

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ЗАМЫКАНИЯ МОД ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ, МНОГОСВЯЗНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.Н. Тимаков, К.А. Богданов, С.Е. Нефёдов

ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королёва”,
Королёв, Московская обл., Российская Федерация
e-mail: sergey.timakov@rscce.ru; kab956@mail.ru; snef90@yandex.ru

В настоящее время одной из наиболее быстро развивающихся областей прикладной теории управления является разработка аналитических и численных методов модального управления корнями многомерных динамических систем посредством замыкания многосвязными обратными связями. Интерес к проблеме модального размещения полюсов замыкаемой динамической системы и вычислению компонент матриц обратной связи, а также матриц коэффициентов обратной связи не ослабевает уже на протяжении нескольких десятилетий. Предложен метод модального управления корнями характеристического полинома многосвязной системы, основанный на принципе последовательного замыкания. Приведено детальное описание алгоритма замыкания и вычисления как матриц обратной связи, так и матриц весовых коэффициентов для задач построения управления при неполном составе измерений. Работоспособность алгоритма продемонстрирована на задаче синтеза алгоритмов управления движением космического аппарата с двойным вращением (вращающийся солнечный парус с компенсирующим гироскопом) и задаче поиска и поддержания положения равновесия МКС.

Ключевые слова: проблема размещения полюсов, многомерная многосвязная динамическая система, синтез алгоритмов управления движением космических аппаратов.

SEQUENTIAL CLOSING METHOD FOR MODES OF MOVEMENT FOR MULTIDIMENSIONAL, MULTILINKED DYNAMICAL SYSTEMS

S.N. Timakov, K.A. Bogdanov, S.E. Nefedov

ОАО “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”,
Korolev, Moscow region, Russian Federation
e-mail: sergey.timakov@rscce.ru; kab956@mail.ru; snef90@yandex.ru

Currently one of the fastest growing areas of applied control theory is the development of analytical and numerical methods of modal control by roots of multidimensional dynamical systems by means of multilinked feedbacks. Interest to the problem of modal placement poles of close loop dynamical system and to the calculation of the components of feedback matrix as well as the coefficients of feedback matrix hasn't been decreasing already for several decades. In this paper a method of modal control by roots of the characteristic polynomial of multilinked systems, based on the principle of sequential closing is proposed. Detailed description of the closing algorithm and the calculating both feedback matrices and matrices of weight coefficients for problems of control definition with incomplete composition of measurements is carried out. Efficiency of the algorithm has been demonstrated using the problem of synthesis of algorithms control of spacecraft motion with double rotation (rolling solar sail with compensating gyro) and the other problem of seeking and maintaining the equilibrium attitude position of the International Space Station.

Keywords: poles placement problem, multidimensional and multilinked dynamical system, synthesis of algorithms control of spacecraft motion.

Большой интерес в мире в последнее время приобрели методы модального синтеза многомерных многосвязных динамических систем. Практическая значимость этих методов для разработки алгоритмов управления сложными системами общеизвестна. Далеко не полный список методов модального синтеза включает следующие методы: Ackermann (Аккерманн) [1], Mayne – Murdoch (Мейн – Мардох) [2], Maki – Van de Vegte (Маки – Ван де Вейт) [3], Barnett (Барнетт) [4], Gourinshankar – Ramar (Гоуришанкар – Ремеер) [5], Moore (Мур) [6], Klein – Moore (Клейн – Мур) [7], Porter – D’Azzo (Портер – Д’Аццо) [8], Wonham (Уонем) [9], Munro (Мунро, 1979), Flamm (Флемм) [10], Varga (Варга) [11], Fahmy – O’Reilly (Феми и О’Рейли) [12], Kautsky – Nichols – Van Dooren (Каутский – Никольс – Ван Доорен) [13].

Перечисленные методы используют матричные преобразования, которые применяются к матрицам большого размера. В связи с этим с увеличением размерности динамической системы резко возрастает погрешность вычислений компонент матриц обратной связи и, как следствие, не достигается желаемое расположение корней характеристического полинома замыкаемой системы. Предлагаемый метод замыкания использует принцип последовательного замыкания системы, что позволяет применять процедуры матричных преобразований к выделяемым матричным блокам размером не более 2×2 . При таком подходе в силу ортогональности модального разложения ошибка численных преобразований матриц почти не накапливается с увеличением размера. В результате матрицы обратной связи и матрицы весовых коэффициентов достаточно точно переводят корни характеристического полинома в желаемое место в левой полуплоскости s -плоскости для непрерывных систем и во внутреннюю область единичной окружности z -плоскости для дискретных систем.

Описание метода последовательных замыканий мод движения. Описываемый метод позволяет по заданному эталонному расположению корней замкнутой системы осуществлять поиск как коэффициентов матрицы обратной связи (т.е. построение регулятора), так и поиск матрицы весовых коэффициентов (построение наблюдателя). Главная особенность метода — способность работать с системами multi-input multi-output, т.е. с системами, имеющими несколько входных (каналов управления) и выходных (измерителей) параметров. Суть данного метода заключается в последовательном замыкании мод движения динамической системы, т.е. сначала осуществляется поиск обратной связи, замыкающей первую пару корней (собственных чисел), затем поиск обратной связи, замыкающей вторую пару, и так далее, пока все моды не будут замкнуты. Наглядно это представлено на рис. 1.

