

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГИЕ ПОТЕРИ В КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ РЕЗОНАТОРОВ ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПОВ

**Б.С. Лунин¹, А.В. Юрин², М.А. Басараб²,
В.А. Матвеев², Е.А. Чуманкин³**

¹МГУ им. М.И. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: bmic@mail.ru

³ОАО “АНПП “ТЕМП-АВИА”, г. Арзамас, Нижегородская обл.,
Российская Федерация

Одной из главных характеристик резонаторов волновых твердотельных гироскопов является добротность, которая во многом определяет систематическую и случайную погрешность прибора. Для увеличения добротности резонатора при конструировании необходимо учитывать особенности различных диссипативных процессов, вклад которых неодинаков и зависит от свойств материала резонатора, его конструкции, качества обработки поверхности, уровня вакуума в приборе. Фундаментальным диссипативным процессом является термоупругое внутреннее трение. С помощью модели термоупругих процессов и конечно-элементного моделирования показано влияние термоупругого внутреннего трения на характеристики резонаторов ВТГ, изготовленных из различных материалов. Показано, что в кварцевом стекле по сравнению с другими конструкционными материалами термоупругое внутреннее трение очень мало. Это позволяет рекомендовать кварцевое стекло в качестве основного конструкционного материала резонаторов волновых твердотельных гироскопов.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, добротность резонатора, термоупругие потери, конечно-элементное моделирование.

THERMOELASTIC LOSSES IN STRUCTURAL MATERIALS OF SOLID WAVE GYROSCOPE RESONATORS

**B.S. Lunin¹, A.V. Yurin², M.A. Basarab²,
V.A. Matveev², E.A. Chumankin³**

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: bmic@mail.ru

³ОАО “АНПП “ТЕМП-АВИА”, Arzamas, Nizhny Novgorod region,
Russian Federation

One of the key features of the resonators of wave solid-state gyros is their quality factor defining in many respects the instrument's systematic and random errors. To enhance resonator quality, it is necessary to take in designing into consideration peculiar properties of different dissipative processes. Contribution of these processes depends on the resonator material behaviour; resonator design, its surface processing quality, vacuum level in the instrument. Thermoelastic internal friction is a fundamental dissipative process. Influence of internal thermoelastic friction on the characteristics of resonator manufactured of various materials, is revealed by means of the model of thermoelastic processes and finite-element simulation. It is shown that internal thermoelastic friction in quartz glass is very

small as compared to other structural materials. It allows to recommend quartz glass as a main structural material for the wave solid-state gyroscope resonators.

Keywords: wave solid-state gyroscope, resonator quality factor, thermoelastic losses, finite-element simulation.

В последнее десятилетие широкое распространение получили вибрационные гироскопы, действие которых основано на эффекте Кориолиса. Основой таких приборов являются механические резонаторы различных конструкций — рамочные, кольцевые, полусферические и т.п. [1, 2]. Одной из главных характеристик таких резонаторов является их добротность, которая в значительной мере определяет систематическую и случайную погрешности прибора [2]. Чтобы увеличить добротность в качестве конструкционных обычно выбирают материалы с малым объемным внутренним трением: кварцевое стекло, кремний, металлы, синтетический сапфир и др. Для достижения наилучших результатов при конструировании резонатора необходимо учитывать особенности всех основных диссипативных процессов. Напомним, что под внутренним трением в твердом теле понимают совокупность всех необратимых термодинамических процессов, приводящих к рассеянию энергии упругих колебаний резонатора. Величина внутреннего трения пропорциональна отношению энергии, рассеянной за один период колебаний (ΔW), к общей энергии резонатора (W):

$$\zeta = \Delta W / (2\pi W), \quad (1)$$

при этом добротность резонатора $Q = \zeta^{-1}$.

Поскольку внутреннее трение в резонаторе определяется суммой всех диссипативных процессов, то

$$\zeta = \zeta_T + \zeta_V + \zeta_S + \zeta_G + \dots, \quad (2)$$

где ζ_T — термоупругое внутреннее трение; ζ_V — внутреннее трение в структуре материала; ζ_S — потери в поверхностном слое материала; ζ_G — газовое трение.

