УДК 681.51

О ЛЕНТОЧНОЙ ФОРМУЛЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КРЫЛОВА ДЛЯ АФФИННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Н.Е. Зубов[1,2], **Е.А. Микрин**[1,2], **М.Ш. Мисриханов**[2], **В.Н. Рябченко**[1,2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: nezubov@bmst.ru; Nikolay.Zubov@rsce.ru; Misrikhanov-MS@fsk-ees.ru; rvn@mes-centra.ru
[2]ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" имени С.П. Королёва",
Королёв, Московская обл., Российская Федерация

С использованием теоремы и тождества Гамильтона – Кэли, определений левого и правого делителей нуля максимального ранга для заданной матрицы получена ленточная формула решения обобщенной задачи Крылова, которая заключается в отыскании коэффициентов характеристического полинома для нелинейной аффинной динамической системы. Приведен численный пример аналитического расчета коэффициентов характеристического полинома для задачи управления с использованием поворотов по крену продольным движением космического аппарата при входе в атмосферу Земли. В этом случае она представляет собой нелинейную аффинную систему третьего порядка. Указанный расчет осуществлен как для разомкнутой, так и для замкнутой обратной связью системы управления.

***Ключевые слова*:** теорема и тождество Гамильтона – Кэли, правый и левый делители нуля для матрицы, коэффициенты характеристического полинома, обобщенная задача Крылова, ленточная формула, нелинейная аффинная система, космический аппарат.

ABOUT THE BAND FORMULA FOR THE SOLUTION OF A GENERALIZED KRYLOV PROBLEM FOR AFFINE DYNAMIC SYSTEM

N.E. Zubov[1,2], **E.A. Mikrin**[1,2], **M.Sh. Misrikhanov**[2], **V.N. Ryabchenko**[1,2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: nezubov@bmst.ru; Nikolay.Zubov@rsce.ru; Misrikhanov-MS@fsk-ees.ru; rvn@mes-centra.ru
[2]OAO "S.P. Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya"
Korolev, Moscow region, Russian Federation

The article describes the band formula that is obtained for the solution of a generalized Krylov problem by using the theorem and Cayley-Hamilton identity, definitions of right and left maximum rank zero divisors for the given matrix. It consists in finding the characteristic polynomial coefficients for nonlinear affine dynamic system. Numerical example of analytical calculation of characteristic polynomial coefficients is given for the control problem of longitudinal spacecraft's motion with use of slewings on entering the Earth atmosphere. In this case it is a non-linear affine system of the third order. The given calculation is made both for open- and closed-loop feedback control systems.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00046).

***Keywords*:** Hamilton – Cayley theorem and identity, right and left zero divisors for matrix, characteristic polynomial coefficients, generalized Krylov problem, band formula, non-linear affine system, spacecraft.

Согласно теореме Гамильтона – Кэли каждая числовая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению [1].

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — квадратная матрица с комплексными элементами и

$$p(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \qquad (1)$$

— характеристический полином матрицы $\boldsymbol{A}$. Тогда справедливо тождество Гамильтона – Кэли

$$p(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^n + \alpha_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_1\boldsymbol{A} + \alpha_0\boldsymbol{I}_n = \mathbf{0}. \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{I}_n$ — единичная матрица порядка n, $\mathbf{0}$ — нулевая матрица заданного размера.

В [2, 3] теорема и тождество Гамильтона – Кэли были распространены на прямоугольные числовые матрицы, в [4, 5] — на блочные числовые матрицы. В [6, 7] указанные теорема и тождество доказаны для пары коммутирующих матриц, в [8, 9] — для стандартных и сингулярных 2-D и *n*-D систем. В [10] теорема и тождество Гамильтона – Кэли распространены на нелинейные аффинные динамические системы.

Пусть задана нелинейная нестационарная аффинная динамическая система

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}(x,t)x(t) + \boldsymbol{B}(x,t)u(t), \qquad (3)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $u(t) \in \mathbf{R}$ — скалярный вход; $\boldsymbol{A}(x,t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}(x,t) \in \mathbb{R}^n$ — дифференцируемые функциональные матрицы; $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел.

Введем определение.

