектральной обработки цифровых сигналов в информационно-управляющих комплексах реального времени различного назначения предложен оригинальный метод синтеза новых дискретных действительных параметрических базисных функций, использующий обобщение процедуры Хартли на случай представления их номеров и аргументов в многоосновных системах счисления с произвольными основаниями. Приведено аналитическое описание получаемых в этом случае базисных функций, исследованы их основные свойства, а также методы построения на их основе различных ортогональных систем и преобразований. Предложены методы дополнительного расширения семейства новых базисов, использующие различные способы переупорядочения базисных функций, включая как классические способы на основе инвертирования кодов и кодирования Грея, так и оригинальные способы с применением вариантов китайской теоремы об остатках для индексов. Показана возможность формулировки в терминах данных функций основных теорем спектрального анализа, находящих применение в теории и практике цифровой обработки. Выполнено доказательство справедливости этих теорем. Полученные результаты составляют основу теории представления и преобразования сигналов в новых полных обобщенных базисах Хартли.

***Ключевые слова*:** базисная функция, базисная система, преобразование Фурье, спектральный анализ, система счисления.

GENERIC FUNCTIONS AND HARTLEY TRANSFORM IN POLYBASIC NOTATIONS

V.V. Syuzev
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: v.suzev@bmstu.ru

An ingenious method for synthesizing new discrete parametric basis functions is proposed. It aims at solving problems of spectral processing of digital signals in real time information management systems, having different applications. The method uses the Hartley generalization of polybasic notations with free radix of a number system. The analytical description of the obtained basic functions is given. Their main characteristics are analyzed. Methods of forming various orthogonal systems and transforms based on them are studied. The authors propose some techniques for additional extension of the collection of new bases, which apply various approaches to reorder the basis functions, including both the classical methods of the inverted *and Grey codes and the new ones with the help of some versions of the Chinese remainder theorem for indexes. The possibility of formulating the main spectral analysis theorems in terms of these functions is shown. The theorems could be applied in digital processing, in both theory and practice. Their validity is proved. The obtained results represent the basis of both the representation theory and the transform theory in new Hartley polybasic notations.*

***Keywords*:** basis function, basis system, Fourier transform, spectral analysis, number system.

При решении задач управления в информационно-вычислительных комплексах различного назначения применяются разнообразные методы цифровой обработки сигналов (ЦОС), включая и спектральные [1–3]. Использование последних особенно перспективно, поскольку за счет рационального выбора базиса появляется возможность достижения наибольшей вычислительной и функциональной эффективности получаемых при этом алгоритмов обработки. Однако необходимо учесть, что выбор базиса — сложная теоретическая и прикладная проблема, во-первых, ввиду неограниченного множества возможных систем базисных функций а, во-вторых, вследствие отсутствия общей единой методики синтеза базисных функций, учитывающих особенности решаемых задач обработки и специфику технических средств для их реализации [4, 5].

Существующие методы синтеза систем базисных функций используют различные подходы и разнообразный математический аппарат: дифференциальное исчисление [4, 5]; процедуры ортогонализации Грама – Шмидта [5]; теоретико-числовые представления сигналов [6]; алгебраические структуры [7]; матричные преобразования [8]. Из всего множества получаемых при этом базисных систем особое значение приобретают параметрические базисные функции, содержащие изменяемые параметры, влияющие на их свойства. Известными и важными примерами таких базисов являются классы комплексных экспоненциальных функций Виленкина – Крестенсона (ВКФ) и обобщенных функций Крестенсона (ОФК) [5, 9, 10], управление свойствами которых осуществляется с помощью вариации оснований используемых систем счисления. Изменяя основания систем счисления и выбирая различные способы переупорядочения ВКФ и ОФК, можно получить широкое семейство полезных мультипликативных ортонормированных базисных систем, для которых справедливы все теоремы спектрального анализа и существуют быстрые процедуры вычисления спектра [5, 8–10].

Однако, несмотря на указанные достоинства систем ВКФ и ОФК, их комплексный характер требует использования в алгоритмах цифровой обработки трудоемкой комплексной арифметики, что может послужить весомым ограничением при практическом применении ВКФ и ОФК, особенно при обработке высокочастотных многоразмерных сигналов в режиме жесткого реального времени. В связи с этим возникает актуальная теоретико-прикладная задача синтеза и анализа вещественного базиса со свойствами, близкими к свойствам комплексных базисов, но оперирующих с вещественными числами и операциями. Для ВКФ такая задача автором решена в работе [11] путем перехода от комплексной структуры ВКФ к Хартли — подобной вещественной структуре в системах счисления с постоянным основанием. Цель настоящей работы — обобщение процедуры Хартли [12, 13] на многоосновные системы счисления и создание на ее основе из комплексного базиса ОФК широкого класса вещественных ортонормированных базисов.