Вклады этих отдельных процессов (а их перечень не исчерпывается (2)) неодинаковы и зависят от свойств материала резонатора, его конструкции, качества обработки поверхности, уровня вакуума в приборе. Внутреннее трение в твердом теле и в его поверхностном слое, а также газовое трение достаточно подробно рассмотрены в [3–5]. Термоупругое внутреннее трение в зависимости от свойств материала и конструкции может быть как пренебрежимо малым, так и полностью ограничивающим добротность резонатора. Детальный расчет термоупругих потерь позволяет достаточно точно оценить потенциальные возможности конструкции вибрационного гироскопа. В литературе имеются примеры таких расчетов, выполненных для микромеханических приборов [6–8]. В волновых твердотельных гироскопах (ВТГ) в качестве резонаторов используют осесимметричные тонкостенные оболочки, термоупругие потери в материале которых также

могут быть значительными. Цель настоящей работы состоит в рассмотрении влияния термоупругого внутреннего трения на характеристики резонаторов ВТГ, изготовленных из различных материалов.

Моделирование термоупругого внутреннего трения в резонаторе. Физическая сущность термоупругого внутреннего трения впервые была раскрыта Зинером [9], который связал его с возникновением тепловых потоков при деформации твердого тела. При колебаниях резонатора деформация его отдельных участков имеет разные знаки, т.е. в одних местах материал расширяется, а в других сжимается. Изменение объема тела при деформации требует совершения работы A , которая может быть выражена через коэффициент теплового расширения (α) и модуль упругости (E) [10] следующим образом:

$$A = 9\alpha^2 T E V, \quad (3)$$

где T — температура тела; V — молярный объем вещества.

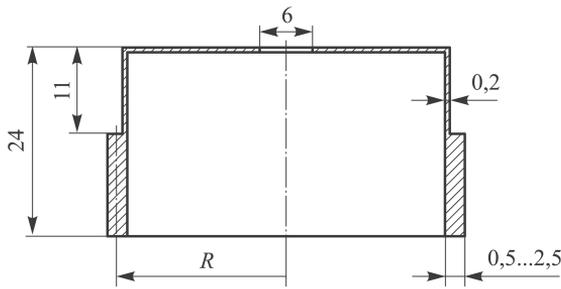
Из (3) следует, что при деформации твердого тела (если $\alpha \neq 0$) температура в разных частях тела будет зависеть от деформации. В свою очередь неравенство этих температур приведет к возникновению локальных тепловых потоков, увеличивающих энтропию осциллятора, что эквивалентно необратимому превращению механической энергии колебаний в тепловую. Для количественной оценки термоупругих потерь Зинер предложил простые формулы, которые в рамках предложенной им феноменологической модели внутреннего трения в твердом теле обеспечивают достаточно хорошее согласие с экспериментом в отношении ряда металлов.

В настоящей работе для определения термоупругих потерь было применено конечно-элементное моделирование затухания изгибных колебаний по 2-й форме в цилиндрическом резонаторе (рис. 1, б, в).

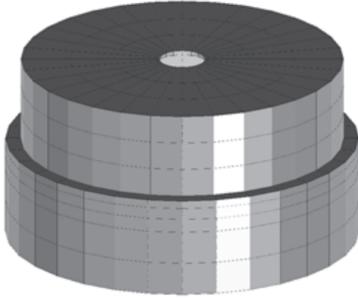
Эта конструкция (как и смоделированная форма колебаний) представляет определенный практический интерес, поскольку используется в ряде современных разработок [11, 12]. Для заданной деформации цилиндрической оболочки с учетом свойств ее материала рассчитывалось температурное поле вдоль окружного угла, тепловые потоки и потеря энергии резонатора за один период. Используемые при моделировании характеристики материалов приведены в таблице. Геометрические размеры резонатора ВТГ приведены на рис. 1, а.

Основное влияние на изменение характеристик резонатора оказывает толщина рабочей области резонатора b и центральный радиус рабочей области R . Прочие размеры не оказывают существенного влияния на результат. При моделировании b принимает значения 0,5, 1,0, 1,5, 2,0 и 2,5 мм, а R изменяется в широких пределах.

