УДК 629.7

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ В ЕДИНОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ЦИКЛЕ БАЛЛИСТИКО-НАВИГАЦИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИМИ ПОЛЕТАМИ

Л.Н. Лысенко, **В.В. Бетанов**, **Ф.В. Звягин**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
e-mail: sm3@sm.bmstu.ru; pk-bmstu@ya.ru

Рассмотрена возможность построения комплексной методики структурно-параметрической оптимизации математической модели в едином технологическом цикле баллистико-навигационного обеспечения оперативного управления космическими полетами на основе решения известных и разработанных ранее подходов, базирующихся на оценке наблюдаемости нелинейных динамических систем, параметрической оптимизации моделей в заданной структуре и нахождения последовательности навигационных определений, как эквивалента решения задачи D-оптимального планирования. Проанализированы возможные варианты ветвления алгоритмических структур в зависимости от уровня известного исходного информационного оснащения технологий оперативного управления и выполнено обобщение рассматриваемых задач на многомерный случай.

Ключевые слова: космический полет, баллистико-навигационное обеспечение, математические модели движения, функции измерений, навигационные определения, структурная и параметрическая оптимизация моделей.

CONSISTENT STRUCTURAL-PARAMETRICAL OPTIMIZATION OF MODELS IN A SINGLE TECHNOLOGICAL CYCLE OF BALLISTIC AND NAVIGATIONAL SUPPORT FOR OPERATIVE SPACEFLIGHT CONTROL

L.N. Lysenko, **V.V. Betanov**, **F.V. Zvyagin**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow
e-mail: sm3@sm.bmstu.ru; pk-bmstu@ya.ru

A possibility of constructing a complex technique is considered for structural-parametrical optimization of the mathematical model in a single technological cycle of ballistic and navigational support for operative spaceflight control based on solving the known and earlier developed approaches that rely on estimating the observability of nonlinear dynamical systems, optimizing parametrically the models in a given structure and finding the sequence of navigational definitions as an equivalent of solving problems of the D-optimal planning. Probable variants of algorithmic structure branching depending on the level of the known initial information provisions for the operative control technologies are analyzed, and the extension of the regarded problems for the multidimensional case is performed.

Keywords: spaceflight, ballistic and navigation support, mathematical models of motion, functions of measurements, navigational definitions, structural-parametrical optimization of models.

Создание баллистико-навигационного обеспечения (БНО) космических полетов (КП) предполагает необходимость согласования математической модели движения (ММД) с составом измеряемых параметров, что, естественно, связано с необходимостью проведения анализа их возможных структур. Очевидно, что при этом могут быть использованы модели различных видов и типов.

В частности, движение космического аппарата (КА) может быть математически описано в прямоугольной, цилиндрической или сферической системах координат. Состав измеряемых параметров также может варьироваться в широких пределах. Ввиду наличия множества моделей состояния (движения) X и множества моделей измеряемых функций Y, возникает проблема выбора, если не оптимального, то хотя бы рационального сочетания обсуждаемых моделей на прямом произведении X×Y соответствующих множеств.

При этом, модели систем, удовлетворяющие множествам X и Y, должны быть согласованы по наблюдаемости [1].

Исследование наблюдаемости орбитального движения КА позволяет установить, что все шесть элементов невозмущенной кеплеровой орбиты, характеризующих ее положение в пространстве Ω, i, ω (восходящий узел, наклонение, аргумент перигея), форму — p, e (фокальный параметр и эксцентриситет) и τ — время, определяющее положение КА на орбите в начальный момент времени, могут быть уточнены по измерениям только наклонной дальности или только радиальной скорости, производимых с одного измерительного пункта (ИП), координаты положения которого на поверхности Земли известны. Задача также будет иметь решение для любой измеряемой вектор-функции, в состав которой входит один из названных параметров. Однако, если принять к рассмотрению модель, в которой скорость вращения Земли не учитывается, что характерно для случая, когда измерения сосредоточены на коротком временном интервале, имеющем место при однопунктной технологической схеме управления, определить элементы орбиты по измерениям только одной наклонной дальности окажется невозможным. Для решения задачи уточнения всех элементов орбиты в этом случае потребуются совокупные измерения наклонной дальности и хотя бы одного “направляющего косинуса” угла из числа, определяющих направление на КА относительно осей измерительной системы координат с началом в общем центре антенных баз.

Выбор структуры моделей из условий выполнения наблюдаемости системы. Пусть состояние динамической системы описывается векторным нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$\mathrm{X}: \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}\right); \quad \mathbf{x}\left(t_0\right) = \mathbf{x} \text{ — задано}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}\left(t\right)$ — вектор состояния системы; $\mathbf{x} \in R^n$; $\mathbf{u} \in R^l$ — вектор управления, заданный в функции времени $t \in [t_0, t_k]$.