Обобщенные функции Хартли и их свойства. Рассмотрим обобщенные дискретные тригонометрические функции

$$COS(k,i) = \cos\Bigl(2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m / p_m\Bigr) \qquad (1)$$

и

$$SIN(k,i) = \sin\bigl(2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m / p_m\bigr), \qquad (2)$$

составляющие действительную и мнимую части дискретных комплексных ОФК [5, 8, 10]. В тригонометрических функциях (1) и (2) их номер k и аргумент i принимают целочисленные положительные значения в интервале $[0, N)$, причем

$$N = \prod_{m=1}^{n} p_m, \qquad (3)$$

где p_m — любые положительные целые числа; k_m и i_m — m-е разряды позиционного n-разрядного представления величин k и i в многоосновной системе счисления с основаниями $p_1, p_2, \ldots, p_n$,

$$k = \sum_{m=1}^{n} k_m p_0 p_1 \cdots p_{m-1} = p_{n-1} p_{n-2} \cdots p_1 k_n + \ldots + p_1 k_2 + k_1, \qquad (4)$$

$$i = \sum_{m=1}^{n} i_m p_0 p_1 \cdots p_{m-1} = p_{n-1} p_{n-2} \cdots p_1 i_n + \ldots + p_1 i_2 + i_1. \qquad (5)$$

В соотношениях (4) и (5) $p_0 = 1$, а k_m и i_m принадлежат к диапазону $[0, p_m - 1]$.

Тригонометрические функции (1) и (2) обладают свойствами четности и нечетности относительно середины интервала определения $[0, N)$, и к ним может быть применена процедура Хартли [5, 12, 13], с использованием которой можно образовать следующие новые дискретные функции:

$$CAS(k,i) = COS(k,i) + SIN(k,i) =$$
$$= \cos\Big(2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m / p_m\Big) + \sin\Big(2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m / p_m\Big). \quad (6)$$

Функции (6) представляют собой обобщение известных обычных функций Хартли на многоосновную систему счисления с переменным основанием. Для отражения этого факта в обозначении обобщенных функций Хартли (ОФХ) (6) использовано обозначение обычных функций Хартли, записанное заглавными буквами. Из развернутой формы записи ОФХ в виде выражения (6) путем известных тригонометрических преобразований можно получить полезное более сжатое их представление

$$CAS(k,i) = \sqrt{2}\sin(2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m / p_m + \pi/4) =$$
$$= \sqrt{2}\cos(2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m / p_m - \pi/4). \quad (7)$$

Обобщенные функции Хартли (6) и (7) обладают важными свойствами, основные из которых перечислены ниже.

1. ОФХ — действительные функции, принимающие только N различных значений. Справедливость этого свойства следует из аналитической записи ОФХ в виде (6) или (7).

2. Переменные k и i в ОФХ являются равноправными, поэтому, если их поменять местами, то функция не изменится: $CAS(k,i) = CAS(i,k)$. В этом проявляется свойство двойственности ОФХ.

3. ОФХ — периодические функции с периодом N. Это следует из того, что при смещении числа i на N единиц его n-разрядное представление (5) остается без изменения.

4. Среднее значение любой ОФХ, кроме нулевой, равно нулю: $(1/N)\sum_{i=0}^{N-1} CAS(k,i) = 0,\ \ k \neq 0$. Действительно, с учетом (6)

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} CAS(k,i) = \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sin\Big(2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m / p_m + \pi/4\Big) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{i_n=0}^{p_n-1}\cdots\sum_{i_2=0}^{p_2-1}\sum_{i_1=0}^{p_1-1}\sin\Big(2\pi \sum_{m=2}^{n} k_m i_m / p_m + \pi/4 + 2\pi k_1 i_1 / p_1\Big). \quad (8)$$

Внутренняя сумма по индексу i_1 выражения (8) является табличной и представляется в виде произведения трех сомножителей [14]:

$$\sum_{i_1=0}^{p_1-1} \sin\Big(2\pi \sum_{m=2}^{n} k_m i_m/p_m + \pi/4 + 2\pi k_1 i_1/p_1\Big) =$$

$$= \sin\Big(2\pi \sum_{m=2}^{n} k_m i_m/p_m + \pi/4 + \pi(p_1-1)k_1/p_1\Big) \sin(\pi k_1) \cos ec(\pi k_1/p_1).$$

Здесь средний сомножитель $\sin(\pi k_1)$ равен 0, а последний — $\cos ec(\pi k_1/p_1)$ — не равен ∞ (так как $k_1 < p_1$), поэтому будут равны нулю внутренняя сумма по i_1 и вся многомерная сумма выражения (8). Следовательно, равны нулю и все средние значения ОФХ для $k \neq 0$. Среднее значение нулевой ОФХ равно единице, поскольку все значения ОФХ $CAS(0, i) = 1$.

5. Мощность P_k любой k-й ОФХ равна единице:

$$P_k = (1/N) \sum_{i=0}^{N-1} CAS^2(k, i) = 1.$$

Для доказательства этого свойства представим квадрат ОФХ с учетом соотношений (7) в виде $CAS^2(k, i) = 2 \sin\Big(2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m/p_m + \pi/4\Big) \cos\Big(2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m/p_m - \pi/4\Big)$, а затем преобразуем произведение тригонометрических функций в их сумму. В результате получим $CAS^2(k, i) = 1 + \sin\Big(4\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m/p_m\Big)$. Тогда мощность P_k можно записать в виде многомерной суммы:

$$P_k = 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sin\Big(4\pi \sum_{m=1}^{n} (k_m i_m/p_m\Big) =$$

$$= 1 + \frac{1}{N} \sum_{i_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{i_2=0}^{p_2-1} \sum_{i_1=0}^{p_1-1} \sin\Big(4\pi \sum_{m=1}^{n} k_m i_m/p_m\Big). \quad (9)$$

В выражении (9) внутренняя сумма по i_1 также является табличной и равна произведению $\sin\Big(4\pi \sum_{m=2}^{n} k_m i_m/p_m + 2\pi/p_1 + \pi(p_1-1)k_1/p_1\Big) \times$ $\times \sin(2\pi k_1) \cos ec(2\pi k_1/p_1)$. Здесь $\sin(2\pi k_1) = 0$, а $\cos ec(2\pi k_1/p_1) \neq \infty$ при любых значениях k_1, поэтому вся многомерная сумма в уравнении (9) будет равна нулю и $P_k = 1$.

