

# ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 681.51

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА\*

Н.Е. Зубов<sup>1,2</sup>, Е.А. Микрин<sup>1,2</sup>, В.Н. Рябченко<sup>1,2</sup>, Д.Е. Ефанов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”,  
г. Королёв, Московская обл., Российская Федерация  
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: nezubov@bmstu.ru

*Для линеаризованной модели четвертого порядка продольного движения летательного аппарата получены аналитические выражения законов управления. В основу синтеза положена оригинальная декомпозиция объекта управления и разработанный ранее на ее основе метод модального управления по состоянию МИМО-системой. Метод не требует решения специальных матричных уравнений (типа уравнения Сильвестра), имеет один и тот же вид для непрерывного и дискретного случаев задания модели системы, не имеет ограничений по алгебраической и геометрической кратности задаваемых полюсов, легко реализуется в среде MATLAB. Приведены результаты численного моделирования управления продольным движением летательного аппарата с использованием аналитически синтезированных законов управления, которые представляют собой графики переходных процессов и управляющих воздействий.*

**Ключевые слова:** декомпозиция, модальный синтез, МИМО-система, продольное движение летательного аппарата, полюса динамической системы.

## ANALYTICAL SYNTHESIS OF CONTROL ACTIONS FOR AIRCRAFT LONGITUDINAL MOTION\*

N.E. Zubov<sup>1,2</sup>, E.A. Mikrin<sup>1,2</sup>, V.N. Ryabchenko<sup>1,2</sup>, D.E. Efanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”,  
Korolev, Moscow region, Russian Federation  
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: nezubov@bmstu.ru

*Analytical expressions of control actions are obtained for a fourth-order linearized model of the flying vehicle longitudinal motion. Synthesis is based on original decomposition of the control object as well as on the previously elaborated method of modal control by MIMO-system. The method does not require solving special matrix*

---

\*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00046).

equations (such as Sylvester equation), takes the same form for continuous and discrete cases of the system model assignment, has no restrictions on algebraic and geometric multiplicity of the assigned poles, is easily realized in the MATLAB environment. Numerical simulation results are given to control the aircraft longitudinal motion by applying analytically synthesized control laws represented by the graphs of transient processes and controlling actions.

**Keywords:** decomposition, modal synthesis, MIMO-system, longitudinal motion of aircrafts, dynamic system poles.

В практике синтеза законов управления летательными аппаратами (ЛА) самолетного типа принят подход разделения пространственного движения ЛА на продольное и поперечное движения. При этом, как правило, используются линейные стационарные числовые модели, временной интервал применения которых существенно ограничен.

В этом случае для обеспечения требуемой точности управления на всем интервале движения ЛА необходимо применять короткие периоды линеаризации, которые не должны превышать длительность одного или нескольких тактов работы бортовых компьютеров.

Такой подход, несомненно, требует решения задачи синтеза в реальном масштабе времени и осуществить его наиболее просто, если иметь аналитические выражения законов управления, полученных в общем виде. Решению данной проблемы для задачи управления продольным движением ЛА и посвящена настоящая работа.

**Математическая модель продольного движения ЛА.** Объект управления будем рассматривать в виде матричного уравнения полного продольного движения ЛА в форме “вход–состояние” [1] типа

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1)$$

с матрицами коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_x^V & -a_x^\theta + a_x^\alpha & 0 & -a_x^\alpha \\ -a_y^V & -a_y^\theta + a_y^\alpha & 0 & -a_y^\alpha \\ a_{m_z}^V & a_{m_z}^\alpha & -a_{m_z}^{\omega_z} & -a_{m_z}^\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_x^P & a_x^{\delta_c} \\ a_y^P & a_y^{\delta_c} \\ a_{m_z}^P & a_{m_z}^{\delta_c} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