Уравнение наблюдений (уравнение измеряемых функций) в общем виде представим в форме

$$\mathrm{Y}: \mathbf{y} = \varphi\left(t, \mathbf{x}\right); \quad \mathbf{y}\left(t\right) \in R^m. \tag{2}$$

Вообще говоря, состояние системы X является неопределенным. При этом степень неопределенности может быть различной. Она может заключаться в том, что не известны начальные условия в (1) при заданных уравнениях состояния, либо не известны какие-либо параметры этих уравнений при заданных начальных условиях, наконец, возможно и то и другое. Для навигационных определений состояния в задачах БНО наиболее характерным является первый случай. Тогда необходимым условием существования решения, позволяющего на основе имеющейся измерительной информации однозначно определить начальные условия состояния системы, является наблюдаемость ее вектора состояния по измерениям выходного сигнала (сигнала обратной связи), математическое представление которого соответствуют форме (2).

Система X$\times$Y, описываемая уравнениями состояния и уравнениями измерений на интервале времени $[0,\,T]$, будет называться наблюдаемой, если между множеством фазовых траекторий $\mathbf{x}(t)$ и множеством измеряемых функций $\mathbf{y}(t)$ существует взаимно однозначное соответствие.

Термин “наблюдаемость” был введен Р. Калманом еще в начале 60-х годов прошлого столетия. Им же получены критерии наблюдаемости для линейных систем. Применительно к линейным стационарным системам, описываемым каноническими детерминированными уравнениями состояния и измерений

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{x}\,(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}\,(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}\,(t)\,, \\ &\mathbf{y}\,(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}\,(t)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

условие наблюдаемости формулируется следующим образом: система наблюдаема в том и только том случае, когда

$$\operatorname{rank}\left[\mathbf{C}^{\text{т}},\ \mathbf{A}^{\text{т}}\mathbf{C}^{\text{т}}, \ldots,\ \mathbf{A}^{\text{т}(n-1)}\mathbf{C}^{\text{т}}\ \right] = n, \tag{4}$$

где n — размерность вектора состояния системы.

Отметим, что данный критерий является глобальным, как характеризующий наблюдаемость или не наблюдаемость системы во всем фазовом пространстве X$\times$T.

Отдельными авторами в разное время предпринимались попытки получения критерия наблюдаемости для нелинейных систем. По-видимому, одной из первых таких попыток, является критерий Ю.М.-Л. Костюковского [2], рассмотрению которого здесь отдается предпочтение.

Прежде всего укажем, что для нелинейных систем, даже в принципе могут быть получены только лишь локальные критерии, поскольку по своей природе нелинейная система, наблюдаемая в одной части фазового пространства, может быть ненаблюдаема в другой его части и наоборот.

Предположим, что правые части уравнений (1) и (2) являются аналитическими функциями переменных t и $\mathbf{x}(t)$. Будем считать также, что уравнение (1) удовлетворяет условиям теоремы единственности решения, так что между множеством начальных условий X_0 и множеством текущих состояний системы X существует взаимно однозначное соответствие

$$\mathrm{X}_0 \Leftrightarrow \mathrm{X}. \tag{5}$$

Тем самым определено, что в областях X_0 и X условия наблюдаемости эквивалентны.

Предварительно требуется установить условия взаимно однозначного соответствия между множествами X_0 и Y.

Следуя [3, 4], будем считать, что указанные множества взаимно однозначны в том смысле, что при любой программе измерений, реализуемой в моменты времени t_j на интервале $[0, t_k]$, где $1 \leqslant j \leqslant n$, может быть указано множество из n чисел $\varphi_k\left(t_j\right)$, где $1 \leqslant k \leqslant m$, взаимно однозначное с множеством из n чисел x_{i_0}, где x_{i_0} — компоненты вектора $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_0$. Предположим, что для любого произвольного вектора $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}_0$ могут быть записаны n значений k-й координаты $\varphi_k(t)$ вектор-функции $\varphi(t)$ в n моментов времени t_j:

$$\varphi_k\left(t_j, \mathbf{x}\left(t_j, \mathbf{x}_0\right)\right) = \varphi_k\left(\mathbf{x}_0\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

где $\varphi_k\left(\mathbf{x}_0\right)$ при фиксированных t_j представляет собой некоторые функции переменных $\mathbf{x}_0$. Эти функции непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ в силу своей аналитичности, поэтому условие взаимно однозначного соответствия между множествами $\varphi_k\left(\mathbf{x}_0\right)$ и x_{i_0} в окрестности $\mathbf{x}_0$ определяется условиями теоремы существования неявных функций, состоящими в том, чтобы определитель фундаментальной матрицы Якоби (якобиан)

$$\mathrm{I}_k^{(n,n)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_{1_0}}\left(t_1\right) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n_0}}\left(t_1\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_{1_0}}\left(t_n\right) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n_0}}\left(t_n\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d\varphi_k}{dx_0}\left(t_1\right) \\ \vdots \\ \dfrac{d\varphi_k}{dx_0}\left(t_n\right) \end{bmatrix} \tag{7}$$

был бы невырожденным на интервале $[0, T]$.