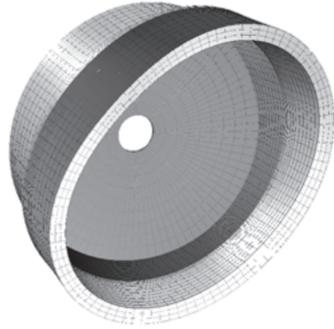
Конечно-элементная формулировка задачи основана на приближенном методе решения связанных задач динамической теории упру-



a



б



в

Рис. 1. Конструкция резонатора ВТГ (a), конечно-элементная аппроксимация геометрии (б) и его деформация по второй форме колебаний (в)

гости и нестационарной теплопроводности [13]. Согласно теории термоупругости связь между векторами напряжений и деформаций устанавливается в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_{El} - \boldsymbol{\varepsilon}_T), \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{El}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ — тензоры упругих и температурных деформаций; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; \mathbf{D} — 6×6 тензор модулей упругости.

Тензоры напряжений и деформаций состоят из x -, y и z нормальных компонент и x - y , y - z и z - x касательных компонент.

Уравнения движения упругой среды получаются, если приравнять силу внутренних напряжений $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ произведению ускорения на массу единицы объема тела (т.е. на его плотность) $\rho \ddot{\mathbf{u}}$. Векторная форма уравнения движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (5)$$

Здесь ρ — объемная плотность; \mathbf{u} — вектор перемещений.

Уравнения (4) и (5) образуют полную систему дифференциальных уравнений в частных производных для напряжений и деформаций. К (4) и (5) следует еще присоединить граничные условия, на которых не будем останавливаться.

Связь деформации с температурой устанавливается с помощью законов термодинамики. Уравнение теплопроводности при малом тер-

Физические параметры материалов

Параметры материала	Материал				
	Алюминий (Д16Т)	Сталь (12Х18Н10Т)	Кремний (Si)	Сапфир (Al ₂ O ₃)	Кварц (SiO ₂)
Плотность, ρ , кг/м ³	2800	7900	2320	3980	2220
Коэффициент Пуассона, ν	0,33	0,30	0,28	0,25	0,18
Модуль Юнга, E , Па	$7,08 \cdot 10^{10}$	$1,98 \cdot 10^{11}$	$1,30 \cdot 10^{11}$	$4,40 \cdot 10^{11}$	$7,20 \cdot 10^{10}$
Коэффициент теплового расширения, α , 1/°C	$2,30 \cdot 10^{-5}$	$1,66 \cdot 10^{-5}$	$4,20 \cdot 10^{-6}$	$6,60 \cdot 10^{-6}$	$6,00 \cdot 10^{-7}$
Удельная теплоемкость, C_p , Дж/кг·°C	922	462	1414	790	728
Объемная теплоемкость, C_v , Дж/м ³ ·°C	$2,58 \cdot 10^{-6}$	$3,65 \cdot 10^{-6}$	$3,28 \cdot 10^{-6}$	$3,14 \cdot 10^{-6}$	$1,62 \cdot 10^{-6}$
Коэффициент теплопроводности, k , Вт/м·°C	237	15	150	40	1,35

мическом возмущении (т.е. при $(T - T_0)/T_0 \ll 1$) запишем как

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla(k \nabla T) = \dot{q}, \quad (6)$$

где $C_V = \rho C_p$ — объемная теплоемкость; C_p — удельная теплоемкость; $k(\chi)$ — коэффициент теплопроводности; \dot{q} — тепловой источник, а именно скорость тепловыделения в единице объема.

В случае термоупругого нагрева тепловой источник для изотропного материала определяется следующим образом:

$$\dot{q} = - \frac{E \alpha T_0}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial e}{\partial t}, \quad (7)$$

где E — модуль Юнга; α — коэффициент теплового расширения; T_0 — температура окружающей среды (начальная температура); e — деформация расширения; ν — коэффициент Пуассона.

Для e справедливо соотношение

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (8)$$

Будем искать решение для ΔT и \mathbf{U} в виде

$$\begin{aligned} \Delta T &= T - T_0 = e^{\lambda t} \Theta, \\ \mathbf{u} &= e^{\lambda t} \mathbf{U}, \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} &= e^{\lambda t} \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\lambda = i\omega + \delta$.

Следует отметить, что Θ , \mathbf{U} , \mathbf{V} зависят только от координат и номера тона колебаний n . При моделировании рассматривалась только вторая форма колебаний (см. рис. 1, в).