Определение 1 [10]. *Полином*

$$p(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}(x,t)) = \\ = \lambda^n + \alpha_{n-1}(x,t)\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1(x,t)\lambda + \alpha_0(x,t) \qquad (4)$$

с коэффициентами

$$\alpha_k = \alpha_k(x,t), \quad k = 0,\, 1,\, ...,\, n-1,$$

зависящими от $x(t)$ *и* t, *называется характеристическим полиномом системы* (3). *Полиномиальное уравнение*

$$p(\lambda) = 0 \qquad (5)$$

называется характеристическим уравнением системы (3).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [10]. *Матрица* $\boldsymbol{A}(x,\,t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *нелинейной нестационарной аффинной динамической системы* (3) *удовлетворяет уравнению*

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \boldsymbol{A}^{i+k}(x,\,t) = \mathbf{0}, \quad k = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1, \tag{6}$$

где $\alpha_n = 1$.

При $k = 0$ из теоремы 1 следует формула, обобщающая классическую формулу Гамильтона – Кэли:

$$p\left(\boldsymbol{A}(x,\,t)\right) = \boldsymbol{A}^n(x,\,t) + \alpha_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}(x,\,t) + \cdots + \alpha_1\boldsymbol{A}(x,\,t) + \alpha_0 I_n. \tag{7}$$

В настоящей работе представлена ленточная формула решения задачи отыскания коэффициентов характеристического полинома (4) для нелинейной аффинной системы (3) (*обобщенной задачи А.Н. Крылова*).

В [11] для вычисления коэффициентов характеристического полинома числовой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (1) получена ленточная формула

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha_{n-2} \\ \hline \alpha_{n-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -\mathbf{b}^+\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{b}^+ & -\mathbf{b}^+\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{b}^+ & -\mathbf{b}^+\boldsymbol{A} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}^+ & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}^+\boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{b}^+ & -\mathbf{b}^+\mathbf{A} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\Upsilon}_1 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_2 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_3 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_{n-1} \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_n \end{array}\right),$$

$$\mathbf{b}^+\boldsymbol{\Upsilon}_n = 1, \tag{8}$$

которая в развернутой форме имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\mathbf{b}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Upsilon}_1, \\ \alpha_1 = \mathbf{b}^+\left(\boldsymbol{\Upsilon}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Upsilon}_2\right), \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} = \mathbf{b}^+\left(\boldsymbol{\Upsilon}_{n-2} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Upsilon}_{n-1}\right), \\ \alpha_{n-1} = \mathbf{b}^+\left(\boldsymbol{\Upsilon}_{n-1} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Upsilon}_n\right), \\ \mathbf{b}^+\boldsymbol{\Upsilon}_n = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ — вектор, такой, что пара матриц $(\boldsymbol{A},\,\mathbf{b})$ удовлетворяет условию полной управляемости

$$\operatorname{rank}\left(\ \mathbf{b} \mid \boldsymbol{A}\mathbf{b} \mid \cdots \mid \boldsymbol{A}^{n-2}\mathbf{b} \mid \boldsymbol{A}^{n-1}\mathbf{b}\ \right) = n; \tag{10}$$

$\mathbf{b}^{+}$ — вектор, обратный вектору $\mathbf{b}$, т.е. $\mathbf{b}^{+}\mathbf{b} = 1$;

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} -\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{b}_L^{\perp} & -\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^{\perp} & -\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_L^{\perp} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\mathbf{b}_L^{\perp}\boldsymbol{A} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{b}_L^{\perp} \end{array}\right)_R^{\perp} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\Upsilon}_1 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_2 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_3 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_4 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_{n-1} \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_n \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n^2},\ \boldsymbol{\Upsilon}_i \in \mathbb{R}^n; \tag{11}$$

$(\,\cdot\,)_L^{\perp}$ — левый делитель нуля максимального ранга заданной матрицы (вектора); $(\,\cdot\,)_R^{\perp}$ — правый делитель нуля максимального ранга заданной матрицы (вектора) [12].