Если теперь сформировать блочную матрицу $\mathbf{I}$ размером $(n \times m \cdot n)$ путем объединения всех матриц $\mathrm{I}_k^{(n,n)}$, $k = 1, \ldots, n$, то в соответствии с работой [2] условие существования взаимно однозначного соответствия между множествами X_0 и Y в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ будет иметь вид

$$\operatorname{rank}\,[\mathbf{I}] = n. \tag{8}$$

Динамическую систему, для которой выполнено условие (8), принято называть локально наблюдаемой в области $\mathbf{X} \times \mathbf{T}$. Локальность в этом определении подчеркивает то обстоятельство, что наблюдаемость системы рассматривается здесь, во-первых, лишь в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$ и, во-вторых, на некотором вполне определенном множестве точек $t_j \in \mathbf{T}$, определяемом программой измерений.

Отметим, ограничения здесь накладываются не только на область (окрестность) множества состояний нелинейной системы, что очевидно, но также и на множество времен (временную программу) проведения измерений.

Воспользуемся теперь условием аналитичности правых частей уравнений (1) и (2) и представим k-ю координату вектор-функции $\mathbf{y}(t)$ в виде степенного ряда, сходящегося в области выполнения условия аналитичности рассматриваемых функций.

$$\varphi_k = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_k^{(l)} \frac{(t - t_0)^l}{l!}, \tag{9}$$

где коэффициенты $\Phi_k^{(l)}$ вычислены в точке $\mathbf{x}_0$ множества X_0. Соответственно, с помощью указанных коэффициентов может быть составлена новая матрица $\mathbf{J}$, включающая n строк и бесконечное (в силу бесконечного числа членов разложения) число столбцов:

$$\mathrm{J}_k = \left[\ \left[\frac{d\Phi_k^{(0)}}{d\mathbf{x}_0}\right]^{\mathrm{T}}, \ \left[\frac{d\Phi_k^{(1)}}{d\mathbf{x}_0}\right]^{\mathrm{T}}, \ldots \ \left[\frac{d\Phi_k^{(l)}}{d\mathbf{x}_0}\right]^{\mathrm{T}} \ldots \ \right]. \tag{10}$$

Профессором Г.Н. Разореновым было доказано следующее утверждение: ранги матриц $\mathrm{I}_k^{(n,n)}$ и J_k принимают свое наибольшее возможное значение, равное n, лишь одновременно, причем этот вывод не зависит от программы измерений почти всюду на $\mathbf{T}$.

Объединив далее все матрицы J_k в единую блочную, можно доказать, что условие наблюдаемости (8) будет справедливо и при использовании матрицы J_k, т.е. справедливо и следующее условие:

$$\operatorname{rank}[\mathbf{J}] = n, \tag{11}$$

где $\mathbf{J} = [\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \ldots \mathrm{J}_\mathrm{n}]$.

В случае линейных стационарных систем условие (11) легко преобразуется к виду (4).

Следующий вопрос, требующий обсуждения, касается возможности распространения приведенных результатов на всю область возможных начальных условий.

Предположим, что J_k — матрица $(n \times n)$, составленная из столбцов $\mathbf{J}$. Элементы этой матрицы будут представлять собой некоторые функции фазовых координат x_{i_0} $(i = \overline{1, n})$ начального вектора $\mathbf{x}_0$. Пусть также $\mathrm{X}_{s_0} \in \mathrm{X}_0$ — множество многообразий, порождаемое уравнением

$$\det\,[\mathrm{J}_s] = 0. \qquad (12)$$

Тогда пересечение многообразий $\{\mathrm{X}_{1_0} \cap \mathrm{X}_{2_0} \cap \ldots \mathrm{X}_{s_0} \cap\} \in \mathrm{X}_0$ есть подобласть локальной ненаблюдаемости в области $\mathrm{X}\times\mathrm{T}$. Выборка матриц J_s может проводиться путем последовательного перебора столбцов матрицы J. Если на некотором шаге s окажется, что пересечение этих многообразий пусто, то система наблюдаема во всей области X_0.

Наконец, последний аспект связан с необходимостью уяснения проблемы ограничения числа столбцов в (10), бесконечность которых обусловлена теоретической бесконечностью членов разложения в (9). Здесь необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. При решении задач оперативного управления полетом к моделям БНО предъявляются исключительно высокие требования по точности. В этом случае ряд используемых моделей, в частности, модель гравитационного поля Земли (ГПЗ), вынужденно основывается на идее представления решения в виде степенных рядов, выбор числа сохраняемых членов разложения которых диктуется, в основном соображениями удовлетворения требуемой точности. В этом случае число столбцов в (10) должно определяться из условия пропорциональности по отношению к числу удерживаемых членов разложения в используемых структурах рядов.