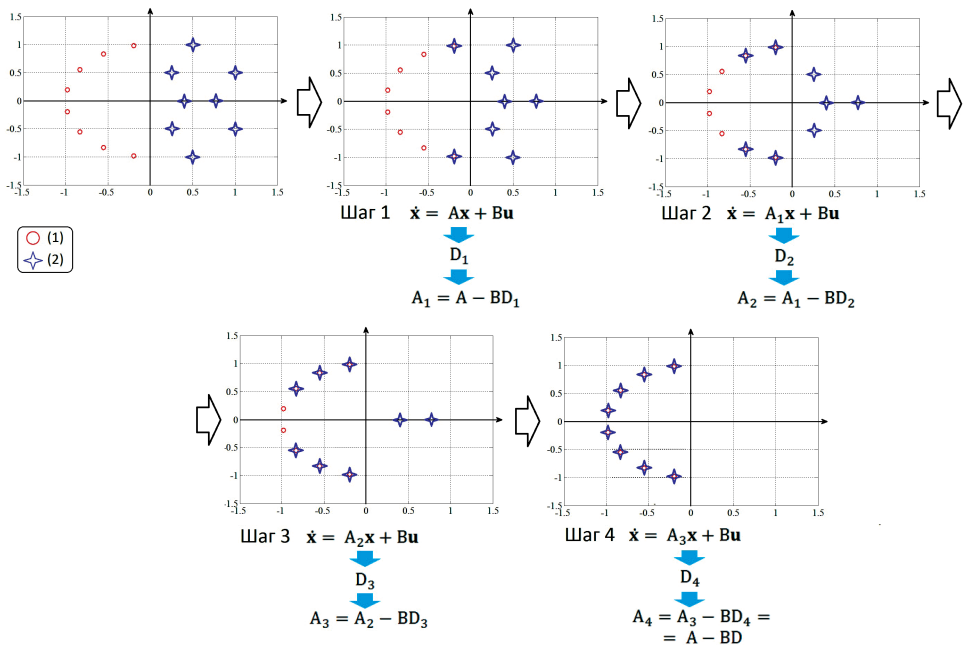


Рис. 1. Графическая иллюстрация метода последовательных замыканий:
 0 – эталонное расположение корней замкнутой системы; + – расположение корней матрицы переходных состояний на i -м шаге

Подробно опишем метод последовательного замыкания на примере построения регулятора для линейной динамической системы. Рассмотрим систему, описываемую следующим уравнением:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (1)$$

где \mathbf{x} – n -мерный вектор состояния динамической системы (1); \mathbf{u} – m -мерный вектор управления; \mathbf{A} – матрица системы размером $n \times n$; \mathbf{B} – матрица управления размером $n \times m$.

Пусть данная система является полностью управляемой по критерию Калмана, т.е. ранг матрицы управляемости будет равен размерности вектора состояния [14]:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \right) = n.$$

Зададим эталонное расположение корней характеристического полинома замкнутой системы

$$\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}. \quad (2)$$

Цель – поиск такой обратной связи $\mathbf{u} = -\mathbf{D}\mathbf{x}$, которая бы обеспечивала характеристическому полиному $|\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ замкнутой системы эталонное расположение корней (2).

Подробнее рассмотрим замыкание первой моды движения системы (1).

Этап 1. Находим преобразование подобия \mathbf{T} , отображающее матрицу \mathbf{A} в блочно-диагональную матрицу собственных чисел

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T},$$

где

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ -b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_i & b_i & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -b_i & a_i & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{j1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{j2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ -b_1 & a_1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_i & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

a b

Здесь a_i и b_i — действительная и комплексная части i -й пары собственных чисел; a_{j1} и a_{j2} — пара действительных собственных чисел (a — вещественный аналог диагональной матрицы). В случае, если матрица \mathbf{A} не является нормальной и имеет корни кратности два и более, матрица $\mathbf{\Lambda}$ (3) берется в виде вещественного аналога жордановой формы (b).

Зная эталонное расположение корней (2) составляем блочно-диагональную матрицу $\mathbf{\Lambda}^*$, аналогичную матрице $\mathbf{\Lambda}$.

$$\mathbf{\Lambda}^* = \begin{bmatrix} a_1^* & b_1^* & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ -b_1^* & a_1^* & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_i^* & b_i^* & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -b_i^* & a_i^* & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{j1}^* & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{j2}^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Этап 2. Выделяя из матрицы \mathbf{T}^{-1} две первые строки, получаем матрицу \mathbf{T}_1 . Из матриц (3) и (4) выделяем клетки размером 2×2 , содержащие соответственно первую передвигаемую и первую желаемую (эталонную) пару собственных чисел, обозначим их как $\mathbf{\Lambda}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_1^*$.

Этап 3. Вычисляем матрицу $\mathbf{B}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{B}$, где \mathbf{B} — матрица управления, затем находим ее псевдообратную матрицу Мура – Пенроуза:

$$\mathbf{B}_1^{-1} = (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1} \mathbf{B}_1^T. \quad (4)$$

Находим матрицу

$$\Delta \Lambda_1 = \Lambda_1 - \Lambda_1^*. \quad (5)$$

Этап 4. Перемножая (5), (6) и T_1 , получаем

$$D_1 = B_1^{-1} \times \Delta \Lambda_1 \times T_1. \quad (6)$$

Далее находим новую матрицу $A_1 = A - B D_1$.