Пусть Θ_x — некоторая область в пространстве состояний $\mathbb{R}^n$. Как показано в работах [13, 14], для исследования управляемости системы (3) можно использовать матрицу, аналогичную матрице в (10)

$$C(x,\,t) = \left(\ \boldsymbol{B}(x,\,t) \mid \boldsymbol{A}(x,\,t)\boldsymbol{B}(x,\,t) \mid \ldots \mid \boldsymbol{A}^{n-1}(x,\,t)\boldsymbol{B}(x,\,t)\right). \tag{12}$$

Если выполняется условие

$$\forall x \in \Theta_x\colon\ \operatorname{rank} C(x,\,t) = n \tag{13}$$

или в другом виде

$$\forall x \in \Theta_x\colon \det C(x,\,t) \neq 0, \tag{14}$$

тогда, используя методику из [11], можно по аналогии доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть задана нелинейная нестационарная аффинная динамическая система*

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = \boldsymbol{A}(x,\,t)x(t) + \boldsymbol{B}(x,\,t)u(t), \\ \boldsymbol{A}(x,\,t) \in \mathbb{R}^{n\times n},\quad \boldsymbol{B}(x,\,t) \in \mathbb{R}^n, \end{gathered}$$

и пусть существует область $\Theta_x \subseteq \mathbb{R}^n$*, где выполняется условие*

$$\det C(x,\,t) \neq 0, \tag{15}$$

$$C(x,\,t) = \left(\ \boldsymbol{B}(x,\,t) \mid \boldsymbol{A}(x,\,t)\boldsymbol{B}(x,\,t) \mid \cdots \mid \boldsymbol{A}^{n-1}(x,\,t)\boldsymbol{B}(x,\,t)\ \right),$$

тогда коэффициенты $\alpha_k = \alpha_k(x,\,t)$*,* $k = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1$ *характеристического полинома*

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}(x,\,t)\right) = \lambda^n + \alpha_{n-1}(x,\ t)\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1(x,\ t)\lambda + \alpha_0(x,\ t)$$

определяются формулами

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\boldsymbol{B}^+(x,\,t)\boldsymbol{A}(x,\,t)\boldsymbol{\Upsilon}_1(x,\,t), \\ \alpha_1 = \boldsymbol{B}^+(x,\,t)\left(\boldsymbol{\Upsilon}_1 - \boldsymbol{A}(x,\,t)\boldsymbol{\Upsilon}_2(x,\,t)\right), \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} = \boldsymbol{B}^+(x,\,t)\left(\boldsymbol{\Upsilon}_{n-2} - \boldsymbol{A}(x,\,t)\boldsymbol{\Upsilon}_{n-1}(x,\,t)\right), \\ \alpha_{n-1} = \boldsymbol{B}^+(x,\,t)\left(\boldsymbol{\Upsilon}_{n-1} - \boldsymbol{A}(x,\,t)\boldsymbol{\Upsilon}_n(x,\,t)\right), \\ \boldsymbol{B}^+(x,\,t)\boldsymbol{\Upsilon}_n(x,\,t) = 1, \end{cases} \tag{16}$$

где $\boldsymbol{\Upsilon}_i(x,\,t)$ *— максимальные решения системы нелинейных однородных уравнений*

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)\boldsymbol{A}(x,\,t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_1(x,\,t) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_1(x,\,t) - \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)\boldsymbol{A}(x,\,t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_2(x,\,t) = \mathbf{0}, \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_{n-2}(x,\,t) - \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)\boldsymbol{A}(x,\,t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_{n-1}(x,\,t) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_{n-1}(x,\,t) - \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)\boldsymbol{A}(x,\,t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_n(x,\,t) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_n(x,\,t) = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{17}$$

$\boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)$ *— максимальное решение нелинейного однородного уравнения*

$$\boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\,t)\cdot\boldsymbol{B}(x,\,t) = \mathbf{0}, \tag{18}$$

$\boldsymbol{B}^+(x,\,t)$ *— любое допустимое решение нелинейного уравнения*

$$\boldsymbol{B}^+(x,\,t)\cdot\boldsymbol{B}(x,\,t) = 1. \tag{19}$$

Другими словами, для рассматриваемой системы коэффициенты характеристического полинома определяются ленточной формулой