В задачах проектного этапа БНО достаточно часто используются ММД, точные аналитические решения которых известны в конечном виде, в частности, в случае постановки задач движения в центральном гравитационном поле.

При таком подходе функцию φ_k в (9) достаточно представить в виде некоторой линейной комбинации конечной части суммируемых произведений, вычисленных в точке $\mathbf{x}_0$ коэффициентов в виде производных $\dfrac{d\Phi_k^{(l)}}{d\mathbf{x}_0}$ на линейно независимые на отрезке $[0, t_k]$ функции, например функции эксцентрической или истинной аномалии при рассмотрении движения КА по эллиптической орбите.

После выделения подмножества наблюдаемых систем на прямом произведении $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ дальнейшие поиски качественного "более оптимального" сочетания моделей на нем являются бесперспективными. Они возможны только на основе количественного критерия ценности измерительной информации.

Исходная постановка задачи оптимизации моделей заданной структуры. На эвристическом уровне соответствующая задача может быть сформулирована следующим образом: при выбранной структуре модели состояния из подмножества $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$, удовлетворяющего условиям наблюдаемости, определить оптимальную в смысле заданного критерия программу измерений, а также оптимизировать характеристики модели заданной структуры, при которых гарантированно достигаются определение и анализ действительного движения с требуемой точностью и минимальными затратами.

В такой постановке задача подпадает под класс задач теории оптимального планирования эксперимента, возникновение которых относится к 40-м годам прошлого столетия.

Предпочтительным, естественно, является решение сформулированной выше оптимизационной задачи на основе использования единого критерия. Применительно к определению и анализу движения в задачах БНО, в качестве соответствующего оценочного критерия должен выступать критерий, так или иначе связанный с точностью нахождения КА в некоторой окрестности заданного номинального состояния для фиксированного интервала времени.

Однако при этом необходимо иметь в виду, что на вид структуры критерия будет оказывать влияние степень полноты априорной информации о векторе $\mathbf{q}$ неизвестных постоянных параметров модели состояния исследуемого объекта.

При наличии полной стохастической информации, помимо закона распределения, считаются известными вектор математического ожидания $\mathbf{m}_q$, корреляционная матрица $\mathbf{R_q}$ и, следовательно, значение плотности вероятностей $\mathbf{p_Q}(\mathbf{q})$, где $\mathbf{Q}$ — множество векторов $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{p_Q}\left(\mathbf{q}\right) = \left(2\pi\right)^{\frac{-m}{2}} \left|\mathbf{R_q}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{q}-\mathbf{m_q}\right)^{\mathrm{т}} \mathbf{R_q}^{-1}\left(\mathbf{q}-\mathbf{m_q}\right)\right). \quad (13)$$

Корреляционной матрицей $\mathbf{R_q}$ случайного вектора $\hat{\mathbf{q}}$, по определению, является матрица

$$\mathbf{R_q} = M\left[\delta\hat{\mathbf{q}}\,\delta\hat{\mathbf{q}}^{\mathrm{т}}\right], \quad (14)$$

где M — оператор математического ожидания; $\delta\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^* - \mathbf{q}$ — ошибка, равная разности случайного вектора оценок неизвестных параметров $\hat{\mathbf{q}}^*$ и точного значения вектора оцениваемых параметров.

Если ввести теперь в рассмотрение совокупность измерений, называемых в математической статистике выборкой, обозначаемых как

$$\mathbf{z} = \left[\mathbf{z}_1^{\mathrm{т}}, \vdots \mathbf{z}_2^{\mathrm{т}} \ldots \mathbf{z}_N^{\mathrm{т}}\right]^{\mathrm{т}} \quad (15)$$

и матрицу частных производных от компонентов вектора функций $\mathbf{f}\left(\mathbf{q},\,\mathbf{z}^*\right)$ по компонентам вектора оцениваемых параметров $\mathbf{q}$ вида $\dfrac{\partial\mathbf{f}\left(\mathbf{q},\mathbf{z}^*\right)}{\partial\mathbf{q}} = \mathbf{Q}\left(\mathbf{q}\right)$, то

$$\mathbf{R_q} = \mathbf{Q}^{-1}\left(\mathbf{q}\right)\mathbf{G}\left(\mathbf{q}\right)\left[\mathbf{Q}^{\mathrm{т}}\left(\mathbf{q}\right)\right]^{-1}, \quad (16)$$

где симметричная матрица $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ представляет собой математическое ожидание произведений различных компонентов векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{z}^*)$. Из приведенного соотношения следует, что для расчета $\mathbf{R_q}$ необходимо знание точного значения вектора $\mathbf{q}$. Исходя из характера решаемых задач БНО, его значение неизвестно ни до проведения измерений, ни после их осуществления. Обработка опытных данных (результатов измерений) позволяет получить лишь значение оценки вектора $\mathbf{q}$, т.е. $\hat{\mathbf{q}}$.