Используя стандартную схему Галеркина для метода конечных элементов [14], получаем из (6)–(8) матричное уравнение для температуры Θ и перемещений \mathbf{U} в узлах сетки:

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{H})\Theta + \lambda \mathbf{F}\mathbf{U} = 0; \quad (10)$$

здесь \mathbf{K} , \mathbf{H} , \mathbf{F} – матрицы, элементы которых составлены из функций формы \mathbf{N} с числом узлов m .

Осесимметричная геометрия резонатора допускает переход к цилиндрическим координатам r , θ , z . Тогда (6) примет вид

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} - k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = - \frac{E\alpha T_0}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial e}{\partial t},$$

а для элементных матриц из (10) справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega} k \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial z} + \frac{n^2}{r^2} \mathbf{N} \mathbf{N}^T \right) dr dz,$$

$$\mathbf{H}_e = \int_{\Omega} C_V \mathbf{N} \mathbf{N}^T dr dz,$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_m],$$

$$\mathbf{F}_i = \frac{E\alpha T_0}{1 - 2\nu} \mathbf{N} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial r} + \frac{\mathbf{N}_i}{r} - \frac{n\mathbf{N}_i}{2r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial z} \\ \frac{n\mathbf{N}_i}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial r} - \frac{\mathbf{N}_i}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial z} - \frac{n\mathbf{N}_i}{2r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial z} \end{bmatrix}^T, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Уравнение движения (5) при использовании (4), (8) в матричной форме

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}T,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U},$$

преобразуется к следующему виду:

$$\mathbf{L}\mathbf{U} - \mathbf{G}\Theta + \lambda \mathbf{M}\mathbf{V} = 0. \quad (11)$$

Здесь \mathbf{L} , \mathbf{G} , \mathbf{M} – элементные матрицы, а \mathbf{V} – вектор значений скорости в узлах.

Элементы матриц в (8)–(11) рассчитываются следующим образом:

$$\mathbf{L}_e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dr dz, \quad \mathbf{G}_e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dr dz, \quad \mathbf{M}_e = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N} \mathbf{N}^T dr dz.$$

Матрицы \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{B} зависят от физических свойств материала и вида интерполяционных функций

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2-\nu \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \frac{E\alpha}{(1-2\nu)} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \dots \ \mathbf{B}_m],$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{N}_i}{r} & \frac{n\mathbf{N}_i}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial z} \\ -\frac{n\mathbf{N}_i}{2r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial r} - \frac{\mathbf{N}_i}{r} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial z} & \frac{n\mathbf{N}_i}{2r} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial r} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, m).$$

Исходя из того, что связь между перемещениями и скоростью в узлах устанавливается соотношением [13]

$$\mathbf{V} = \lambda \mathbf{U}, \quad (12)$$

а также, используя (10) и (11), получаем уравнение для расчета собственных значений λ

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & 0 & 0 \\ \mathbf{G} & -\mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{F} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица.

Собственное значение представляет собой комплексную величину $\lambda = \delta + j\omega$, которая однозначно определяет резонансную частоту колебаний ω и коэффициент затухания δ .

Запишем соотношение для нахождения добротности резонатора Q на резонансной частоте f в виде

$$Q = \frac{\text{Im}(\lambda)}{2 \text{Re}(\lambda)}, \quad \delta = \text{Re}(\lambda), \quad f = \left| \frac{\text{Im}(\lambda)}{2\pi} \right|. \quad (14)$$