элементы которых являются кусочно-постоянными величинами, и векторами

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta \omega_z \\ \Delta v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \delta_c \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\Delta V$  – отклонение вектора скорости;  $\Delta \theta$  – отклонение угла наклона траектории;  $\Delta \omega_z$  – отклонение угловой скорости в канале тангажа;  $\Delta v$  – отклонение угла тангажа;  $\Delta P$  – отклонение вектора тяги двигателя;  $\delta_c$  – угол отклонения стабилизатора;  $a_x^V$ ,  $a_x^\theta$ ,  $a_x^\alpha$ ,  $a_y^V$ ,  $a_y^\theta$ ,  $a_y^\alpha$ ,  $a_{m_z}^V$ ,  $a_{m_z}^\alpha$ ,  $a_{m_z}^{\omega_z}$ ,  $a_{m_z}^P$ ,  $a_{m_z}^{\delta_c}$ ,  $a_x^P$ ,  $a_x^{\delta_c}$ ,  $a_y^P$ ,  $a_y^{\delta_c}$ ,  $a_{m_z}^P$ ,  $a_{m_z}^{\delta_c}$  – коэффициенты линеаризации [1].

Введем для краткости записи обозначения  $a_{11} = -a_x^V$ ,  $a_{12} = -a_x^\theta + a_x^\alpha$ ,  $a_{14} = -a_x^\alpha$ ,  $a_{21} = -a_y^V$ ,  $a_{22} = -a_y^\theta + a_y^\alpha$ ,  $a_{24} = -a_y^\alpha$ ,  $a_{31} = a_{m_z}^V$ ,  $a_{32} = a_{m_z}^\alpha$ ,  $a_{33} = -a_{m_z}^{\omega_z}$ ,  $a_{34} = -a_{m_z}^\alpha$ ,  $b_{11} = a_x^P$ ,  $b_{12} = a_x^{\delta_c}$ ,  $b_{21} = a_y^P$ ,  $b_{22} = a_y^{\delta_c}$ ,  $b_{31} = a_{m_z}^P$ ,  $b_{32} = a_{m_z}^{\delta_c}$ , тогда объект управления (1) в развернутом виде запишется так

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{V} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{\omega}_z \\ \Delta \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta \omega_z \\ \Delta v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta \delta_c \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Считая все компоненты вектора состояния полностью наблюдаемыми, будем искать управление для модели (2) в виде закона обратной связи вида

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{K}$  — искомая матрица коэффициентов (матрица регулятора).

**Задача размещения полюсов.** Как уже отмечалось в [1], задача размещения полюсов или задача назначения собственных значений (eigenvalue assignment) в линейных динамических системах в той или иной постановке рассматривалась в многочисленных работах. В общем случае вместо системы (1) рассмотрим линейную многомерную динамическую систему с многими входами и многими выходами (MIMO — Multi Inputs Multi Outputs)

$$\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (4)$$

где,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния, а  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$  — вектор управляющих воздействий;  $\mathfrak{D}$  — оператор дифференцирования по времени:  $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ , либо оператор сдвига во времени:  $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$ .

Аналогично (3) считаем, что для MIMO-системы (4) рассматривается управление с обратной связью

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (5)$$

где  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  — постоянная матрица регулятора. Кроме того, предполагается, что матрица  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  в (4) имеет полный ранг по столбцам, а матрица  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  имеет множество собственных значений (спектр), определенное следующим образом:

$$\text{eig}(\mathbf{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0\}.$$

Здесь  $\mathbf{I}_n$  — единичная матрица размера  $n \times n$ ;  $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел;  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$  в зависимости от типа  $\mathfrak{D}\mathbf{x}(t)$  обозначает левую полуплоскость  $\mathbb{C}^-$  плоскости  $\mathbb{C}$ , т.е.  $\mathbb{C}^{\text{stab}} \doteq \mathbb{C}^-$ , либо область внутри круга единичного радиуса с центром в нуле, т.е.  $\mathbb{C}^{\text{stab}} \doteq \mathbb{C}_{|\lambda| < 1}$ . Здесь  $|\lambda|$  — модуль собственного значения  $\lambda$ .