Тогда, считая, что $\mathbf{q} \approx \hat{\mathbf{q}}$, после подстановки в (16) будем иметь

$$\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{q} = \mathbf{Q}^{-1}(\hat{\mathbf{q}})\, \mathbf{G}(\hat{\mathbf{q}}) \left[\mathbf{Q}^{\text{т}}(\hat{\mathbf{q}})\right]^{-1}, \tag{17}$$

представляющую собой оценку корреляционной матрицы, полученной по результатам измерений, которая и используется вместо неизвестной матрицы $\mathbf{R_q}$, задаваемой уравнением (16).

При неполной априорной информации единственным априори заданным условием является принадлежность

$$\mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \tag{18}$$

или, что эквивалентно

$$q_{j\min} \leqslant q_j \leqslant q_{j\max} \quad (j = 1, \ldots m), \tag{19}$$

где, как следует из выводов теории статистических решений А. Вальда, в общем случае, $\mathbf{Q}$ — многомерный параллелепипед в евклидовом пространстве.

Для последнего случая в качестве единого критерия оптимальности плана эксперимента принято принимать вероятность нахождения оценки в заданных пределах. Такой план носит название оптимального по вероятности.

В случае использования гипотезы о наличии априори полной стохастической информации и принадлежности плотности вероятностей $\mathbf{p_Q}(\mathbf{q})$ семейству нормальных распределений, в качестве критериев используются различные скалярные характеристики матрицы $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{q}}}$. При этом наиболее широкое распространение находят D-оптимальные $\left(\min\limits_{\{\mathbf{Q}\}} \det \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{q}}}\right)$ и E-оптимальные $\left(\min\limits_{\{\mathbf{Q}\}} \lambda_{\max}(\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{q}}})\right)$ планы; D-оптимальный план, как известно, минимизирует обобщенную дисперсию оценок параметров, или объем эллипсоида рассеивания; E-оптимальный план минимизирует максимальную ось эллипсоида рассеивания.

Сопоставление D-оптимального и E-оптимального планов дает основание отдать предпочтение первому, характеризуемому единой и более простой схемой поиска решения как задачи планирования навигационных измерений, так и задачи параметрической оптимизации модели.

Если ввести в рассмотрение вектор варьируемых параметров модели $\boldsymbol{\pi}\left(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s\right)$ и вектор варьируемых моментов времени навигационных определений $\mathbf{t}\left(t_1, t_2, \ldots, t_N\right)$, то задача нахождения оптимальных моментов проведения навигационных определений и оптимальных характеристик в рамках D-оптимального плана сведется к решению системы экстремальных уравнений вида

$$\frac{\partial\left(\mathbf{R}_{\mathbf{q}}\right)}{\partial \mathbf{j}}=0, \tag{20}$$

где $\mathbf{j}$ должно последовательно принимать значения всей совокупности векторов $\mathbf{t}$ и $\boldsymbol{\pi}$.

Если теперь записать выражение матрицы (16) для системы $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, то будем иметь

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{q}}}=\left.\left\{\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\right]\left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right] \mathbf{R}_{\mathbf{y}}^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\right]^{\mathrm{T}}\right\}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{m}_{\mathbf{q}}}, \tag{21}$$

где $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}$ — положительно определенная корреляционная матрица вектора ошибок измерения, $\mathbf{m}_{\mathbf{q}}$ — математическое ожидание вектора оцениваемого параметра $\mathbf{q}$.

Причем

$$\mathbf{H}(\mathrm{Y})=\left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right] \mathbf{R}_{\mathbf{y}}^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

в (21) характеризует собой свойства модели измерений, а матрица

$$\mathbf{G}(\mathrm{X})=\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\right] \tag{23}$$

— свойства модели состояния.

Из анализа выражений (22) и (23) однозначно следует, что если априорная информация о предельных отклонениях компонентов вектора $\mathbf{q}$ относительно ожидаемого значения $\mathbf{m}_{\mathbf{q}}$ отсутствует, то в качестве показателей влияния параметров следует рассматривать только частные производные $\dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$. Будем иметь в виду также, что для любых $\mathbf{q}$ и $t \in\left[0, t_k\right] \quad \det\left[\mathbf{J}^{\mathrm{T}} \mathbf{J}\right]>0$, где, следуя (11), $\mathbf{J}=\left[\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, \ldots, \mathrm{J}_m\right]$.

Тогда, согласно критерию D-оптимальности, параметрическая оптимизация модели структуры из множества $\{\mathrm{X} \times \mathrm{Y}\}$ должна осуществляться, исходя из выполнения условия

$$\max_{\{\mathrm{X} \times \mathrm{Y}\}}\left|\mathbf{G}(\mathrm{X}) \mathbf{H}(\mathrm{Y}) \mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathrm{X})\right|. \tag{24}$$

В этом случае представляется возможным декомпозировать задачу совместной оптимизации плана навигационных определений и параметрической оптимизации модели, что исключительно важно с точки зрения упрощения вычислительных процедур. Задача отыскания оптимальных параметров заданной структуры системы $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ в соответствии с условием (24) относится к классу задач комбинаторного планирования.