Затем проделываем все упомянутые ранее действия (этапы 1–4) только уже с парой (A_1, B) , выделяя на этапе 2 уже вторую пару строк из матрицы T^{-1} и вторую пару передвигаемых и желаемых пар собственных чисел. Таким образом, находим матрицу D_2 и матрицу переходных состояний $A_2 = A_1 - B D_2$. На следующем шаге находим матрицы D_3 и A_3 на i -м шаге матриц D_i и A_i . Данный процесс заканчивается на шаге $n/2$, когда будет “передвинута” в желаемое место последняя пара собственных чисел (если n – четное), или на шаге $n/2 + 1$, когда будет “передвинуто” последнее непарное собственное число (если n – нечетное).

Суммируя матрицы обратной связи, найденные на каждом шаге, получаем искомую матрицу обратной связи

$$D = \sum_{i=1}^{n/2} D_i.$$

Задача поиска матриц весовых коэффициентов для адаптивного наблюдателя сводится к предыдущей задаче путем составления сопряженной системы. Пусть пара матриц (A, C) , где A – матрица системы, C – матрица измерений, удовлетворяет критерию полной наблюдаемости Калмана

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \right) = n.$$

Используя принцип “дальности” построения наблюдателя и регулятора [14], составим сопряженную систему

$$\dot{x}' = A^T x' + C^T u',$$

где A^T и C^T – “новые” матрицы переходных состояний и управления. В соответствии с описанным выше алгоритмом находим матрицу $W' = W^T$, где W – искомая матрица весовых коэффициентов.

Построение адаптивного наблюдателя и регулятора для космической платформы с вращающимся солнечным парусом. *Описание конструкции космической платформы с солнечным парусом.* Космическая платформа с солнечным парусом представляет собой собственно вращающийся солнечный парус в виде пленочного диска с центральной жесткой вставкой, приборный отсек и компенсирующий силовой гироскоп в подвесе Гука (внутреннем кардановом подвесе).

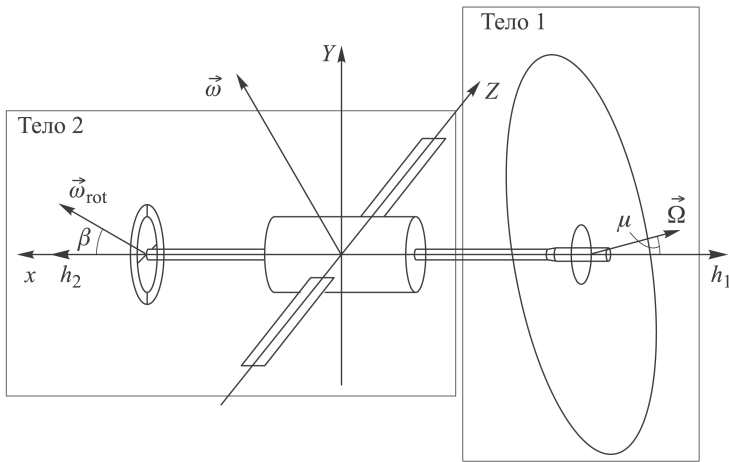


Рис. 2. Динамическая схема объекта управления

Внутренний карданов подвес обладает управляемыми и контролируемые углами поворота, что позволяет отклонять ось вращения ротора гироскопа от оси вращения центральной жесткой вставки паруса для создания управляющего гироскопического момента. Центральная вставка выполнена в виде вантовой конструкции и служит для передачи момента импульса солнечного паруса приборному отсеку [15].

Введем систему координат $OXYZ$ так, чтобы оси координат были связаны с осями чувствительности датчиковой аппаратуры (рис. 2). Ось OX направим в сторону вращения ротора силового гироскопа, ось OY будет лежать в плоскости вращения центральной вставки, а ось OZ будет дополнять систему координат до правой тройки [15].

Уравнения движения. Для описания динамики объекта управления разобьем его на два тела: первое — солнечный парус; второе — приборный отсек с силовым гироскопом в подвесе Гука (см. рис. 2).

Рассмотрим первое тело. Ранее было доказано, что 99,9% массы мембранного диска солнечного паруса совершают колебания на первых двух гироскопически связанных модах движения, поэтому динамическое поведение солнечного паруса с большой степени точности можно представить динамикой одного гироскопа в упругом подвесе [15]. Исходя из этого, кинетический момент первого тела будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{M}^T \mathbf{J}_1 (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{M}\boldsymbol{\omega}),$$

где $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu_z & \mu_y \\ \mu_z & 1 & -\mu_x \\ -\mu_y & \mu_x & 1 \end{bmatrix}$ — матрица малого поворота вектора

угловой скорости; $\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$ — приведенный момент

инерции паруса ($A = 2C$); $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{bmatrix}$ — угловая скорость КА;

$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} -\Omega + \dot{\mu}_x \\ \dot{\mu}_y \\ \dot{\mu}_z \end{bmatrix}$ — относительная угловая скорость вращения паруса [16].