6. ОФК — ортогональные функции, так как

$$(1/N) \sum_{i=0}^{N-1} CAS(k, i) CAS(\lambda, i) = 0$$

при $k \neq \lambda$. Для доказательства этого свойства воспользуемся при записи произведения двух ОФК их представлением в виде выражения (6), а само произведение по известным тригонометрическим соотношениям преобразуем к сумме:

$$CAS(k,i)CAS(\lambda,i) = \sin\Big[(2\pi\sum_{m=1}^{n}(k_m+\lambda_m)i_m/p_m\Big] + \\ + \cos\Big[2\pi\sum_{m=1}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m/p_m\Big],$$

что позволит сумму этого произведения выразить как

$$\sum_{i=0}^{N-1} CAS(k,i)CAS(\lambda,i) = \sum_{i=0}^{N-1}\sin\Big[(2\pi\sum_{m=1}^{n}(k_m+\lambda_m)i_m/p_m\Big] + \\ + \sum_{i=0}^{N-1}\cos\Big[2\pi\sum_{m=1}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m/p_m\Big]. \quad (10)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое суммы (10). Запишем первое слагаемое в многомерном виде

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sin\Big[(2\pi\sum_{m=1}^{n}(k_m+\lambda_m)i_m/p_m\Big] = \\ = \sum_{i_n=0}^{p_n-1}\cdots\sum_{i_2=0}^{p_2-1}\sum_{i_1=0}^{p_1-1}\sin\Big[2\pi\sum_{m=2}^{n}(k_m+\lambda_m)i_m/p_m + 2\pi(k_1+\lambda_1)i_1/p_1\Big].$$

Здесь внутренняя сумма по i_1 будет табличной и представляется в виде произведения, один из сомножителей которого равен $\sin[\pi(k_1 + + \lambda_1)]$ и принимает нулевое значение при любых значениях k_1 и λ_1. Вследствие этого и внутренняя сумма, и вся многомерная сумма также будут равны нулю.

Для второго слагаемого в выражении (10) по аналогии имеем

$$\sum_{i=0}^{N-1}\cos\Big[2\pi\sum_{m=1}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m/p_m\Big] = \\ = \sum_{i_n=0}^{p_n-1}\cdots\sum_{i_2=0}^{p_2-1}\sum_{i_1=0}^{p_1-1}\cos\Big[2\pi\sum_{m=2}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m/p_m + 2\pi(k_1-\lambda_1)i_1/p_1\Big].$$

Здесь при $k_1 \neq \lambda_1$ внутренняя сумма представляется произведением, один из сомножителей которого имеет вид $\sin[\pi(k_1-\lambda_1)]$ и равен нулю. В случае равенства значений младших разрядов кодов чисел k и λ (при

$k_1 = \lambda_1$) внутренняя сумма во втором слагаемом выражения (10) равна $\sum\limits_{i_1=0}^{p_1-1} \cos\left[2\pi \sum\limits_{m=2}^{n}(k_m - \lambda_m) i_m/p_m\right] = p_1 \cos\left[2\pi \sum\limits_{m=2}^{n}(k_m - \lambda_m) i_m/p_m\right]$ и второе слагаемое в (10) представляется уже $(n-1)$-мерной суммой:

$$p_1 \sum_{i_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{i_3=0}^{p_3-1} \sum_{i_2=0}^{p_2-1} \cos\left[2\pi \sum_{m=3}^{n}(k_m - \lambda_m) i_m/p_m + 2\pi(k_2 - \lambda_2) i_2/p_2\right].$$

Внутренняя сумма приведенного выражения в зависимости от значений k_2 и λ_2 либо будет равна нулю, либо p_2, что снова приведет к уменьшению размерности представления второго слагаемого в общем выражении (10). Поскольку $k \neq \lambda$, обязательно хотя бы одни значения k_m и λ_m не будут равны между собой. В результате и эта многомерная сумма также станет равной нулю. Таким образом, условие ортогональности доказано.

Используя свойства 5 и 6, можно записать свойство ортонормированности ОФХ:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} CAS(k,i) CAS(\lambda,i) = \begin{cases} 1, & k = \lambda, \\ 0, & k \neq \lambda. \end{cases}$$

Базисные системы обобщенных функций Хартли. Объединяя N первые ОФХ, получаем семейство ортонормированных базисных систем, пригодных для представления любых решетчатых сигналов конечной мощности, которые определены на дискретном интервале $[0, N)$. Конкретная система из семейства формируется путем задания фиксированных значений параметров $\{p_m\}$, определяющих основания используемой системы счисления. Каждая полученная при этом система будет полной, поскольку к ней невозможно будет добавить ни одной новой функции, которая была бы ортогональной ко всем остальным.

Системы дискретных ОФХ удобно записывать в виде матриц $\boldsymbol{C}$ их значений. Эти матрицы будут симметрическими и ортогональными. Обратные к ним матрицы совпадут с прямыми с точностью до постоянного множителя $1/N$: $\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}/N$. Свойства матриц одинаковы для строк и столбцов (в силу их симметричности). Матрицы содержат по N различных действительных элементов. Элементы нулевых строк и столбцов всех матриц ОФХ равны единице.