В такого рода задачах важнейшим является требование предварительного сужения множества $\{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\}$ до минимально возможного с точки зрения последующей работы с непустым множеством по отношению к искомой системе. Только в этом случае применительно к стандартным размерностям типовых задач БНО число комбинаторных вариантов окажется приемлемым для нахождения решения.

Если в качестве критерия оптимизации выбрана корреляционная матрица оценок, то необходимо при фиксации последовательности моментов измерений найти ту из корреляционных матриц, которая имеет наименьший определитель.

Оптимизация программы навигационных измерений. После параметрической оптимизации моделей состояния в рассматриваемой постановке, можно переходить к оптимизации программы навигационных измерений. Сформулируем задачу следующим образом. Для допустимого предельно возможного числа измерений N требуется определить моменты времени проведения измерений $\hat{t}_i$ и число измерений n_i на момент $\hat{t}_i$, доставляющие экстремум заданному критерию оптимальности. В качестве последнего, как и в предшествующей задаче, воспользуемся критерием D-оптимального плана, теперь уже в явном виде, т.е. $\min\limits_{\mathrm{T}} \det \mathbf{R}_{\mathbf{q}}$. Попутно отметим, что в том случае, когда постановка задачи предполагает возможным проведение в каждый момент времени только одного измерения, под найденным оптимальным значением $\hat{t}_i$ следует понимать точки интервала навигационных измерений $[0, t_{ik}]$, в пределах которого должна концентрироваться группа измерений, технически реализуемая измерительным средством за обсуждаемый временной интервал.

Полученное таким образом решение будем называть оптимальной программой измерений, обозначаемой через $\hat{\mathbf{u}}\left(\mathbf{q}, \mathbf{t}\right) = \left[\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{q}, t_1\right) \vdots \ldots \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{q}, t_N\right)\right]^{\mathrm{T}}$.

Связь между вектором ошибок $\mathbf{h}$ и вектором оцениваемых параметров представим в виде

$$\mathbf{h} = \mathbf{z} - \mathbf{u}\left(\mathbf{q}, t\right). \tag{25}$$

Применительно к задачам навигационных определений, измерения, проводимые на интервале $[0, t_k]$, являются дискретными (погрешности измерений предполагаются, как правило, аддитивными)

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i + \mathbf{h}_i \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{26}$$

Будем считать, что измерения “прошли” предварительную обработку с соответствующей отбраковкой аномальных данных и “убрано” или “снижено” влияние систематических составляющих.

Очевидно, что вектор $\mathbf{z}$, представляемый в виде выборки, и совокупный вектор ошибок измерений $\mathbf{h}$ будут иметь одинаковую размерность, равную mN.

Поскольку ошибки измерений имеют $\mathbf{m_h} = 0$, необходимо так построить схему обработки результатов измерений вектора $\mathbf{q}$, чтобы оценки ошибок измерений были близки к нулю. Понятно, что конкретные значения реализаций каждой ошибки не являются показателем оптимальности решения. Важно, чтобы они были близки к нулю в совокупности. Для этого достаточно потребовать, чтобы квадрат длины вектора ошибок $\mathbf{h}^{\text{т}}\mathbf{h}$ был бы минимальным. На этом условии базируется наиболее широко используемый на практике метод наименьших квадратов.

Ошибки измерений часто являются неравноточными по времени или по физической природе измеряемых функций. Это дает основание ввести понятие “веса измерений”, задав его в виде матрицы $\mathbf{Q_h}$. Соответственно, в этом случае критерий оптимальности приобретает вид $\mathbf{h}^{\text{т}}\mathbf{Q_h} = \mathbf{h}^{-1}$, а метод определения оценок на основе данного критерия иногда называют методом взвешенных наименьших квадратов.

Система уравнений для определения оценок неизвестных параметров при этом записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{u}\left(\mathbf{q},\mathbf{t}\right)}{d\mathbf{q}}\mathbf{Q_h}\left[\mathbf{z}-\mathbf{u}\left(\mathbf{q},\mathbf{t}\right)\right]=0, \tag{27}$$

а наилучшая оценка параметра $\mathbf{q}$, ищется в форме

$$\mathbf{q}=\mathbf{R_q}\mathbf{\Psi}^{\text{т}}\mathbf{Q_h}\mathbf{z}, \tag{28}$$

где элементы матрицы $\mathbf{R_q}$ зависят от моментов времени измерений.