Кинетический момент второго тела равен

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\mathbf{H},$$

где $\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$ — момент инерции КА (примем для упроще-

ния дальнейших выкладок, что $J_y = J_z = J$); $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 1 & -\beta_x \\ -\beta_y & \beta_x & 1 \end{bmatrix}$ —

матрица малого поворота вектора угловой скорости ротора гироско-

па; $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix}$ — кинетический момент ротора силового гироскопа

в связанной с ним системе координат (для дальнейших вычислений примем, что $H = A\Omega$ согласно закону сохранения кинетического момента) [16].

Применяя теорему об изменении кинетического момента ко всему объекту управления и отдельно к парусу и пренебрегая моментами сил солнечного давления, получаем следующую систему уравнений, описывающую динамику движения КА:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 &= \text{const}; \\ \dot{\mathbf{h}}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h}_1 &= -k^2 C \boldsymbol{\mu}, \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициент жесткости центральной жесткой вставки k считается известным и вычисляется по формуле

$$k^2 \approx \frac{(3 + \mu)^2 a^2}{2(1 + \mu) R^2} \Omega^2 \approx 0,01 \text{ с}^{-2},$$

$\mu = 0,4$ — коэффициент Пуассона; a и R — внутренний и внешний радиусы пленочного диска солнечного паруса [16].

Расписывая систему (1) покомпонентно, проведя линеаризацию с точностью до второго порядка малости, а также полагая, что вокруг оси OX система управления достаточно точно удерживает аппарат,

получаем уравнения движения КА вокруг осей OY и OZ [15]:

$$\begin{aligned}
 \Omega \dot{\mu}_z + \ddot{\mu}_y + \left(1 + \frac{J}{C}\right) \dot{\omega}_y + 2\Omega \dot{\beta}_z &= 0; \\
 -\Omega \dot{\mu}_y + \ddot{\mu}_z + \left(1 + \frac{J}{C}\right) \dot{\omega}_z - 2\Omega \dot{\beta}_y &= 0; \\
 2\Omega \dot{\mu}_z + \ddot{\mu}_y z + \dot{\omega}_y - 2\Omega \omega_z + k^2 \mu_y &= 0; \\
 -2\Omega \dot{\mu}_y + \ddot{\mu}_z z + \dot{\omega}_z + 2\Omega \omega_y + k^2 \mu_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Описание объекта в пространстве состояний. Опишем объект управления в пространстве состояний. Для этого введем восьмикомпонентный вектор состояния $\mathbf{x}_p = (\varphi_y \ \omega_y \ \varphi_z \ \omega_z \ \mu_y \ \dot{\mu}_y \ \mu_z \ \dot{\mu}_z)^T$, содержащий углы и угловые скорости вращения аппарата, а также углы и угловые скорости отклонения плоскости мембранного диска от положения равновесия. В качестве вектора управления $\mathbf{u}_p = (\dot{\beta}_y \ \dot{\beta}_z)^T$ примем угловые скорости отклонения ротора гироскопа от осей OY и OZ .

Таким образом, система (2) в пространстве состояний будет описываться следующим уравнением:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{u}_p,$$

где

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2C\Omega/J & Ck^2/J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2C\Omega/J & 0 & 0 & 0 & 0 & Ck^2/J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Omega(C+J)/J - (C+J)k^2/J & 0 & 0 & 0 & 2\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\Omega(C+J)/J & 0 & 0 & 0 & -2\Omega - (C+J)k^2/J & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

— матрица системы;

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2C\Omega/2 \\ 0 & 0 \\ 2C\Omega/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2C\Omega/2 \\ 0 & 0 \\ -2C\Omega/2 & 0 \end{bmatrix}$$

— матрица управления.

Поскольку не все параметры вектора состояния доступны прямому измерению, возникает необходимость введения адаптивного наблюдателя [17].

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_p = \mathbf{A}_p \hat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{u}_p - \mathbf{W}_p (\mathbf{y}_p - \mathbf{C}_p \hat{\mathbf{x}}_p); \quad (9)$$

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p, \quad (10)$$

где $\hat{\mathbf{x}}_p$ — вектор оцениваемых параметров; \mathbf{y}_p — вектор измерений; \mathbf{C}_p — матрица измерений;

$$\mathbf{W}_p = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} & w_{16} & w_{17} & w_{18} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & w_{25} & w_{26} & w_{27} & w_{28} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} & w_{35} & w_{36} & w_{37} & w_{38} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} & w_{45} & w_{46} & w_{47} & w_{48} \end{bmatrix}^T$$

— матрица весовых коэффициентов, обеспечивающая асимптотическую сходимость вектора оцениваемых параметров $\hat{\mathbf{x}}_p$ к вектору состояния \mathbf{x}_p .

Объект управления имеет четыре датчика для измерения компонент углового положения и угловой скорости КА относительно осей OY и OZ . Исходя из этого, матрица измерений имеет следующий вид:

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Введем обратную связь по оценке вектора состояния:

$$\mathbf{u}_p = -\mathbf{D}_p \hat{\mathbf{x}}_p, \quad (11)$$

где $\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & d_{17} & d_{18} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & d_{27} & d_{28} \end{bmatrix}$ — матрица обратной связи, обеспечивающая асимптотическую устойчивость параметров объекта управления.

Введем вектор невязок $\tilde{\mathbf{x}}_p = \mathbf{x}_p - \hat{\mathbf{x}}_p$ как разность вектора состояния и вектора оценок.