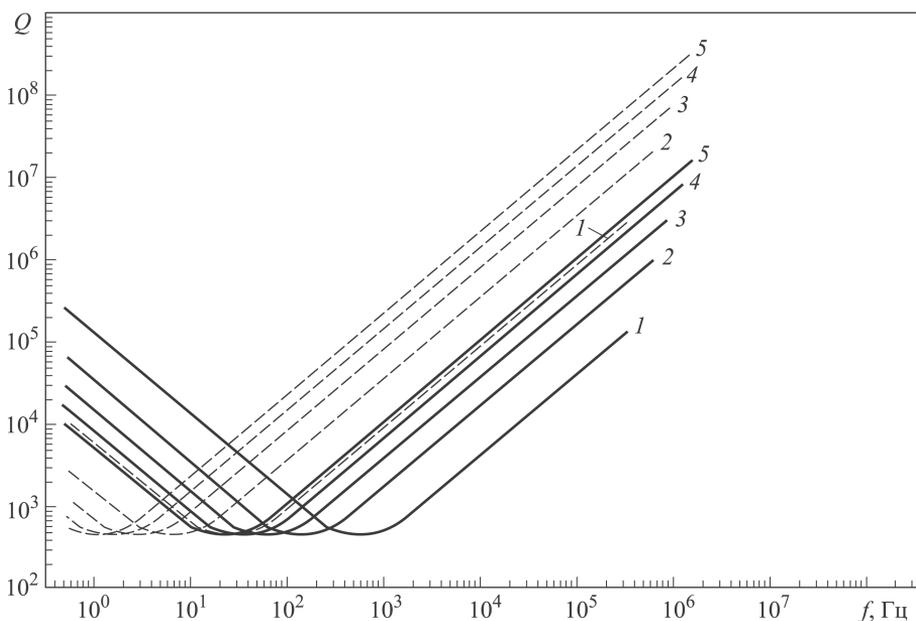


Рис. 2. Зависимость добротности Q от частоты f при фиксированных значениях толщины стенки резонатора b для дюралюминия Д16Т и коррозионно-стойкой стали 36НХТЮ; толщина стенки b :
 1 – 0,5 мм, 2 – 1,0 мм, 3 – 1,5 мм, 4 – 2,0 мм, 5 – 2,5 мм

Кроме того, каждому собственному значению λ_n соответствует свое гармоническое поле теплового потока, перемещений, напряжений и деформаций. Поскольку интенсивность тепловых потоков зависит как от толщины стенки резонатора (b), так и от частоты колебаний (f), результаты расчета для различных конструкционных материалов представлены на рис. 2, 3 в виде зависимостей $Q(f, b)$. При этом предполагалось, что $Q = \zeta_T^{-1}$, а интенсивности всех остальных диссипативных процессов, указанных в (2), равны нулю.

Результаты и обсуждение. На рис. 2 приведены данные по добротности металлических резонаторов, изготовленных из дюралюминия Д16Т и коррозионно-стойкой стали. Как следует из рисунка, добротность тонкостенных (менее 1 мм) и низкочастотных (менее 1 кГц) металлических резонаторов всегда будет небольшой (порядка 1000) из-за высокой интенсивности термоупругого внутреннего трения, которое при этом является доминирующим диссипативным процессом. Для достижения добротности $(4 \dots 5) \cdot 10^4$ толщину стенки необходимо выбирать равной не менее 1... 1,5 мм, а рабочую частоту не менее 4... 5 кГц.

Сравнительно небольшие значения добротности резонаторов могут быть достигнуты и при использовании кремния и сапфира в качестве конструкционных материалов (рис. 3). При частоте колебаний таких резонаторов до 10 кГц термоупругие потери ограничат их добротность на уровне 10^6 . В отличие от этих материалов кварцевое

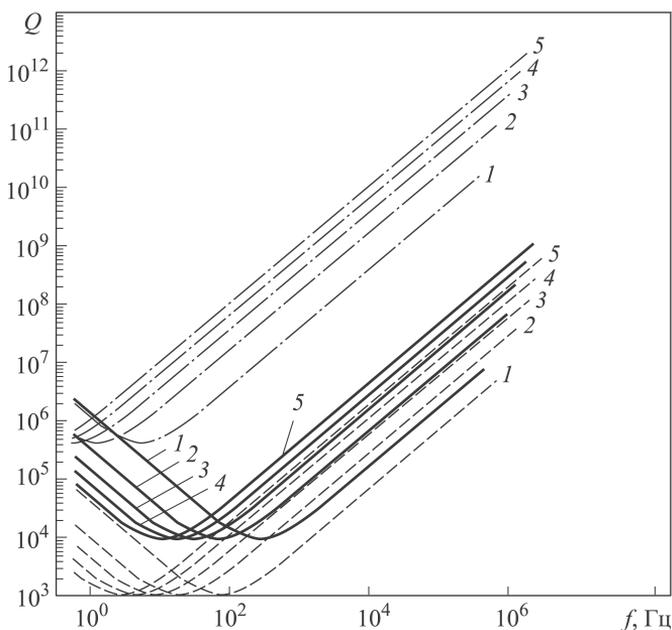


Рис. 3. Зависимость добротности Q от частоты f при фиксированных значениях толщины стенки резонатора b для кремния, сапфира и кварца; толщина стенки b :

1 — 0,5 мм, 2 — 1,0 мм, 3 — 1,5 мм, 4 — 2,0 мм, 5 — 2,5 мм

стекло имеет низкий уровень термоупругого внутреннего трения. При частоте колебаний около 1 кГц даже для толщины стенки 0,5 мм добротность ограничена значением 10^7 . При более высоких частотах колебаний этим видом внутреннего трения в кварцевом стекле можно пренебречь.