Управление системой (4) с помощью законов (5) является классической задачей, когда необходимо найти матрицу  $\mathbf{K}$ , обеспечивающую некоторые заданные требования к процессу управления. Эти требования условно можно разделить на три группы [1]: *a*) требования на размещение полюсов замкнутой системы (собственных значений матриц  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ ) в заданных точках  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$  или в заданной области  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$  (заданной областью, например, может быть вся левая полуплоскость  $\mathbb{C}$ ); *b*) требования на размещение полюсов и нулей (тех или иных нулей передаточной матрицы МИМО-системы замкнутой системы в заданных точках  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$  или заданных областях  $\mathbb{C}^{\text{stab}}$ ; *c*) требования к переходным процессам в замкнутой системе в смысле минимума заданного функционала.

В [1, 2] предложен эффективный метод решения задачи полного размещения полюсов МИМО-системы (4). Метод не требует решения специальных матричных уравнений (типа уравнения Сильвестра), имеет один и тот же вид для непрерывного и дискретного случаев задания модели системы, не имеет ограничений по алгебраической и геометрической кратности задаваемых полюсов, легко реализуется в среде MATLAB.

Пусть  $\mathbf{V}^{\perp T} = \text{null}(\mathbf{B}^T)$  — ортогональный делитель нуля, т.е. матрица, удовлетворяющая следующим условиям [1]:

$$\mathbf{V}^{\perp} \mathbf{B} = \mathbf{0}_{(n-r) \times r}, \quad (6)$$

$$\mathbf{V}^{\perp} \mathbf{V}^{\perp T} = \mathbf{I}_{n-r}; \quad (7)$$

$\mathbf{V}^+$  — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза, т.е.

$$\mathbf{B} \mathbf{V}^+ \mathbf{B} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{V}^+ \mathbf{B} \mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^+, \quad (\mathbf{V}^+ \mathbf{B})^T = \mathbf{V}^+ \mathbf{B}, \quad (\mathbf{B} \mathbf{V}^+)^T = \mathbf{B} \mathbf{V}^+.$$

Здесь  $\text{null}(\cdot)$  — оператор вычисления базиса нуль-пространства [3];  $\mathbf{0}_{(n-r) \times r}$  — нулевая матрица размера  $(n-r) \times r$ .

Определим  $L = \text{floor}(n/r)$ , где  $\text{floor}(\cdot)$  — операция округления числа  $\cdot$  в сторону ближайшего целого в меньшую сторону, например,  $\text{floor}(0,1) = 0$ ,  $\text{floor}(1,4) = 1$ ,  $\text{floor}(2,9) = 2$  и т.д. Введем в рассмотрение многоуровневую декомпозицию МИМО-системы (4) аналогично тому, как это сделано в [2]. Для представляемой парой матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  МИМО-системы имеем:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} \quad (8)$$

— нулевой (исходный) уровень декомпозиции;

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp} \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp +}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp} \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0 \quad (9)$$

— первый уровень декомпозиции;

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{B}_{k-1}^\perp \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{B}_{k-1}^{\perp+}, \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{B}_{k-1}^\perp \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{B}_{k-1} \quad (10)$$

–  $k$ -й (промежуточный) уровень декомпозиции;

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{B}_{L-1}^\perp \mathbf{A}_{L-1} \mathbf{B}_{L-1}^{\perp+}, \quad \mathbf{B}_L = \mathbf{B}_{L-1}^\perp \mathbf{A}_{L-1} \mathbf{B}_{L-1} \quad (11)$$

–  $L$ -й (конечный) уровень декомпозиции.

Справедлива **Теорема 1** [1, 2]. Если МИМО-система (4) с парой матриц  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  полностью управляемая, то полностью управляемы все пары матриц  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$  (8)–(11), где  $i \in \{0, \dots, L\}$ .