Объединяя (3)–(6), выражая все через \mathbf{x}_p и $\tilde{\mathbf{x}}_p$, получаем следующую систему уравнений, описывающих объект управления с учетом введения обратной связи и адаптивного наблюдателя:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{D}_p) \mathbf{x}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{D}_p \tilde{\mathbf{x}}_p; \quad (12)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_p = (\mathbf{A}_p - \mathbf{C}_p \mathbf{W}_p) \tilde{\mathbf{x}}_p.$$

Объединим восьмикомпонентный вектор невязок и восьмикомпонентный вектор состояния в один новый 16-компонентный вектор состояния $\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \tilde{\mathbf{x}}_p \end{bmatrix}$. Тогда систему (6) можно записать в виде следующего однородного матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{D}_p & \mathbf{B}_p \mathbf{D}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_p - \mathbf{W}_p \mathbf{C}_p \end{bmatrix} \mathbf{x}_e. \quad (13)$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости системы (7) необходимо, чтобы все собственные числа матрицы

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{D}_p & \mathbf{B}_p \mathbf{D}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_p - \mathbf{W}_p \mathbf{C}_p \end{bmatrix}$$

лежали в левой полуплоскости (система описана в континуальном пространстве). Характеристический полином системы (14) выглядит следующим образом:

$$|\mathbf{I}s - (\mathbf{A}_p - \mathbf{B}_p \mathbf{D}_p)| \cdot |\mathbf{I}s - (\mathbf{A}_p - \mathbf{C}_p \mathbf{W}_p)|, \quad (14)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размером 8×8 .

Из характеристического полинома (8) следует, что расположение корней адаптивного наблюдателя не зависит от расположения корней замкнутой системы, в состав которой он включен. Поэтому можно отдельно выполнить построение как адаптивного наблюдателя (поиск матрицы весовых коэффициентов \mathbf{W}_p), так и регулятора (поиск числовых значений матрицы обратной связи \mathbf{D}_p) [14].

Поиск матрицы весовых коэффициентов, матрицы обратной связи. Результаты математического моделирования. В качестве эталонного полинома для построения наблюдателя и регулятора возьмем полиномы Баттерворта 8-го порядка [18] с частотой среза ω_c , равной 1,5 и 0,5 рад/с соответственно (рис. 3).

$$s^8 + 5,1\omega_c s^7 + 13,1\omega_c^2 s^6 + 21,8\omega_c^3 s^5 + \\ + 25,7\omega_c^4 s^4 + 21,8\omega_c^5 s^3 + 13,1\omega_c^6 s^2 + 5,1\omega_c^7 s + \omega_c^8.$$

Для поиска матрицы обратной связи \mathbf{D}_p и матрицы весовых коэффициентов \mathbf{W}_p используется метод последовательных замыканий мод движения. В результате получаем следующие числовые значения коэффициентов матриц \mathbf{D}_p и \mathbf{W}_p :

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} 0,0096 & 0,9140 & 0,3071 & -0,9344 & 0,0228 & -0,0838 & 0,3134 & -0,9597 \\ -0,0219 & 0,3291 & 0,1050 & 0,4615 & -0,0234 & 0,3410 & 0,1097 & -0,5432 \end{bmatrix};$$

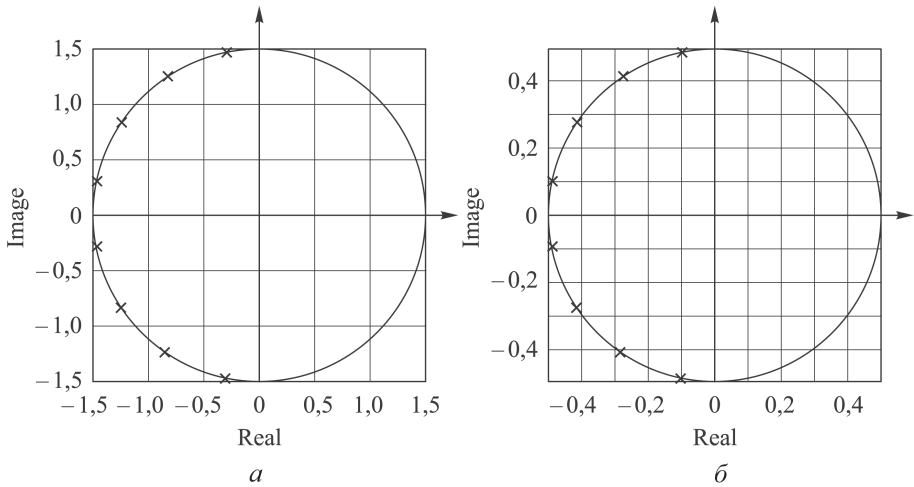


Рис. 3. Расположение корней эталонного полинома Баттерворта на комплексной плоскости для построения адаптивного наблюдателя (а) и регулятора (б)

$$W_p = \begin{bmatrix} 0,7508 & 0,9949 & -0,0664 & -0,0021 \\ -0,6899 & 0,5012 & -0,1119 & -68,1355 \\ 0,1131 & 0,0019 & 0,7876 & 0,9940 \\ 0,0485 & 68,1753 & -0,6704 & 0,5233 \\ -16,4562 & -1,3974 & -15,2103 & 0,5080 \\ 17,9184 & -0,9926 & 27,1065 & -67,7065 \\ 16,9256 & -0,4940 & -15,8974 & -1,3921 \\ 26,7090 & -67,7344 & 18,2892 & -1,0343 \end{bmatrix}.$$

Подставляя полученные числовые значения матриц в математическую модель объекта управления, проведя математическое моделирование режима активного демпфирования колебаний пленочного диска солнечного паруса, получаем следующие зависимости основных параметров вектора состояния (рис. 4–6).