Заключение. Термоупругое внутреннее трение является фундаментальным диссипативным процессом, интенсивность которого в тонкостенных механических резонаторах может быть велика. В килогерцовом диапазоне частот при толщине стенки резонатора ВТГ 0,5...1,0 мм этот вид внутреннего трения ограничивает добротность резонаторов, изготовленных из коррозионно-стойкой стали и алюминиевых сплавов на уровне нескольких десятков тысяч, а изготовленных из кремния и сапфира — на уровне 10^5 . В кварцевом стекле термоупругое внутреннее трение очень мало, что позволяет рекомендовать его в качестве основного конструкционного материала резонаторов ВТГ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Распопов В.Я. Микромеханические приборы. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
2. Loper E.J., Lynch D.D., Stevenson K.M. Projected performance of smaller hemispherical resonator gyros // Proc. Position Location and Navigation Symposium (PLANS'86). 1986. November 4–7. Las Vegas, NV, USA. P. 61–64.

3. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах. М.: Metallurgy, 1968. 330 с.
4. Брагинский В.Б., Митрофанов В.П., Панов В.И. Системы с малой диссипацией. М.: Наука, 1981. 142 с.
5. Лунин Б.С. Физико-химические основы разработки полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов. М.: Изд-во МАИ, 2005. 224 с.
6. Yi Y.B. Geometric effects on thermoelastic damping in MEMS resonators // *J. of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 309. P. 588–599.
7. Wong S.J., Fox C.H.J., McWilliam S. Thermoelastic damping of the in-plane vibration of thin silicon rings // *J. of Sound and Vibration*. 2006. V. 293. P. 266–285.
8. Prabhakar S., Vengallatore S. Thermoelastic damping in bilayered micromechanical beam resonators // *J. of Micromechanics and Microengineering*. 2007. Vol. 17. P. 532–538.
9. Зинер К. Упругость и неупругость металлов: Сборник / под ред. С.В. Вонсовского. М.: ИИЛ, 1954. С. 9–168.
10. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. М.: Наука, 1976. 480 с.
11. Chikovanii V.V., Yatsenko Yu.A. Investigation of azimuth accuracy measurement with metallic resonator Coriolis vibratory gyroscope // *Proc. XVII Int. Conf. on Integrated Navigation Systems*. Saint Petersburg. 2010. May 31–June 2. P. 25–30.
12. Sarapuloff S.A., Lytvynov L.A., Bakalor T.O. Particularities of designs and fabrication technology of high-Q sapphire resonators of CRG-1 type solid-state gyroscopes // *Proc XIV Int. Conf. on Integrated Navigation Systems*. Saint Petersburg. 2007. May 28–30. P. 47–48.
13. Yi Y.B. Finite element analysis of thermoelastic damping in contour-mode vibrations of micro- and nanoscale ring, disk, and elliptical plate resonators // *Journal of Vibration and Acoustics*. 2010. Vol. 132.
14. Митчелл Э., Уэйм Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир. 1981.

REFERENCES

- [1] Raspopov V.Ya. Mikromekhanicheskie pribory [Micromechanical devices]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2007. 400 p.
- [2] Loper E.J., Lynch D.D., Stevenson K.M. Projected performance of smaller hemispherical resonator gyros. *Proc. Position Location and Navigation Symposium (PLANS'86)*. 1986, November 4–7, Las Vegas, NV, USA, pp. 61–64.
- [3] Postnikov V.S. Vnutrennee trenie v metallakh [Internal friction in metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1969. 330 p.
- [4] Braginskiy V.B., Mitrofanov V.P., Panov V.I. Sistemy s maloy dissipatsiey [Systems with small dissipation]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 142 p.
- [5] Lunin B.S. Fiziko-khimicheskie osnovy razrabotki polusfericheskikh rezonatorov volnovykh tverdotelnykh giroskopov [Physical-chemical basis for development of hemisphere resonator gyroscopes]. Moscow, MAI Publ., 2005. 224 p.
- [6] Yi Y.B. Geometric effects on thermoelastic damping in MEMS resonators. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, vol. 309, pp. 588–599.
- [7] Wong S.J., Fox C.H.J., McWilliam S. Thermoelastic damping of the in-plane vibration of thin silicon rings. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 293, pp. 266–285.
- [8] Prabhakar S., Vengallatore S. Thermoelastic damping in bilayered micromechanical beam resonators. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2007, vol. 17, pp. 532–538.
- [9] Zener C.M. Elasticity and Anelasticity of Metals. USA, Chicago, Univ. of Chicago Press, 1948 (Russ. ed.: Ziner K. Uprugost' i neuprugost' metallov, S.V. Vonsovskiy ed. Moscow, Inostrannaya Lit. Publ., 1954. 248 p.).