Базисная система ОФХ, описываемая выражениями (6) и (7), при конкретных значениях параметров p_m является только одной из возможных полных базисных систем, использующих ОФХ. На основе этих функций можно построить целое семейство базисов с ортогональными матрицами, число которых зависит от числа N. Для этого достаточно использовать формулы (6) или (7) для всех возможных комбинаций сомножителей в произведении (3) для N. Если все сомножители p_m разные, то этим способом удается получить $n!$ различных базисных систем ОФХ.

Дальнейшее дополнительное расширение ассортимента действительных тригонометрических базисов достигается за счет построения при фиксированных значениях p_m матриц ОФХ, отличающихся порядком следования их строк и столбцов, т.е. за счет использования различных способов упорядочения функций $CAS(k,i)$ в системе. Изменение порядка следования функций в базисной системе обеспечивается применением различных замкнутых операций переупорядочения к номерам и аргументам базисных функций. Замкнутые операции, изменяя порядок следования значений индексов k и i, не меняют самого диапазона их изменения. Поэтому условия ортогональности и полноты получаемых при этом новых систем остаются постоянными.

Операции переупорядочения можно применять либо только к индексу k или только к индексу i ОФХ, либо последовательно к ним обоим. В первом случае будут получены полные системы с ортогональными, но несимметрическими матрицами $\boldsymbol{C}$, а во втором — с симметрическими ортогональными матрицами. И те, и другие могут быть эффективно использованы для спектрального анализа.

В теории базисных функций в качестве операций переупорядочения широко используются операции инвертирования кодов индексов и кодирование Грея [5, 8, 9]. Для ОФХ эти операции должны быть обобщены на случай многоосновной системы счисления. Если номер ОФХ k в многоосновной системе счисления представляется выражением (4), то инверсное ему число $\overline{k}$ в той же системе счисления записывается следующим образом:

$$\overline{k} = \sum_{m=1}^{n} k_{n+1-m} M_0 M_1 \cdots M_{m-1}, \tag{11}$$

где $M_m = p_{n+1-m}$, $M_0 = p_{n+1} = 1$. Обобщенная инверсия, как и двоичная, и p-ичная инверсии, сводится к записи кода числа k в обратном порядке. Однако веса разрядов в многоосновной системе, где диапазоны изменения разрядов k_m в общем случае не совпадают, должны быть изменены по закону (11). Аналогично записывается и инверсный код аргумента i ОФХ.

Код Грея $< k >$ числа k в многоосновной системе счисления вычисляется по алгоритму

$$< k_m >= (k_m + k_{m+1}) \,(\operatorname{mod} p_m), \quad m = 1, 2, \ldots, n; \quad k_{n+1} = 0, \tag{12}$$

где сложение выполняется по модулю числа p_m. Такой же алгоритм используется и для вычисления кода Грея числа i.

Если сомножители p_m в формуле (3) для N являются взаимно простыми числами, то применительно к системам ОФХ можно предложить еще два способа переупорядочения базисных функций, использующих китайскую теорему об остатках (КТО) для индексов без перестановки элементов и с их перестановкой [5, 6]. В первом случае одномерный номер k будет представляться в многомерном модулярном виде

$$(k) \equiv \sum_{m=1}^{n} (N/p_m) T_m k_m \pmod N, \tag{13}$$

где T_m — числа, обратные числам (N/p_m) и удовлетворяющие сравнению

$$(N/p_m) T_m \equiv 1 \pmod{p_m}, \tag{14}$$

а во втором — в виде

$$[k] \equiv \sum_{m=1}^{n} (N/p_m) k_m \pmod N. \tag{15}$$

Рассматривая выражения (13) и (15) как запись своеобразных кодов числа k с разрядами $(k_m) = (N/p_m)T_m k_m$, $[k_m] = (N/p_m)k_m$ и с поразрядными весами NT_m/p_m и N/p_m, на их основе можно организовать новые процедуры замкнутого переупорядочения строк матрицы $\boldsymbol{C}$, отличающиеся от процедур, использующих обобщенную инверсию и обобщенный код Грея. Обратные числа T_m, присутствующие в записи (13) КТО без перестановки, находятся из уравнения (14) либо подбором, либо по алгоритму Евклида [5, 6]. Аналогично можно закодировать и аргумент ОФХ i, получив такие же процедуры перестановки столбцов матриц $\boldsymbol{C}$.

Проиллюстрируем возможности всех рассмотренных способов переупорядочения на конкретном примере. Пусть $N = 6$ и $p_1 = 2$, а $p_2 = 3$. Тогда в соответствии с уравнениями (11)–(15) запишем следующие соотношения для кодов номера k:

- при инверсном кодировании $\overline{k} = 3k_1 + k_2$;
- при кодировании Грея $< k_1 >= (k_1 + k_2) \pmod 2$, $< k_2 >= = k_2 \pmod 3$;
- при кодировании по КТО без перестановки (в этом случае $T_1 = 1$, а $T_2 = 2$) $(k) = 4k_2 + 3k_1 \pmod 6$;
- при кодировании по КТО с перестановкой $[k] = 2k_2 + 3k_1 \pmod 6$.

Аналогичные соотношения будут иметь место и для аргумента i. При этом k_1 и i_1 принимают значения 0 и 1, а k_2 и i_2 — значения 0, 1 и 2.