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_0 \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha_{n-2} \\ \hline \alpha_{n-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{B}^+ & -\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^+ & -\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^+ & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{B}^+ & -\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{A} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\Upsilon}_1 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_2 \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_3 \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_{n-1} \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}_n \end{array}\right),$$

$$\mathbf{b}^+\boldsymbol{\Upsilon}_n = 1, \tag{20}$$

где

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
-\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline
\boldsymbol{B}_L^{\perp} & -\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{0} & \boldsymbol{B}_L^{\perp} & -\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_L^{\perp} & \ddots & \vdots \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{A} \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{B}_L^{\perp}
\end{array}\right)_R^{\perp} =
$$

$$
= \left(\begin{array}{c}
\boldsymbol{\Upsilon}_1 \\ \hline
\boldsymbol{\Upsilon}_2 \\ \hline
\boldsymbol{\Upsilon}_3 \\ \hline
\boldsymbol{\Upsilon}_4 \\ \hline
\vdots \\ \hline
\boldsymbol{\Upsilon}_{n-1} \\ \hline
\boldsymbol{\Upsilon}_n
\end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n^2}, \ \ \boldsymbol{\Upsilon}_i \in \mathbb{R}^n, \quad (21)
$$

$$
\boldsymbol{B}_L^{\perp} = \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\, t), \quad \boldsymbol{B}^{+} = \boldsymbol{B}^{+}(x,\, t), \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,\, t). \quad (22)
$$

Пример. Рассмотрим задачу поиска коэффициентов характеристического полинома для нелинейной аффинной системы, представляющую собой процесс управления в продольном канале входом космического аппарата (КА) в атмосферу Земли. Упрощенные нелинейные уравнения движения в этом случае имеют вид [15, 16]:

$$
\begin{aligned}
&y'' = \frac{d^2 y}{dx} = -\sqrt{r\lambda}\frac{c_y}{c_x}\cos\gamma + \frac{e^{2x}-1}{y}, \\
&\frac{dL}{dx} = \sqrt{\frac{r}{\lambda}}\frac{1}{y},
\end{aligned}
$$

где $x = \ln\dfrac{V_{\text{кр}}}{V} = \ln\dfrac{1}{\bar{V}}$, $\bar{V} = e^{-x}$; $y = \dfrac{c_x S}{2m}\sqrt{\dfrac{r}{\lambda}}\rho$, c_x, c_y — коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, $V_{\text{кр}} \approx \sqrt{rg} = 7850$ м/с; r — радиус Земли; g — ускорение свободного падения; S и m — характеристическая площадь и масса КА; γ — угол крена; λ — логарифмический градиент плотности атмосферы; ρ — плотность атмосферы. Время полета в атмосфере определяется по выражению

$$
t = \frac{1}{\sqrt{g\lambda}}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{e^x dx}{y}.
$$

Управление траекторией полета осуществляется регулированием аэродинамических сил, действующих на КА. При изменении угла крена изменяется эффективная подъемная сила — проекция продольной силы на вертикальную плоскость [15, 16]. В матрично-векторном виде аффинная система (23) запишется так:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{y^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{a_3}{y^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} u, \tag{23}$$

где $b = \sqrt{r\lambda}$, $u = \dfrac{c_y}{c_x}\cos\gamma$, $a_3 = \sqrt{\dfrac{r}{\lambda}}$, а матрицы (3) равны

$$\boldsymbol{A}(x,\, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{y^2} & 0 & 0 \\ \dfrac{a_3}{y^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(x,\, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Матрица управляемости (12) для системы (23) имеет вид

$$C(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ -b & 0 & (b(\exp{(2x)}-1)/y^2) \\ 0 & 0 & -(a_3 b)/y^2 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Вычисление определителя (24) дает

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ -b & 0 & (b(\exp{(2x)}-1)/y^2) \\ 0 & 0 & -(a_3 b)/y^2 \end{pmatrix} = a_3 b^3/y^2 \tag{26}$$

и для него всегда выполняется условие (15). Вычислим матрицы (18) и (19). Они имеют простой вид

$$\boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{+}(x,\, t) = \begin{pmatrix} 0 & -1/b & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Уравнения (17) для данного примера запишутся так:

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\, t)\boldsymbol{A}(x,\, t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_1(x,\, t) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\, t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_1(x,\, t) - \mathbf{B}_L^{\perp}(x,\, t)\boldsymbol{A}(x,\, t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_2(x,\, t) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\, t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_2(x,\, t) - \boldsymbol{B}_L^{\perp}(x,\, t)\boldsymbol{A}(x,\, t)\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_3(x,\, t) = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{28}$$

где $\boldsymbol{\Upsilon}_3(x,\, t) = \boldsymbol{B}(x,\, t) = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}$, а их решение дает

$$\boldsymbol{\Upsilon}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_3 b/y^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Upsilon}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Подставим значения $\boldsymbol{\Upsilon}_1(x,\, t)$, $\boldsymbol{\Upsilon}_2(x,\, t)$, $\boldsymbol{\Upsilon}_3(x,\, t)$ и $\boldsymbol{B}^+(x,\, t)$ в формулы (16), получим

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_0 = -\boldsymbol{B}^+(x,\, t)\boldsymbol{A}(x,\, t)\boldsymbol{\Upsilon}_1(x,\, t),\\ \alpha_1 = \boldsymbol{B}^+(x,\, t)\left(\boldsymbol{\Upsilon}_1 - \boldsymbol{A}(x,\, t)\boldsymbol{\Upsilon}_2(x,\, t)\right)\\ \alpha_2 = \boldsymbol{B}^+(x,\, t)\left(\boldsymbol{\Upsilon}_2 - \boldsymbol{A}(x,\, t)\boldsymbol{\Upsilon}_3(x,\, t)\right),\end{array}\right. \qquad (30)$$

или в форме (20)

$$\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B}^+(x,t)\boldsymbol{A}(x,t) & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{B}^+(x,t) & -\mathbf{B}^+(x,t)\boldsymbol{A}(x,t) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^+(x,t) & -\boldsymbol{B}^+(x,t)\boldsymbol{A}(x,t)\end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_1(x,t)\\ \boldsymbol{\Upsilon}_2(x,t)\\ \boldsymbol{\Upsilon}_3(x,,t)\end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Выполняя вычисления по формуле (31), получаем

$$\alpha_0(x,\ t) = 0, \quad \alpha_1 = (\exp(2 * x) - 1)/y^2, \quad \alpha_2 = 0. \qquad (32)$$

Подставляя далее коэффициенты (32) и матрицу $\boldsymbol{A}(x,t)$ из (24) в характеристическое уравнение (7), получаем тождество

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -\dfrac{e^{2x}-1}{y^2} & 0 & 0\\ \dfrac{a_3}{y^2} & 0 & 0\end{pmatrix}^3 + \frac{e^{2x}-1}{y^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -\dfrac{e^{2x}-1}{y^2} & 0 & 0\\ \dfrac{a_3}{y^2} & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Что и требовалось показать.

Для закона управления системой (23) с матрицей коэффициентов обратной связи вида

$$u = -Kx,$$

где

$$K = \begin{pmatrix} -(p_2p_3 + p_1(p_2+p_3))/b - \dfrac{e^{2x}-1}{y^2 b} & (p_1+p_2+p_3)/b & \dfrac{p_1p_2p_3y^2}{a_3 b}\end{pmatrix}, \qquad (33)$$

а p_1, p_2, p_3 — желаемые корни характеристического полинома системы (23), имеем

$$A_{\text{зам}} = A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 & p_1+p_2+p_3 & p_1p_2p_3y^2/a_3\\ a_3/y^2 & 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Выполняя аналогичные преобразования и заменяя A на $A_{\text{зам}}$ с использованием выражений (27)–(31), получаем

$$\alpha_0(x,t) = p_1p_2p_3, \quad \alpha_1 = p_1(p_2+p_3) + p_2p_3, \quad \alpha_2 = -p_1 - p_2 - p_3. \tag{35}$$

Также подставляя далее коэффициенты (34) и матрицу $\boldsymbol{A}_{\text{зам}}(x,t)$ из (33) в характеристическое уравнение (7), получаем тождество

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 & p_1+p_2+p_3 & p_1p_2p_3y^2/a_3 \\ a_3/y^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 - (p_1+p_2+p_3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 & p_1+p_2+p_3 & p_1p_2p_3y^2/a_3 \\ a_3/y^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + (p_1(p_2+p_3)+p_2p_3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 & p_1+p_2+p_3 & p_1p_2p_3y^2/a_3 \\ a_3/y^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + p_1p_2p_3 \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Что и требовалось показать.