- [10] Kikoin A.K., Kikoin I.K. Kurs obshchey fiziki. Molekulyarnaya fizika [General physics course. Molecular Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 480 p.
- [11] Chikovani V.V., Yatsenko Yu.A. Investigation of azimuth accuracy measurement with metallic resonator Coriolis vibratory gyroscope. *Proc. XVII Int. Conf. on Integrated Navigation Systems*. St. Petersburg. 2010, May 31–June 2, pp. 25–30.
- [12] Sarapuloff S.A., Lytvynov L.A., Bakalor T.O. Particularities of designs and fabrication technology of high-Q sapphire resonators of CRG-1 type solid-state gyroscopes. *Proc XIV Int. Conf. on Integrated Navigation Systems*. St. Petersburg. 2007, May 28–30, pp. 47–48.
- [13] Yi Y.B. Finite element analysis of thermoelastic damping in contour-mode vibrations of micro- and nanoscale ring, disk, and elliptical plate resonators// *Journal of Vibration and Acoustics*, 2010, vol. 132.
- [14] Mitchell A.R., Wait R. The Finite Element Method in Partial Differential Equations. London–New York–Sydney–Toronto, John Wiley & Sons, 1977.

Статья поступила в редакцию 2.12.2014

Лунин Борис Сергеевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник химического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор ряда научных работ в области технологии вибрационных гироскопов.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1.

Lunin B.S. — Dr. Sci. (Eng.), leading researcher of Chemistry faculty of the Lomonosov Moscow State University. Author of a number of publications in the field of vibration gyro technology.

Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory 1, Moscow, 119991 Russian Federation.

Юрин Алексей Владимирович — программист НИС НУК “Информатика и системы управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 научных работ в области математического моделирования и цифровой обработки сигналов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Yurin A.V. — programmer in the Scientific and Educational Complex for Information Technologies and Control Systems of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 15 publications in the field of mathematical simulation and digital signal processing.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Басараб Михаил Алексеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры “Информационная безопасность” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ и пяти монографий в области прикладной математики, информатики, цифровой обработки сигналов, радиофизики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Basarab M.A. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Information Security” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 5 monographs and more than 100 publications in the fields of applied mathematics, informatics, digital signal processing, gyroscopy and radiophysics.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Матвеев Валерий Александрович — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Информационная безопасность”, руководитель НУК ИУ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ и 25 патентов в области приборостроения и высокотемпературной сверхпроводимости.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Matveev V.A. — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Information Security” department of the Bauman Moscow State Technical University, head of the Scientific and Educational Complex for Information and Control of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications and 25 patents in the field of instrument engineering and high-temperature superconductivity.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Чуманкин Евгений Алексеевич — канд. техн. наук, заместитель начальника отдела ОАО “АНПП “ТЕМП-АВИА”. Специалист в области гироскопических систем и навигационных устройств.

ОАО “АНПП “ТЕМП-АВИА”, Российская Федерация, 607920, Нижегородская обл., г. Арзамас, ул. Кирова, д. 26.

Chumankin E.A. — Cand. Sci. (Eng.), deputy head of the department of the ОАО “Arzamasskoe nauchno-proizvodstvennoe predpriyatie (ANPP) “TEMP-AVIA”. Technicalist in the field of gyroscopic systems and navigation devices.

ОАО “АНПП “ТЕМП-АВИА”, ul. Kirova 26, Arzamas, Nizhny Novgorod region, 607920 Russian Federation.