Значения кодов чисел k и i в различных системах кодирования, полученные из приведенных соотношений, представлены в таблице.

Значения индексов k и i в различных системах кодирования

k, i	0	1	2	3	4	5
$\overline{k}, \overline{i}$	0	3	1	4	2	5
$< k >, < i >$	0	1	3	2	4	5
$(k),(i)$	0	3	4	1	2	5
$[k],[i]$	0	3	2	5	4	1

Схема переупорядочения матриц ОФХ в этом случае будет такой. По общему алгоритму (6) или (7) для $N = 6$, $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$ строится ортогональная симметрическая матрица ОФХ $\boldsymbol{C}$ размерностью 6×6. Затем в ней переставляются либо раздельно строки и столбцы, либо последовательно строки, а потом столбцы (можно, наоборот) в соответствии с номерами, указанными в таблице. При этом будут получены новые ортогональные несимметрические и симметрические матрицы $\boldsymbol{C}$ ОФХ. Так, если первую строку исходной матрицы переместить на место третьей строки, вторую — на место первой, третью — на место четвертой, четвертую — на место второй, а нулевую и пятую строки оставить на своем месте, то будет получена матрица $\boldsymbol{C}$ с инверсным переупорядочением строк. Эта матрица будет несимметрической. Если же в ней по такому же правилу провести перестановку столбцов, то в результате будет получена ортогональная симметрическая матрица ОФХ. Аналогичная процедура используется и для других способов переупорядочения, соответствующих остальным способам кодирования. Естественно, такой же подход может быть применен и для исходной матрицы $\boldsymbol{C}$, полученной по алгоритму (6) или (7) при $N = 6$, $p_1 = 3$ и $p_2 = 2$, что позволит в 2 раза увеличить число полных ортогональных матриц $\boldsymbol{C}$ для систем ОФХ с $N = 6$. При увеличении N число возможных матриц ОФХ существенно возрастет.

Результаты анализа приведенных и других рассмотренных примеров показывают, что все матрицы, получаемые различными способами переупорядочения, отличаются друг от друга по структуре, хотя состоят из одних и тех же элементов и обладают одинаковыми свойствами. Это свидетельствует о том, что рассмотренные способы не подменяют друг друга и позволяют найти широкое множество новых полных ортогональных действительных базисных систем.

Приведенные системы ОФХ носят обобщенный характер. Из них за счет выбора оснований $p_1, p_2, \ldots, p_n$ системы счисления можно получить множество известных и новых неизученных базисных систем. Так при $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ все системы ОФХ в многоосновной системе счисления переходят в системы ОФХ в одноосновной системе счисления с произвольным основанием [11], при

$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = N$ и $n = 1$ все системы ОФХ переходят в систему обычных функций Хартли [12, 13], а при $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 2$, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 4$ и $n \neq 1$ из систем ОФХ получаются системы Уолша [5, 9].

Обобщенные преобразования Хартли и их свойства. Обобщенные преобразования Хартли (ОПХ) представляются в виде прямого и обратного дискретных преобразований Фурье

$$X_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)\, CAS(k, i), \tag{16}$$

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X_x(k)\, CAS(k, i), \tag{17}$$

где $x(i)$ — отсчеты решетчатого входного сигнала; $X_x(k)$ — составляющие его обобщенного спектра Хартли. Сигнал $x(i)$ и его спектр $X_x(k)$ в ОПХ можно представить действительными дискретными функциями с интервалом определения $[0, N)$. Энергетическая взаимосвязь сигнала и его спектра устанавливается равенством Парсеваля $(1/N) \sum\limits_{i=0}^{N-1} x^2(i) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} X_x^2(k)$. Его выполнение подтверждает полноту базисной системы ОФХ. В матричной форме пара ОПХ записывается в виде уравнений $\boldsymbol{X}_x = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{N}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_x$, которые справедливы для любой структуры рассмотренных ранее ортогональных матриц $\boldsymbol{C}$ ОФХ.

Системы ОФХ не обладают свойством мультипликативности, так как произведение двух любых ОФК не приводит к ОФК той же системы. Поэтому в базисе ОФК в прямом виде не выполняются важные теоремы спектрального анализа, справедливые для мультипликативных базисов [5, 9]. Однако эти теоремы можно сформулировать и в терминах спектров ОФХ, если использовать взаимосвязь спектров ОФХ со спектрами мультипликативных обобщенных базисов Крестенсона, для которых теоремы спектрального анализа выполняются [5, 10].

В своей структуре ОФХ и ОФК используют одинаковые обобщенные тригонометрические функции (1) и (2). В этом смысле указанные системы этих функций являются родственными. Спектры родственных базисных систем всегда взаимосвязаны. Для определения этой связи примем следующие дополнительные обозначения четных и нечетных функций: $X_{\text{ч}}(k) = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=0}^{N-1} x(i)\, COS(k, i)$, $X_{\text{н}}(k) = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=0}^{N-1} x(i)\, SIN(k, i)$. Тогда спектры $X_x(k)$ Хартли и $X_k(k)$

Крестенсона можно записать в виде

$$X_x(k) = X_ч(k) + X_н(k), \tag{18}$$

$$X_k(k) = X_ч(k) - jX_н(k), \quad j = \sqrt{-1}. \tag{19}$$

В уравнении (19) перед мнимой частью спектра Крестенсона стоит знак минус. Это связано с тем, что прямое преобразование Фурье в базисе ОФК носит комплексно-сопряженный характер [5, 10].