Заключение. Работа является продолжением ранее опубликованных авторами в статьях [14–16] материалов, касающихся ленточной теории анализа и синтеза динамических систем, и в ней получена ленточная формула решения обобщенной задачи Крылова отыскания коэффициентов характеристического полинома для нелинейной аффинной динамической системы. Приведен численный пример аналитического расчета коэффициентов характеристического полинома для нелинейной аффинной системы 3-го порядка, описывающей процесс входа космического аппарата в атмосферу Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 576 с.
2. *Kaczorek T.* Vectors and Matrices in Automation and Electrotechnics. Warsaw: Polish Scientific Publisher, 1988.
3. *Kaczorek T.* Generalization of the Cayley–Hamilton Theorem for Nonsquare Matrices // Proc. int. Conf. Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory XVIII-SPETO. P. 77–83.
4. *Victoria J.* A block-Cayley–Hamilton theorem // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum, 1982, Vol. 26. No. 1. P. 93–97.
5. *Kaczorek T.* An extension of the Cayley–Hamilton Theorem for Non-square Block Matrices and Computation of the Left and Right Inverses of Matrices // Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., 1995. Vol. 43. No. 1. P. 39–56.
6. *Chang F.R.*, *Chen C.N.* The Generalized Cayley–Hamilton Theorem for Standard Pencils // Systems and Control Lett. 1992. No. 18. P. 179–182.
7. *Lewis F.L.* Further Remarks on the Cayley–Hamilton Theorem and Fadeev’s Method for the Matrix Pencil // IEEE Trans. Automat. Control, 1986. Vol. 31. P. 869–870.

8. *Smart N.M.*, *Barnett S.* The Algebra of Matrices in n-Dimensional Systems // Math. Control Inform. 1989. Vol. 6. P. 121–133.
9. *Kaczorek T.* Generalization of the Cayley–Hamilton Theorem for n-D Polynomial Matrices // IEEE Trans. Automat. Control, 2005. Vol. 50. P. 671–674.
10. *Kaczorek T.* An Extension of the Cayley–Hamilton Theorem for Nonlinear Time-Varying System // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2006. Vol. 16. No. 1. P. 141–146.
11. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Анализ и синтез линейных динамических систем на основе ленточных формул // Вестник ИГЭУ, 2005. Вып. 5. С. 243–248.
12. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 196–240.
13. *Краснощеченко В.И.*, *Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 519 с.
14. *Подчукаев В.А.* Аналитические методы теории автоматического управления. М.: Физматлит, 2002. 256 с.
15. *Ярошевский В.А.* Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. М.: Наука, 1988. 336 с.
16. *Зубов Н.Е.*, *Микрин Е.А.*, *Рябченко В.Н.* Синтез закона управления продольным движением космического аппарата в атмосфере Земли при посадке // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 10 (22).
17. *Зубов Н.Е.*, *Микрин Е.А.*, *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* О решении линейных матричных уравнений и неравенств Ляпунова методом подпространств Крылова // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Приборостроение”. 2014. № 2. С. 103–119.
18. *Зубов Н.Е.*, *Микрин Е.А.*, *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Приборостроение”. 2014. № 3. С. 3–15.
19. *Зубов Н.Е.*, *Микрин Е.А.*, *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Приборостроение”. 2014. № 4. С. 3–18.