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что все матрицы  $\mathbf{B}_i$  в (8)–(11) являются матрицами полного ранга по столбцам. В противном случае можно воспользоваться подходом, изложенным в [2]. Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2** [1, 2]. Пусть МИМО-система (4) полностью управляемая и матрица  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  удовлетворяет формулам

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \mathbf{B}_0^- \mathbf{A} - \Phi_0 \mathbf{B}_0^-, \quad \mathbf{B}_0^- = \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp + \mathbf{B}_0^+, \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^- \mathbf{A}_1 - \Phi_1 \mathbf{B}_1^-, \quad \mathbf{B}_1^- = \mathbf{K}_2 \mathbf{B}_1^\perp + \mathbf{B}_1^+, \dots, \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{B}_k^- \mathbf{A}_k - \Phi_k \mathbf{B}_k^-, \quad \mathbf{B}_k^- = \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{B}_k^\perp + \mathbf{B}_k^+, \dots, \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{B}_L^- \mathbf{A}_L - \Phi_L \mathbf{B}_L^-, \quad (15)$$

тогда

$$\text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \bigcup_{i=1}^{L+1} \text{eig}(\Phi_{i-1}). \quad (16)$$

Из теоремы 2 следует, что закон управления (5) с матрицей  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , удовлетворяющей соотношениям (12)–(15), обеспечивает выполнение условия (16), т.е. заданного размещения полюсов.

**Аналитический синтез законов управления.** Введем в рассмотрение двухуровневую декомпозицию системы (2), поскольку  $L = \text{floor}(n/r) = 2$ , учитывая, что в нашем случае ранг каждой из вводимых матриц  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{B}_1$  совпадает с соответствующим числом столбцов:

нулевой уровень

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

первый уровень

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp+}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^\perp \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0. \quad (18)$$

$\mathbf{B}_0^{\perp+}$  – псевдообратная матрица Мура – Пенроуза для  $\mathbf{B}_0^\perp$  [1].

Зададим матрицы  $\Phi = \Phi_0, \Phi_1$  таким образом, чтобы множество  $\bigcup_{i=1}^2 \text{eig}(\Phi_{i-1})$  состояло из корней характеристического полинома  $\det(\lambda \mathbf{I}_4 - \mathbf{A} + \mathbf{BK})$ , например,

$$\Phi = \Phi_0 = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{12} \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} f_{21} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Тогда требуемая матрица коэффициентов в законе управления согласно (12) определится выражением

$$\mathbf{K} = \Phi_0 (\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp) - (\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^\perp) \mathbf{A}_0, \quad (20)$$

где

$$\mathbf{K}_1 = \Phi_1 \mathbf{B}_1^+ - \mathbf{B}_1^+ \mathbf{A}_1, \quad (21)$$

$\mathbf{B}_0^+, \mathbf{B}_1^+$  — соответствующие псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза [1, 2].

Для матрицы  $\mathbf{B}$  вида (3)  $\mathbf{B}_0^\perp$  и  $\mathbf{B}_0^+$  определяются так:

$$\mathbf{B}_0^\perp = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0^+ = \begin{pmatrix} b_{11}^+ & b_{12}^+ & b_{13}^+ & 0 \\ b_{21}^+ & b_{22}^+ & b_{23}^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где введены обозначения

$$l_{11} = \frac{b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}, \quad l_{12} = -\frac{b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}},$$

$$b_{11}^+ = \frac{b_{11}b_{22}^2 - b_{12}b_{21}b_{22} + b_{11}b_{32}^2 - b_{12}b_{31}b_{32}}{b^+},$$

$$b_{12}^+ = \frac{b_{21}b_{12}^2 - b_{11}b_{22}b_{12} + b_{21}b_{32}^2 - b_{22}b_{31}b_{32}}{b^+},$$

$$b_{13}^+ = \frac{b_{31}b_{12}^2 - b_{11}b_{32}b_{12} + b_{31}b_{22}^2 - b_{21}b_{32}b_{22}}{b^+},$$