Поскольку $X_ч(k)$ — четная функция переменной k, а $X_н(k)$ — нечетная функция той же переменной, целесообразно ввести спектр Хартли для отрицательных значений его номера, который примет вид

$$X_x(-k) = X_ч(k) - X_н(k). \tag{20}$$

Этот спектр в базисе ОФХ будет играть роль, аналогичную роли комплексно-сопряженного спектра $X_k^*(k)$ в базисе ОФК. Последовательно суммируя и вычитая уравнения (18) и (20), после преобразования получаем $X_ч(k)=[X_x(k)+X_x(-k)]/2$, $X_н(k)=[X_x(k)-X_x(-k)]/2$, и спектр Крестенсона можно записать как

$$X_k(k) = [X_x(k) + X_x(-k)]/2 - j[X_x(k) - X_x(-k)]/2. \tag{21}$$

Уравнение (21) является уравнением связи спектров в родственных базисах ОФХ и ОФК. Используя его, можно свойства спектров Крестенсона преобразовать в свойства спектра Хартли. Покажем это на примере двух важных свойств спектров в ортогональных базисах: 1) свойства спектров сигналов с обобщенным сдвигом во времени; 2) свойства обобщенной свертки двух сигналов. Оформим эти свойства в виде соответствующих теорем, как это принято в теории ЦОС [9].

Теорема о спектре сигналов с обобщенным сдвигом во времени. *Спектр Хартли сигнала, сдвинутого по оси времени i на величину τ по закону операций прямого $i \oplus \tau$ и обратного $i \ominus \tau$ обобщенного сдвига, выполняемого в многоосновной системе счисления с помощью поразрядного суммирования или вычитания по модулям p_m $\{p_m\}$-ичных кодов чисел i и τ, равен спектру несдвинутого сигнала, модулированному обобщенными тригонометрическими функциями, заданными в момент времени τ.*

◄ Если сигнал $y(i)$ получается путем обобщенного сдвига $i \oplus \tau$ по оси времени i на величину τ сигнала $x(i)$ ($y(i) = x(i \oplus \tau) = x(\lambda)$, где $\lambda_m = (i_m + \tau_m) \,(\mathrm{mod}\, p_m)$, $m = 1, 2, \ldots, n$), то его спектр в базисе ОФК имеет вид [10]:

$$Y_k(k) = X_k(k) \exp\Big(j2\pi \sum_{m=1}^{n} k_m \tau_m / p_m\Big), \tag{22}$$

где τ_m — разряды представления числа τ в многоосновной системе счисления с различными основаниями $\{p_m\}$ (см. (4) и (5)). Используя уравнения (19) и (21), условное обозначение обобщенных тригонометрических функции (1) и (2) и развернутую запись комплексной обобщенной экспоненты, выражение (22) можно преобразовать к виду

$$Y_k(k)=\left[\frac{X_x(k)+X_x(-k)}{2}COS(k,\tau)+\frac{X_x(k)-X_x(-k)}{2}SIN(k,\tau)\right]-$$

$$-j\left[\frac{X_x(k)-X_x(-k)}{2}COS(k,i)-\frac{X_x(k)+X_x(-k)}{2}SIN(k,i)\right].$$

Учитывая, что обобщенный спектр Хартли $Y_x(k)$ представляется в виде суммы действительной и мнимой частей спектра Крестенсона $Y_k(k)$ (см. (18) и (19)), окончательно получаем

$$Y_x(k)=X_x(k)COS(k,\tau)-X_x(-k)SIN(k,\tau). \tag{23}$$

При обратном обобщенном сдвиге $i\ominus\tau$, реализуемом с помощью поразрядного модулярного вычитания по модулям $p_m\{p_m\}$-ичных кодов чисел i и τ, имеем

$$Y_x(k)=X_x(k)COS(k,i)+X_x(-k)SIN(k,i). \tag{24}$$

Выражения (23) и (24) — аналитическая запись теоремы об обобщенном сдвиге сигнала в терминах спектров Хартли. ►

Согласно теореме, действительно обобщенный сдвиг сигнала по оси времени приводит к модуляции спектра несдвинутого сигнала обобщенными тригонометрическими функциями (составляющие спектра с положительными номерами — четными, а составляющие спектра с отрицательными номерами — нечетными тригонометрическими функциями). В этом случае спектры сдвинутого сигнала выражаются при прямом сдвиге через разность, а при обратном — через сумму модулированных составляющих.

Теорема об обобщенной свертке двух сигналов. *Спектр Хартли сигнала, являющегося результатом обобщенной свертки двух других сигналов, равен с точностью до постоянного множителя произведению спектров Хартли этих сигналов.*

◄ Если сигнал $y(i)$ — это обобщенная свертка двух сигналов $x(i)$ и $u(i)$ с тем же интервалом определения $[0,N)y(i)=\sum\limits_{\lambda=0}^{N-1}x(\lambda)u(\lambda\ominus i)$, то в базисе ОФК спектр такой свертки равен произведению спектров сигналов-сомножителей [10]: $Y_k(k)=NX_k(k)U_k(k)$. Используя связь спектров Крестенсона и Хартли в форме уравнения (21), из этого выражения после преобразования получаем

$$Y_k(k)=\frac{N}{4}\Big\{[X_x(k)+X_x(-k)][U_x(k)+U_x(-k)]-$$

$$-[X_x(k)-X_x(-k)][U_x(k)-U_x(-k)]\Big\}-j\frac{N}{4}\Big\{[X_x(k)+X_x(-k)][U_x(k)- \\ -U_x(-k)]+[X_x(k)-X_x(-k)][U_x(k)+U_x(-k)]\Big\},$$