Выведение и удержание МКС в положении динамического равновесия. Описание системы координат. Уравнения движения. В качестве системы координат используется система LVLH (Local Vertical – Local Horizontal). В данной системе началом координат является центр масс объекта управления, ось OX направлена вдоль вектора орбитальной скорости, ось OZ против радиуса-вектора из центра Земли в центр масс объекта управления, ось OY дополняет систему координат до правой тройки (рис. 7). В качестве связанной системы координат будем использовать систему ISS, оси которой совпадают с основными осями инерции объекта.

Динамика объекта управления, в данном случае МКС, описывается следующими уравнениями.

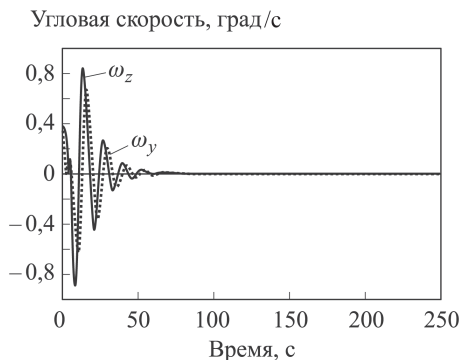
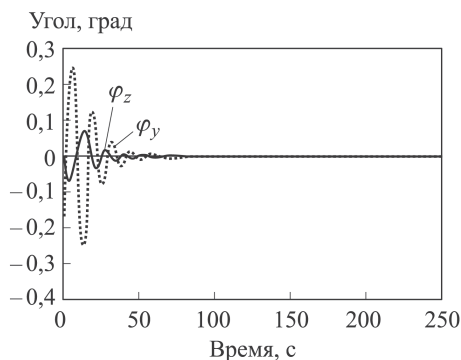


Рис. 4. Компоненты углового положения и угловой скорости КА вокруг осей OY и OZ

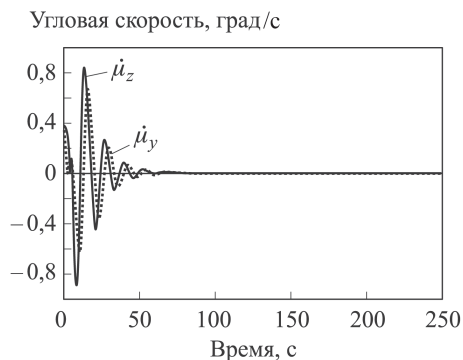
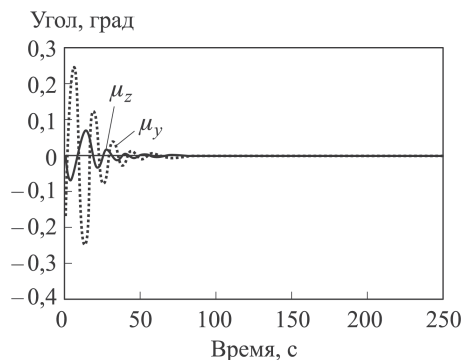


Рис. 5. Угловые отклонение и скорость плоскости вращения солнечного паруса относительно осей OY и OZ

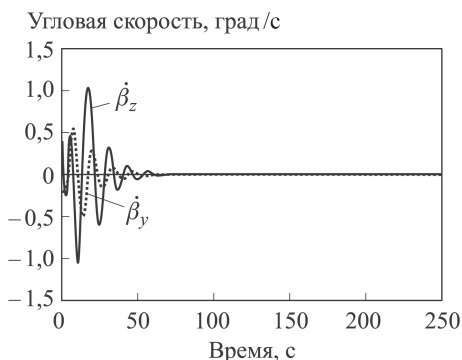


Рис. 6. Скорость прецессии ротора силового гироскопа относительно осей OY и OZ

1. Динамическим уравнением углового движения КА при воздействии гравитационного момента:

$$J\dot{\omega}_{abs} + \omega_{abs} \times J\omega_{abs} + \dot{\mathbf{h}} + \omega_{abs} \times \mathbf{h} = 3\frac{\mu}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r} \times J\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (15)$$

где J — тензор инерции объекта управления; \mathbf{h} — вектор суммарного кинетического момента маховиков; $3\frac{\mu}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r} \times J\frac{\mathbf{r}}{r}$ — гравитационный момент; $\frac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор местной вертикали [17].