Поскольку произведение весовой матрицы на невязку в общем случае не равно нулю, то справедливо требование

$$\frac{d\mathbf{u}\left(\mathbf{q},\mathbf{t}\right)}{d\mathbf{q}}=0, \tag{29}$$

эквивалентное для критерия D-оптимальности (при j, принимающему значение $\mathbf{t}$ в (20)) уравнению

$$\frac{\partial\left|\mathbf{R_q}\right|}{\partial t_k}=0 \quad \left(k=1,\ldots,N\right). \tag{30}$$

В силу монотонности логарифмической функции можно записать

$$\frac{\partial\ln\left|\mathbf{R_q}\right|}{\partial t_k}=\mathrm{Sp}\left(\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{q}}}^{-1}\frac{\partial\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{q}}}}{\partial t_k}\right)=0, \quad \left(k=1,\ldots,N\right). \tag{31}$$

Соответствующая (31) система экстремальных уравнений в скалярной форме представления была получена В.М. Рудаковым для определения оптимальной программы измерений в задаче уточнения элементов кеплеровой орбиты по измерениям угловых параметров между направлениями на светило и центр Земли еще в 1969 г.

Однако поиск решения по изложенной схеме в общем случае оказывается очень сложным. Более простым с вычислительной точки зрения является методика итерационного D-оптимального планирования, описанная в работе [3].

Сущность методики сводится к следующему. Предварительно задаются априори в достаточной степени произвольные первые m моментов $\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_m$ программы измерений. Далее требуется на основе этой произвольной последовательности определить $\hat{t}_{m+1}$ квазиоптимальный момент, а затем по той же методике итерационно уточнить первые m приближенно заданных моментов измерений.

Не останавливаясь подробно на описании алгоритма методики, отметим лишь, что неизвестный оптимизируемый момент $\hat{t}_{m+1}$ находится из условия

$$\max_{\{\mathbf{T}\}} \mathbf{Q_h} \mathbf{\Psi}^{\text{т}}(t)\, \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{q}}} \mathbf{\Psi}(t)\,. \tag{32}$$

Применительно к решению задач оптимального планирования навигационных измерений при наличии априори неполной информации укажем на результат, сыгравший определяющую роль на начальной стадии разработки БНО межпланетных полетов.

Рассмотрим этот результат с позиций некоторого предельного случая, когда имеют место наиболее неблагоприятные соотношения между ошибками измерений. При этом моделью состояния вводится вектор параметров движения, связь которого с вектором характеристик модели состояния и состав самого вектора характеристик являются неизвестными.

В этом случае модель, называемая, как известно, факторной, полностью определяется выбором систем координат, в которой рассматривается движение.

Итак, будем считать, что задана предельная ошибка измерений Δ_{h_i}, такая что

$$|h_i| \leqslant \Delta_{h_i} \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{33}$$

Пусть на интервале $[0,\ t_k]$ в дискретные моменты времени t_i измеряется некоторая составляющая вектора параметров движения

$$z_i = x(t_i) + h_i, \quad (i = 1, \ldots, N)\,, \tag{34}$$

где $h_i \in N\ \left(0,\ \sigma_0 \big/ \sqrt{q_{ij}}\right)$, причем q_{ij} — компоненты весовой матрицы $\mathbf{Q_h}$.

Тогда плотность вероятности выборки $\mathbf{z}$ будет иметь вид

$$\mathsf{p}\left(\mathrm{z}\,|\mathrm{x}\right) = \left(2\pi\sigma_0^2\right)^{-\frac{N}{2}} \left|\mathbf{Q_h}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}\left(\mathbf{z}-\mathbf{x}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q_h}\left(\mathbf{z}-\mathbf{x}\right)\right). \qquad (35)$$

В соответствии с методом максимального правдоподобия оценивать принятую к рассмотрению модель необходимо на основании минимума показателя экспоненты в выражении (35):

$$\sum_{i=1}^{N} q_i\left(z_i - x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Delta_{h_i}}\left(z_i - x_i\right)^2. \qquad (36)$$

При этом оценка вектора параметров $\hat{\mathbf{q}}$ будет иметь ошибку

$$\delta\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q} = \left(\mathbf{R}^*_{\hat{\mathbf{q}}}\right)^{-1}\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q_h}\mathbf{h}, \qquad (37)$$

где $\mathbf{R}^*_{\hat{\mathbf{q}}}$ — матрица, представляющая собой произведение матрицы Грама размера $(r \times r)$ $\mathbf{\Psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Psi}$ на диагональную весовую матрицу $\mathbf{Q_h} = [\Delta h_{ij}]^{\mathrm{T}}$ при $i = j$.

Предположим, что присутствует ограниченная априорная информация об измеряемой функции, имеющая вид выборочной корреляционной матрицы

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{S}} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{z}}\right)\left(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{z}}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad (38)$$

где $\mathbf{m_z} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} z_k$, k — номер измерений в серии, n — общее число измерений.