откуда следует, что

$$Y_x(k)=\frac{N}{2}\Big\{[X_x(k)+X_x(-k)]U_x(k)+[X_x(k)-X_x(-k)]U_x(-k)\Big\}.$$

Эта зависимость представляет собой математическое описание теоремы об обобщенной свертке на языке спектров ОФХ. ►

Согласно приведенной теореме, ее представление в базисе ОФХ сложнее, чем в базисе ОФК, что не имеет принципиального значения. В частном случае, когда один или два свертываемых сигнала являются четными или нечетными относительно середины интервала определения, запись теоремы о свертке в базисах ОФХ и ОФК совпадает. Это объясняется тем, что в этом случае спектры Хартли также являются четными или нечетными функциями номера k. Так, для четного сигнала $x(i)=x(N-i)$ в спектре Хартли $X_x(k)=X_x(-k)$ и $Y_x(k)=NX_x(k)U_x(k)$.

Практическое применение уравнения (21) связи спектров и теорем спектрального анализа требует знания обобщенных спектральных составляющих Хартли с отрицательными номерами. Последние легко можно определить, если учесть, что каждому спектральному коэффициенту Хартли с номером $-k$ соответствует коэффициент Хартли с положительным номером k^*. Номера $-k$ и k^* являются $\{p_m\}$-ично противоположными числами, разряды которых в многоосновной системе счисления связаны соотношением $-k_m=k^*_m=(p_m-k_m)\,(\mathrm{mod}\,p_m)$.

Заключение. Разработаны основы теории нового класса дискретных вещественных параметрических обобщенных хартли-подобных базисных функций, использующих представления их номеров и аргументов в многоосновной системе счисления с различными основаниями. Приведены описания таких базисных функций, сформулированы и доказаны их основные свойства, предложены различные эффективные способы формирования на их основе полных ортогональных базисных систем и преобразований, показана возможность формулирования в терминах этих функций основополагающих теорем спектрального анализа сигналов.

Схожесть свойств полученных базисных систем со свойствами комплексных систем Крестенсона и однозначная взаимосвязь спектров этих систем позволяет рассматривать предложенный базис ОФХ в качестве вещественной альтернативы комплексному базису ОФК. Обобщенный характер новых преобразований Хартли дает возможность использовать их как при обобщении алгоритмов решения известных задач ЦОС, так и при решении новых задач обработки сигналов различной физической природы. Расширению области прикладного применения обобщенного базиса Хартли будет способствовать разработка специальных быстрых вычислительных процедур анализа спектра, которая может рассматриваться в качестве актуальной задачи последующих исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айфичер Э.*, *Джервис Б.* Цифровая обработка сигналов: практический подход; пер. с англ. М.: Издательский дом “Вильямс”, 2004. 992 с.
2. *Spaceborne* Infrared Fourier-Transfom Spectrometers for Temperature and Humidity Souunding of the Earth’s Atmosphere / Yu.M. Golovin, F.S. Zavelevich, A.G. Nikulin, D.A. Kozlov, D.O. Monakhov, I.A. Kozlov, S.A. Arkhipov, V.A. Tselikov, A.S. Romanovskii // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2014. Vol. 50. No. 9.
3. *Цифровая* обработка сигналов и изображений в радиотехнических приложениях; под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физмалит, 2007. 554 с.
4. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов. радио, 1972. 352 с.
5. *Сюзев В.В.* Основы теории цифровой обработки сигналов. М.: РТСофт, 2014. 752 с.
6. *Власенко В.А.*, *Лаппа Ю.М.*, *Ярославский Л.П.* Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. М.: Наука, 1990. 180 с.
7. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов; пер. с англ. М.: Мир, 1989. 448 с.
8. *Дагман Э.Е.*, *Кухарев Г.А.* Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983. 232 с.
9. *Трахтман А.М.*, *Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
10. *Сюзев В.В.*, *Савельев А.Я.*, *Гудзенко Д.Ю.* Методы представления и преобразования сигналов в базисе обобщенных функций Крестенсона // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2012. № 3. URL: http://technomag.edu.ru/doc/372760.html (дата обращения: 12.03.2015).
11. *Сюзев В.В.* Обобщенные функции и преобразования Хартли в системах счисления с постоянным основанием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 2. С. 63–79.
12. *Брайсуэлл Р.* Преобразования Хартли; пер. с англ. М.: Мир, 1990. 175 с.
13. *Сюзев В.В.* Теоретические основы спектрального анализа в базисе Хартли // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2011. № 10. URL: http://technomag.edu.ru/doc/230816.html (дата обращения: 12.03.2015).
14. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы; пер. с англ. М.: Наука, 1969. 273 с.

REFERENCES

[1] Ifeachor E.C., Jervis B.W. Digital Signal Processing: A Practical Approach. 2nd Ed., 2002. 992p. (Russ. Ed.: Ayficher E., Dzhervis B. Tsifrovaya obrabotka signalov: prakticheskiy prodkhod. Moscow, St. Petersburg., Kiev, Izd. Dom Vil’yams Publ., 2004. 992 p.).