$$b_{21}^+ = \frac{b_{12}b_{21}^2 - b_{11}b_{22}b_{21} + b_{12}b_{31}^2 - b_{11}b_{32}b_{31}}{b^+},$$

$$b_{22}^+ = \frac{b_{22}b_{11}^2 - b_{12}b_{21}b_{11} + b_{22}b_{31}^2 - b_{21}b_{32}b_{31}}{b^+},$$

$$b_{23}^+ = \frac{b_{32}b_{11}^2 - b_{12}b_{31}b_{11} + b_{32}b_{21}^2 - b_{22}b_{31}b_{21}}{b^+},$$

$$b^+ = b_{11}^2 b_{22}^2 + b_{11}^2 b_{32}^2 - 2b_{11}b_{12}b_{21}b_{22} - \\ - 2b_{11}b_{12}b_{31}b_{32} + b_{12}^2 b_{21}^2 + b_{12}^2 b_{31}^2 + b_{21}^2 b_{32}^2 - 2b_{21}b_{22}b_{31}b_{32} + b_{22}^2 b_{31}^2.$$

При этом матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  в соответствии с (9) определены как

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Здесь

$$a_{11}^1 = \frac{a_{33} + a_{31}l_{11} + a_{32}l_{12} + a_{11}l_{11}^2 + a_{22}l_{12}^2 + a_{12}l_{11}l_{12} + a_{21}l_{11}l_{12}}{l_{11}^2 + l_{12}^2 + 1},$$

$$a_{12}^1 = a_{34} + a_{13}l_{11} + a_{23}l_{12}, \quad a_{21}^1 = \frac{1}{l_{11}^2 + l_{12}^2 + 1},$$

$$b_{11}^1 = a_{33}b_{31} + b_{11}(a_{31} + a_{11}l_{11} + a_{21}l_{12}) + b_{21}(a_{32} + a_{12}l_{11} + a_{22}l_{12}),$$

$$b_{12}^1 = a_{33}b_{32} + b_{12}(a_{31} + a_{11}l_{11} + a_{21}l_{12}) + b_{22}(a_{32} + a_{12}l_{11} + a_{22}l_{12}), \quad b_{21}^1 = b_{31}, \quad b_{22}^1 = b_{32}.$$

Вычисляя  $\mathbf{B}_1^+$  для первого уровня декомпозиции, имеем

$$\mathbf{B}_1^+ = \begin{pmatrix} b_{11}^{1+} & b_{12}^{1+} \\ b_{21}^{1+} & b_{22}^{1+} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где

$$b_{11}^{1+} = \frac{b_{22}^1}{b^{+*}}, \quad b_{12}^{1+} = -\frac{b_{12}^1}{b^{+*}}, \quad b_{21}^{1+} = -\frac{b_{21}^1}{b^{+*}}, \quad b_{22}^{1+} = \frac{b_{11}^1}{b^{+*}},$$

$$b^{+*} = b_{11}^1 b_{22}^1 - b_{12}^1 b_{21}^1.$$

Назначаем требуемые значения

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{12} \end{pmatrix}, \quad \Phi_0 = \begin{pmatrix} f_{01} & 0 \\ 0 & f_{02} \end{pmatrix}$$

и используя далее (8), получаем вид матрицы коэффициентов

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^1 b_{11}^{1+} + a_{21}^1 b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+} f_{11} & a_{12}^1 b_{11}^{1+} + a_{22}^1 b_{12}^{1+} - b_{12}^{1+} f_{11} \\ a_{11}^1 b_{21}^{1+} + a_{21}^1 b_{22}^{1+} - b_{21}^{1+} f_{12} & a_{12}^1 b_{21}^{1+} + a_{22}^1 b_{22}^{1+} - b_{22}^{1+} f_{12} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

далее согласно выражениям (20)–(25) общий вид матрицы коэффициентов обратной связей (матрицы регулятора)