Пусть (для определенности) вектор измерений $\mathbf{z}$ относится к нормальной совокупности с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $\mathbf{R_z}$, которая, например, для простейшего случая $N = 2$, имеет вид

$$\mathbf{R_z} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

где ρ — коэффициент корреляции.

Введем в рассмотрение факторную модель в виде ряда

$$\mathbf{x}\left(t\right) = \sum_{j=1}^{r}\varphi_j\left(t\right) f_j, \qquad (39)$$

в которой $\varphi_j(t)$ — неизвестные факторные нагрузки, а f_j — простые факторы, о которых известно, что

$$f_j \in N\left(0,\ 1\right) \quad \left(j = 1, \ldots, r\right). \qquad (40)$$

Спланируем измерения таким образом, чтобы при произвольной корреляции между ошибками измерения $\Delta_{h_i} = \left|h_i\Delta^{-1}_{h_i}\right| \leqslant 1$

($i = 1, \ldots, N$) используемый метод обработки (метод наименьших квадратов для нормального закона распределения) обеспечивал бы получение ошибок, удовлетворяющих (37).

Предположим теперь, что Φ — множество всех векторов факторных нагрузок измерений $\varphi_j \in \Phi$; W_k — множество всех возможных комбинаций из k нагрузок ($k \geqslant r$), а W — объединение всех множеств W_k при $k = r, r+1, \ldots, N$. Тогда задача планирования экстремальных измерений по минимаксному критерию

$$\min_{\{\mathrm{W}\}} \max_{\{\Delta_n\}} |\delta \mathbf{q}|, \qquad (41)$$

в предположении произвольной корреляции между ошибками измерений, относится к классу задач линейного программирования, в частности, решаемых с использованием модифицированного симплекс-метода, разработанного П.Е. Эльясбергом и Б.Ц. Бахшияном в 1969 г. [5]. Несколько позднее, в работе [6] М.Л. Лидовым было показано, что $\max |\delta \mathbf{q}|$ достигается в вершинах N-мерного куба при $|\Delta_{\mathbf{h}}| = 1$ и для $m \geqslant r$ справедливо неравенство

$$\min_{\{\mathrm{W}_m\}} \max_{\{\Delta_n\}} |\delta \mathbf{q}| > \min_{\{\mathrm{W}_r\}} \max_{\{\Delta_n\}} |\delta \mathbf{q}|. \qquad (42)$$

Физический смысл неравенства (42) заключается в том, что при произвольной корреляции между ошибками измерений их оптимальное число должно равняться числу оцениваемых параметров, а задача о выборе оптимального состава измерений может трактоваться как задача коррекции траекторий. Полученный результат может быть объяснен следующим образом. Наиболее неблагоприятное соотношение между ошибками измерений означает функциональную линейную связь между ними, т.е. коэффициенты корреляции будут принимать предельные значения ± 1. Поскольку в этом случае ошибки измерений уже не являются случайными последовательностями, увеличение избыточности измерений не приведет к улучшению, а только ухудшит точность оценок. Оптимальными оказываются те измерения, в которых достигается наиболее благоприятное соотношение между факторной нагрузкой и ошибкой измерений.

Полученный результат позволил перенести на задачу оптимизации измерений известное для задачи оптимальной коррекции заключение о числе точек коррекции, реализующих оптимальную программу, а также осуществить естественное обобщение на многомерный случай некоторых задач, которые ранее рассматривались исключительно в одномерной постановке.

Заключение. Не претендуя на новизну каждого из отдельно взятых этапов решения рассматриваемой задачи, получивших в той или иной степени полноты отражение в предшествующих работах, авторы статьи считают возможным предположить, что изложенная в ней методика увязки рассматриваемых этапов и анализа влияния уровня априорной неопределенности информации на выбор поиска конечного решения, может оказаться полезным и в достаточной степени эффективным инструментом решения задач БНО оперативного управления КП перспективных КА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Н. М., Лысенко Л. Н., Мартынов А. И. Методы теории систем в задачах управления космическим аппаратом. – М.: Машиностроение, 1981.
2. Костюковский Ю. М. -Л. О наблюдаемости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. – 1968. – № 9. – С. 29–42.
3. Брандин В. Н., Васильев А. А., Худяков С. Т. Основы экспериментальной баллистики. – М.: Машиностроение, 1974 г.
4. Брандин В. Н., Разоренов Г. Н. Определение траекторий космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978.
5. Эльясберг П. Е., Бахшиян Б. Ц. Определение траектории полета космического аппарата при отсутствии сведений о законе распределения ошибок измерений // Космические исследования. – 1969. – Т. VII, вып. 1. – С. 18–28.
6. Лидов М. Л. Математическая аналогия между некоторыми задачами коррекции траекторий и выбора состава измерений и алгоритмы их решений // Космические исследования. – 1971. – Т. IX, вып. 5. – С. 9–20.

Статья поступила в редакцию 22.03.2012