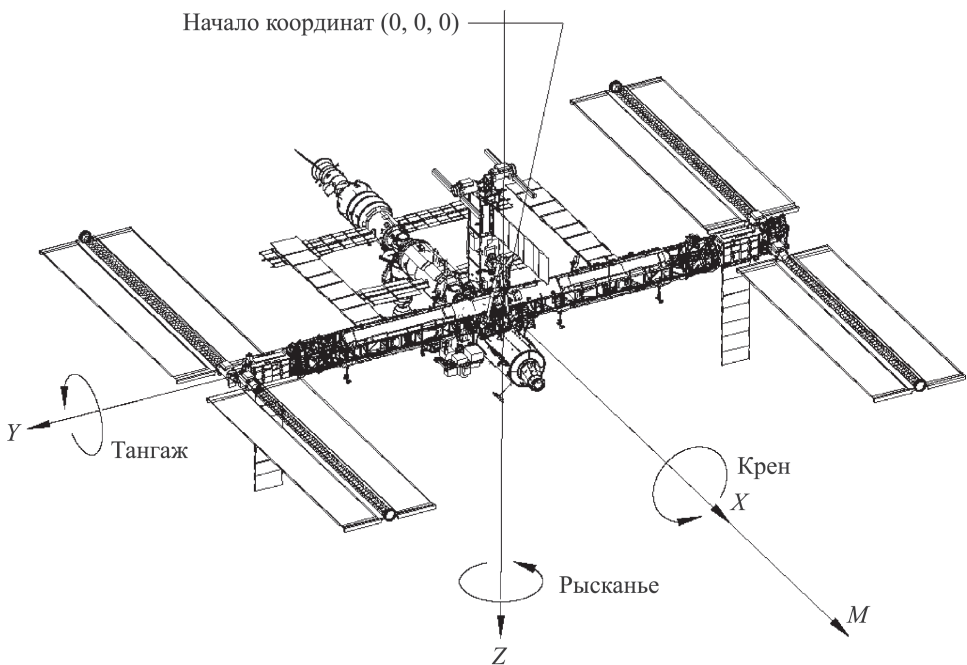


Рис. 7. Система координат LVLH

2. Кинематическими соотношениями в кватернионном виде:

$$2\dot{\mathbf{N}}_i^e = \mathbf{N}_i^e \circ (\boldsymbol{\omega}_{abs})_e - (\boldsymbol{\omega}_0)_i \circ \mathbf{N}_i^e, \quad (16)$$

где \mathbf{N}_i^e — кватернион разворота из базиса \mathbf{i} в базис \mathbf{e} (\mathbf{i} — орбитальный базис, \mathbf{e} — связанная система координат, оси которой расположены вдоль главных осей инерции КА), $(\boldsymbol{\omega}_{abs})_e = [0 \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ — вектор абсолютной угловой скорости в проекциях на связанный базис, $(\boldsymbol{\omega}_0)_i = [0 \ 0 \ 0 \ \omega_0]^T$ — вектор угловой скорости приборного базиса в проекциях на орбитальную систему координат [19].

Прозируя (1) и (2) на связанный базис, применяя теорему об изменении кинетического момента отдельно к корпусу МКС и отдельно к маховикам, получаем систему из шести уравнений, описывающих динамику объекта управления [20]:

$$\begin{aligned} J_x \ddot{\gamma} &= 4\omega_0^2 (J_z - J_y) \gamma + \omega_0 (J_x - J_y + J_z) \dot{\psi} - u_x; \\ J_z \ddot{\psi} &= \omega_0^2 (J_x - J_y) \psi - \omega_0 (J_x - J_y + J_z) \dot{\gamma} - u_z; \\ J_y \ddot{\varphi} &= 3\omega_0^2 (J_z - J_x) \varphi - u_y; \\ \dot{h}_x &= h_z \omega_0 + u_x; \\ \dot{h}_z &= -h_x \omega_0 + u_z; \\ \dot{h}_y &= u_y, \end{aligned}$$

где γ, ψ, φ — соответственно углы разворота по каналам крена, рысканья и тангажа; J_x, J_y, J_z — моменты инерции МКС относительно

главных осей инерции; ω_0 — абсолютная угловая скорость МКС; h_x , h_y , h_z — компоненты вектора суммарного кинетического момента маховиков.

Описание объекта управления в пространстве состояний. Поскольку каналы крена и рысканья имеют гироскопическую связь, будем отдельно рассматривать динамику объекта управления по каналам крена и рысканья и отдельно по каналу тангажа.

Вектор состояния и вектор управления для каналов крена и рысканья и отдельно для канала тангажа соответственно будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{x}_{\gamma\psi} = \left[\gamma \quad \dot{\gamma} \quad h_x \int h_x dt \quad \psi \quad \dot{\psi} \quad h_z \int h_z dt \quad q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2 \quad q_3 \quad \dot{q}_3 \right]^T;$$

$$\mathbf{u}_{\gamma\psi} = [u_x \quad u_z]^T;$$

$$\mathbf{x}_\varphi = \left[\varphi \quad \dot{\varphi} \quad h_y \int h_y dt \quad q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2 \quad q_3 \quad \dot{q}_3 \right]^T;$$

$$\mathbf{u}_\varphi = [u_y];$$

где $[u_x \quad u_y \quad u_z]^T$ — момент реакции в подшипниках маховиков, через который осуществляется управляющее воздействие на корпус КА; q_1, q_2, q_3 — компоненты, отвечающие за аэродинамический момент, в данном случае это три главных тона разложения функции плотности атмосферы по витку.