REFERENCES

[1] Gantmakher F.R. Teoriya matrits [Theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1988.
[2] Kaczorek T. Vectors and matrices in automation and electrotechnics. Warsaw, Polish Scientific Publisher, 1988.
[3] Kaczorek T. Generalization of the Cayley–Hamilton theorem for nonsquare matrices. *Proc. Int. Conf. “Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory XVIII-SPETO”*, 1988, pp. 77–83.
[4] Victoria J. A block-Cayley–Hamilton theorem. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum*, 1982, vol. 26, no. 1, pp. 93–97.
[5] Kaczorek T. An extension of the Cayley–Hamilton theorem for non-square block matrices and computation of the left and right inverses of matrices. *Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.*, 1995, vol. 43, no. 1, pp. 39–56.
[6] Chang F.R., Chen C.N. The generalized Cayley–Hamilton theorem for standard pencils. *Systems and Control Lett.*, 1992, no. 18, pp. 179–182.
[7] Lewis F.L. Further remarks on the Cayley–Hamilton theorem and Fadeev’s method for the matrix pencil. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1986, vol. 31, pp. 869–870.
[8] Smart N.M., Barnett S. The algebra of matrices in n-dimensional systems. *Math. Control Inform.*, 1989, vol. 6, pp. 121–133.
[9] Kaczorek T. Generalization of the Cayley–Hamilton theorem for n-d polynomial matrices. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2005, vol. 50, pp. 671–674.
[10] Kaczorek T. An extension of the Cayley–Hamilton theorem for nonlinear time-varying system. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2006, vol. 16, no. 1, pp. 141–146.

[11] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Analysis and synthesis of linear dynamical systems based on the band formulas. *Vestn. Ivanovskiy Gos Energ. Univ. (IGEU)* [Bull. of the Ivanovo State Power Eng. Uni.], 2005, iss. 5, pp. 243–248 (in Russ.).
[12] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Algebraic and matrix methods in the theory of linear MIMO-systems. *Vestn. Ivanovskiy Gos Energ. Univ. (IGEU)* [Bull. of the Ivanovo State Power Eng. Uni.], 2005, iss. 5, pp. 196–240 (in Russ.).
[13] Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. Nelineynye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza [Nonlinear systems: geometric methods for analysis and synthesis]. Moscow, MGTU im N.E. Baumana Publ., 2005. 520 p.
[14] Podchukaev V.A. Analiticheskie metody teorii avtomaticheskogo upravleniya [Analytical methods of control theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 448 p.
[15] Yaroshevskiy V.A. Vkhod v atmosferu kosmicheskikh letatel'nykh apparatov [Entrance to the atmosphere of spacecraft]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 336 p.
[16] Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. Synthesis of control law for longitudinal motion of the spacecraft in the Earth's atmosphere during landing. *Jelektr. nauchno-tehn. Izd. "Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii" MGTU im. N.E. Baumana* [El. Sc.-Techn. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation" of Bauman MSTU], 2013, no. 10 (22) (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 27.05.2014

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке НТЦ ОАО "РКК "Энергия" им. С.П. Королёва", профессор кафедры "Системы автоматического управления" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 90 научных работ в области проблем управления космических аппаратов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" имени С.П. Королёва", Российская Федерация, 141070, Московская область, г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

Zubov N.E. — Dr. Sci. (Eng.), deputy director of the Research and Development Centre of the OAO "S.P. Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya". Professor of "Automatic Control System" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 90 publications in the field of problems of spacecraft control.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

OAO "S.P. Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Микрин Евгений Анатольевич — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО "РКК "Энергия" им. С.П. Королёва", заведующий кафедрой "Системы автоматического управления" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области систем управления космических аппаратов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" имени С.П. Королёва", Российская Федерация, 141070, Московская область, г. Королёв , ул. Ленина, д. 4а.

Mikrin E.A. — Dr. Sci. (Eng.), member of the Russian Academy of Sciences, first deputy general designer of the OAO "S.P. Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya". Head of "Automatic Control System" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 150 publications in the field of spacecraft dynamical systems control.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

OAO "S.P. Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Мисриханов Мисрихан Шапиевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”. Автор более 150 научных работ в области проблем управления.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” имени С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская область, г. Королёв , ул. Ленина, д. 4а.

Misrikhanov Sh.M. — Dr. Sci. (Eng.), lead researcher of the Research and Development Centre of the OAO “S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”. Author of more than 150 publications in the field of dynamical systems control.
OAO “S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королёва”, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области проблем управления.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация,105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” имени С.П. Королёва”, Российская Федерация, 141070, Московская область, г. Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

Ryabchenko V.N. — Dr. Sci. (Eng.), lead researcher of the Research and Development Centre of the OAO “S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”. Professor of “Automatic Control System” department of Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of dynamical systems control.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.
OAO S.P. Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, ul. Lenina 4-a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.