[2] Golovin Yu.M., Zavelevich F.S., Nikulin A.G., Kozlov D.A., Monakhov D.O., Kozlov I.A., Arkhipov S.A., Tselikov V.A., Romanovskiy A.S. Spaceborne Infrared Fourier-Transfom Spectrometers for Temperature and Humidity Sounding of the Earth's Atmosphere. *Izvestiya*, *Atmospheric and Oceanic Physics*, 2014, vol. 50, no. 9.

[3] Kravchenko V.F. Tsifrovaua obrabotka signalov i izobrazheniy v radiofizocheskirh prilozhenieakh [Digital signal and image in radiophysical applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 554 p.

[4] Trakhtman A.M. Vvedenie v obobshchennuyu spectral'nuyu teoriyu signalov [Introduction to the generalized spectrum theory of signals]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1972. 352 p.

[5] Syuzev V.V. Osnovy teorii tsifrovoy obrabotki signalov [The heart of the theory of digital signal processing]. Moscow, RTSoft Publ., 2014. 752 p.

[6] Vlasenco V.A., Lappa Yu.M., Yaroslavskiy L.P. Metody sinteza bystryrh algoritmov svertki i spertral'nogo analiza signalov [Synthesis technique of fast algorithms of fold and spectral analysis of signals]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 180 p.

[7] Blahut R. Fast Algorithms for Digital Signal Processing. Addison-Wesley Publ., 1985. 448 p. (Russ. Ed.: Bleyhut R. Bystrykhie algoritmiy tsifrovoy obrabotki signalov. Moscow, Mir Publ., 1983. 448 p.).

[8] Dagman E.E., Kukharev G.A. Bystrye diskrethye ortogonalnye preobrazovaniya [The fast discrete orthogonal transforms]. Novosibirsk, Nayka Publ., 1983. 232 p.

[9] Trakhtman A.M., Trakhtman V.A. Osnovy teorii diskretnykh signalov na konechnykh intervalakh [The heart of the theory of discrete signals on finite intervals]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1975. 208 p.

[10] Syuzev V.V. Presentation methods and signal conversion in generalized Christenson functions basis. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education"], 2012, no. 3, pp. 1–28 (in Russ). Available at: http://technomag.edu.ru/doc/372760.html (accessed 22.02.2015).

[11] Syuzev V.V. Generalized functions and Hartley transforms in number systems with a permanent base. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2014, no. 2, pp. 63–79 (in Russ.).

[12] Bracewell R. Hartley Transform: theory and applications. New York: Oxford University Press, 1986. (Russ. Ed.: Braysuell R. Preobrazovanie Khartli. Moscow, Mir Publ., 1990. 175 p.).

[13] Syuzev V.V. Theoretical foundations of spectral analysis in the Hartley basis. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education"], 2011, no. 10, pp. 1–47. Available at: http://technomag.edu.ru/doc/230816.html (accessed 22.02.2015).

[14] Dwight H.B. Tables of Integrals and Other Mathematical Data. 3th Ed. The Macmillan Co., N.Y., 1947. 198 p. (Russ. Ed.: Dvayt G.B. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly. Moscow, Nauka Publ., 1969. 227 p.).

Статья поступила в редакцию 18.05.2015

Сюзев Владимир Васильевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой "Компьютерные системы и сети" МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Syuzev V.V. — D.Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Computer Systems and Networks, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

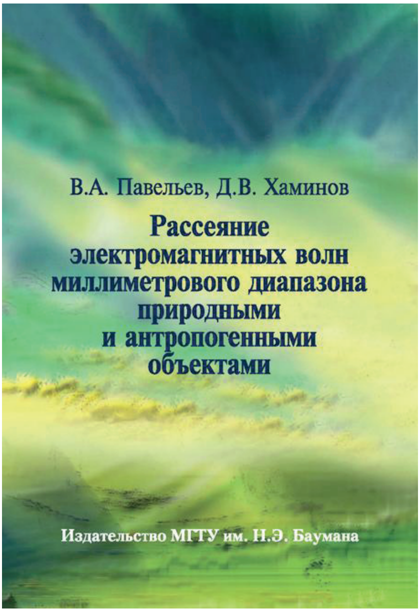
Сюзев В.В. Обобщенные функции и преобразования Хартли в многоосновных системах счисления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 5. С. 44–60.

Please cite this article in English as:

Syuzev V.V. Generic functions and Hartley transform in polybasic notations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 5, pp. 44–60.

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышла в свет книга

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ПРИРОДНЫМИ И АНТРОПОГЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ



В книге собраны и систематизированы материалы отечественной и зарубежной литературы по исследованию отражающих характеристик широкого класса земных подстилающих поверхностей (ПП) природного (естественного) и антропогенного происхождения, а также объектов местности в 8-мм диапазоне электромагнитных волн (ЭМВ). Приведены данные о средних значениях удельной эффективной площади рассеяния (УЭПР) для основных элементов ландшафта во всем диапазоне зенитных углов, зависимости изменения УЭПР от физических характеристик ПП, дана методика априорного определения УЭПР по таким информационным материалам, как топографические карты, фотоснимки, климатические и погодные сводки. Рассмотрены вопросы по определению эффективной площади рассеяния (ЭПР) для ряда антропогенных объектов, находящихся на земной поверхности. Приведенные эмпирические модели можно использовать для прогнозирования поведения УЭПР и ЭПР при изменении параметров поверхностей под влиянием сезонных и погодных условий.

Для специалистов, занимающихся вопросами мониторинга земной поверхности, проектированием радиотехнических систем навигации и наведения в миллиметровом диапазоне.