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Здесь

$$k_{11} = a_{11}b_{11}^m + a_{21}b_{12}^m + a_{31}b_{13}^m - b_{11}^m f_{01}, \quad (27)$$

$$k_{12} = a_{12}b_{11}^m + a_{22}b_{12}^m + a_{32}b_{13}^m - b_{12}^m f_{01}, \quad (28)$$

$$k_{13} = b_{14}^m + a_{33}b_{13}^m - b_{13}^m f_{01}, \quad (29)$$

$$k_{14} = a_{13}b_{11}^m + a_{24}b_{12}^m + a_{34}b_{13}^m - b_{14}^m f_{01}, \quad (30)$$

$$k_{21} = a_{11}b_{21}^m + a_{21}b_{22}^m + a_{31}b_{23}^m - b_{21}^m f_{02}, \quad (31)$$

$$k_{22} = a_{12}b_{21}^m + a_{22}b_{22}^m + a_{32}b_{23}^m - b_{22}^m f_{02}, \quad (32)$$

$$k_{23} = b_{24}^m + a_{33}b_{23}^m - b_{23}^m f_{02}, \quad (33)$$

$$k_{24} = a_{13}b_{21}^m + a_{24}b_{22}^m + a_{34}b_{23}^m - b_{24}^m f_{01}, \quad (34)$$

$$b_{11}^m = b_{11}^+ + l_{11}(a_{11}^1 b_{11}^{1+} + a_{21}^1 b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+} f_{11}),$$

$$b_{12}^m = b_{12}^+ + l_{12}(a_{11}^1 b_{11}^{1+} + a_{21}^1 b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+} f_{11}),$$

$$b_{13}^m = b_{13}^+ + a_{11}^1 b_{11}^{1+} + a_{21}^1 b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+} f_{11},$$

$$b_{14}^m = a_{12}^1 b_{11}^{1+} + a_{22}^1 b_{12}^{1+} - b_{12}^{1+} f_{11},$$

$$b_{21}^m = b_{21}^+ + l_{11}(a_{11}^1 b_{21}^{1+} + a_{21}^1 b_{22}^{1+} - b_{21}^{1+} f_{12}),$$

$$b_{22}^m = b_{22}^+ + l_{12}(a_{11}^1 b_{21}^{1+} + a_{21}^1 b_{22}^{1+} - b_{21}^{1+} f_{12}),$$

$$b_{23}^m = b_{23}^+ + a_{11}^1 b_{21}^{1+} + a_{21}^1 b_{22}^{1+} - b_{21}^{1+} f_{12},$$

$$b_{24}^m = a_{12}^1 b_{21}^{1+} + a_{22}^1 b_{22}^{1+} - b_{22}^{1+} f_{12}.$$

В соответствии с (3), (5) имеем

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \\ \Delta \omega_z \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на основании соотношений (27)–(34) получены аналитические выражения для вычисления управлений, которые имеют относительно компактный вид и могут быть легко реализованы в реальном масштабе времени.

**Численное моделирование.** Воспользуемся для моделирования продольного движения ЛА числовыми значениями матриц коэффициентов следующего вида:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,0100 & 0,2500 & 0 & -10,12 \\ 0,0700 & -0,6200 & 0 & 0,6200 \\ 0,0130 & 4,0000 & -1,3400 & -4,0000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,0001428 & 0 \\ 0 & 0,1100 \\ 0 & -7,5000 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Для указанных числовых значений объект управления имеет следующие полюса:  $\{0,1216 \pm 0,7619i; -1,1066 \pm 1,8845i\}$ . Рассматриваемая числовая модель представляет собой неустойчивый процесс.

Пусть задачей синтеза является формирование алгоритмов функционирования системы управления, которая осуществит перемещение полюсов для модели из точек множества  $\{0,1216 \pm 0,7619i; -1,1066 \pm 1,8845i\}$  в точки множества

$$\{-1,00 \pm 0,2i; -2,8 \pm 0,8i\} \quad (36)$$

с помощью аналитически синтезированного закона управления.

Для желаемого множества полюсов (36) выражения (19) можно записать в виде

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} -1,00 - 0,2i & 0 \\ 0 & -2,8 - 0,8i \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} -1,00 + 0,2i & 0 \\ 0 & -2,8 + 0,8i \end{pmatrix}.$$

Тогда по (4)–(13) и матрице (35) получаем

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix} =$$

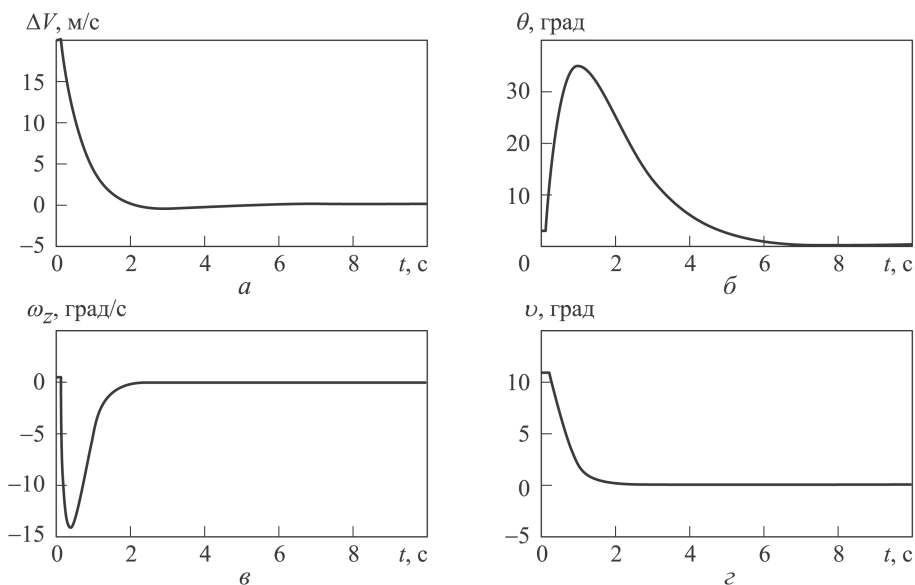
$$= \begin{pmatrix} 10001 & 24930 & 56960 & 10882 \\ -0,0017 & -0,5333 & -0,5680 & -0,5973 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица собственной динамики в замкнутом контуре “ЛА–система управления” принимает вид

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{pmatrix} -1,4387 & -3,3114 & -8,1372 & -11,6746 \\ 0,0702 & -0,5613 & 0,0625 & 0,6857 \\ 0 & 0 & -5,600 & -8,4800 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

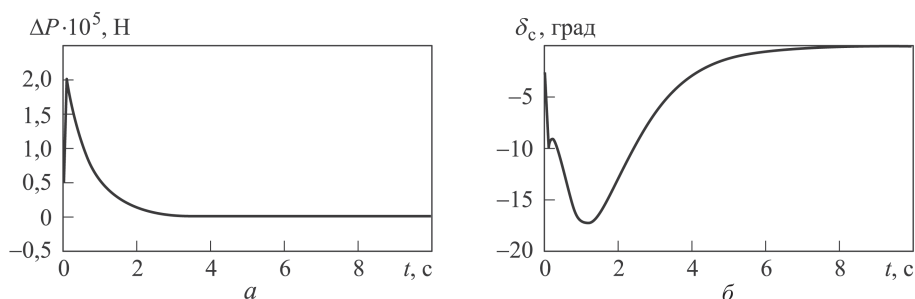
Для начальных значений вектора состояния ЛА в системе единиц СИ  $(\Delta V \ \Delta \theta \ \Delta \omega_z \ \Delta v)^T = (20,00 \ 0,0464 \ 0,0080 \ 0,189)^T$  на рис. 1 приведены графики переходных процессов по компонентам вектора состояния; на рис. 2 приведены значения управляющих воздействий.

**Заключение.** Для линеаризованной модели четвертого порядка продольного движения летательного аппарата получены аналитические выражения законов управления стабилизацией, основанные на оригинальной декомпозиции модели объекта управления и разработанного на ее основе метода модального управления ММО-системой. Приведены результаты численного моделирования управления продольным движением летательного аппарата с использованием аналитических законов управления. Следует отметить, что с использованием



**Рис. 1. Графики переходных процессов продольного канала:**

$a$ – $d$  – соответственно  $(\Delta V \ \Delta\theta \ \Delta\omega_z \ \Delta v)^T = (20,00 \ 0,0464 \ 0,0080 \ 0,189)^T$



**Рис. 2. Графики изменения управляющих воздействий продольного канала:**

$a$  – вектор тяги;  $b$  – угол отклонения стабилизатора

подходов, изложенных в [3–6], также можно получить аналитические решения, но процесс их получения более трудоемкий, а их вид очень громоздкий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Синтез развязывающих законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 1. С. 92–108.
2. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 2. С. 118–132.
3. Misrikanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Pole placement for controlling a large scale power system // Automation and Remote Control. Vol. 72:10 (2011). P. 2123–2146.
4. Воробьева Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А. и др. Синтез стабилизирующего управления космическим аппаратом на основе обобщенной формулы Аккермана // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 96–106.

5. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточные формулы анализа и синтеза управляемых динамических МИМО-систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 3. С. 3–15.
6. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Синтез законов управления космическим аппаратом, обеспечивающих оптимальное размещение полюсов замкнутой системой управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 98–111.

## REFERENCES

- [1] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Synthesis of decoupling laws for attitude stabilization of a spacecraft. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, pp. 80–96.
- [2] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikanov M. Sh., Ryabchenko V.N. Modification the Exact Pole Placement Method and Its Application for the Control of Spacecraft Motion. *J. of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, pp. 279–292.
- [3] Misrikanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Pole placement for controlling a large scale power system. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72:10, pp. 2123–2146.
- [4] Zubov N.E., Vorob'eva E.A., Mikrin E.A., Misrikanov M.Sh., Ryabchenko V.N., Timakov S.N. Synthesis of Stabilizing Spacecraft Control Based on Generalized Ackermann's Formula. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2011, vol. 50, pp. 93–103.
- [5] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Band formulas for analysis and synthesis of controlled dynamic mimo-systems. *Vestn. Mosk. Gos.Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Piborost. [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.]*, 2014, no. 3, pp. 3–15 (in Russ.).
- [6] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Synthesis of Controls for a Spacecraft That Optimize the Pole Placement of the Closed Loop Control System. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, pp. 431–444.

Статья поступила в редакцию 16.10.2014

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области систем управления космических аппаратов.

ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” имени С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская обл., г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Zubov N.E. — Dr. Sci. (Eng.), Deputy and Scientific Director of the Research and Development Centre of the S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, professor of Automatic Control System department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of spacecraft dynamical systems control.

S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, заведующий кафедрой “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области систем управления космических аппаратов. ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” имени С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская обл., г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Mikrin E.A. — Dr. Sci. (Eng.), Academician of the Russian Academy of Sciences, First Deputy General Designer of the S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, Head of Automatic Control System department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of spacecraft dynamical systems control.

S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области систем управления космических аппаратов.

ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” имени С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская обл., г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Ryabchenko V.N — Dr. Sci. (Eng.), lead researcher of the Research and Development Centre of the S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, professor of Automatic Control System department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of dynamical systems control.

S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Ефанов Дмитрий Евгеньевич — аспирант научно-технического центра ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королева”. Автор более 10 научных работ в области систем управления космических аппаратов.

ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” имени С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская обл., г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

Efanov D.E. — post-graduate of the Research and Development Centre of the OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”. Author of more than 10 publications in the field of spacecraft dynamical systems control.

S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.