Таким образом, в пространстве состояний объект управления будет описываться следующими уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\gamma\psi} = \mathbf{A}_{\gamma\psi} \mathbf{x}_{\gamma\psi} + \mathbf{B}_{\gamma\psi} \mathbf{u}_{\gamma\psi};$$

$$\dot{\mathbf{x}}_\varphi = \mathbf{A}_\varphi \mathbf{x}_\varphi + \mathbf{B}_\varphi \mathbf{u}_\varphi,$$

где матрицы системы и матрицы управления для системы крен-рысканье и для системы тангажа выглядят соответственно следующим образом:

$$\mathbf{A}_{\gamma\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_x & 0 & 0 & 0 & 0 & H_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_z & 0 & 0 & G_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{\gamma\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/J_x & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/J_z \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_y \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь для упрощения записей введены следующие обозначения: $G_x = 4\omega_0^2 (J_z - J_y) / J_x$, $H_x = \omega_0 (J_x - J_y + J_z) / J_x$, $G_z = \omega_0^2 (J_x - J_y) / J_z$, $H_z = \omega_0 (J_x - J_y + J_z) / J_z$, $M_y = 3\omega_0^2 (J_z - J_x) / J_y$.

Поиск матриц обратной связи. Для придания асимптотической устойчивости объекту управления введем обратную связь:

$$\mathbf{u}_{\gamma\psi} = -\mathbf{D}_{\gamma\psi} \mathbf{x}_{\gamma\psi};$$

$$\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{D}_\varphi \mathbf{x}_\varphi$$

для систем крен–рысканье и тангажа соответственно. В результате уравнения, описывающие КА в пространстве состояний, приобретут следующий вид:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\gamma\psi} = (\mathbf{A}_{\gamma\psi} - \mathbf{B}_{\gamma\psi} \mathbf{D}_{\gamma\psi}) \mathbf{x}_{\gamma\psi};$$

$$\dot{\mathbf{x}}_\varphi = (\mathbf{A}_\varphi - \mathbf{B}_\varphi \mathbf{D}_\varphi) \mathbf{x}_\varphi.$$

В качестве эталонного характеристического полинома для матрицы $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D})$ возьмем полином Баттерворта с частотой среза $2\omega_0$ [18]. Очевидно, что для системы крен–рысканье полином Баттерворта будет иметь 14 порядок, для системы тангажа — 10 порядок (рис. 8).

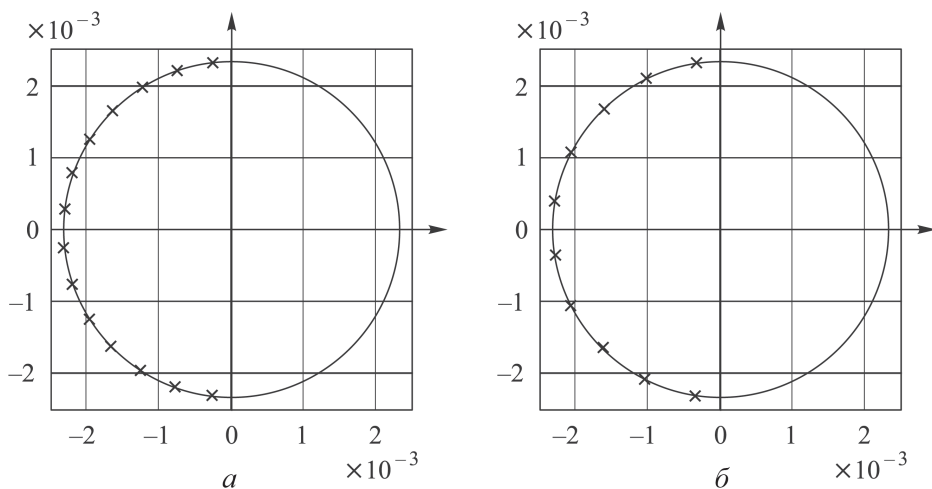


Рис. 8. Расположение корней эталонного полинома Баттерворта для системы крен–рысканье (а) и для системы тангажа (б)

Используя метод последовательного замыкания, получаем следующие числовые значения для матриц обратной связи

$$D_{\gamma\psi} = \begin{bmatrix} -9,2642e + 03 & 5,7158e + 03 \\ 2,2672e + 06 & -5,8619e + 06 \\ 2,7193e - 02 & -4,1871e - 02 \\ 4,6806e - 06 & 3,1351e - 05 \\ 2,9367e + 03 & -2,8407e + 03 \\ -1,1700e + 07 & 1,0268e + 07 \\ -6,6631e - 02 & 6,4046e - 02 \\ -3,0921e - 05 & 1,5060e - 05 \\ 3,5352e - 04 & 8,9431e - 03 \\ 1,8997e + 01 & -8,8208e + 00 \\ -3,4739e - 04 & -1,9733e - 04 \\ 7,9223e - 02 & -1,2335e - 01 \\ -6,6505e - 03 & 3,2664e - 03 \\ -5,2919e - 01 & -1,7878e + 00 \end{bmatrix}^T ; D_{\varphi} = \begin{bmatrix} -9,3782e + 03 \\ 5,1506e + 06 \\ -4,6465e - 02 \\ -1,6915e - 05 \\ -6,4861e - 03 \\ -8,8120e - 01 \\ -2,1849e - 17 \\ -1,5962e + 00 \\ 4,5627e - 03 \\ -7,1139e + 00 \end{bmatrix}^T .$$

Результаты математического моделирования. Для математического моделирования поиска равновесной ориентации МКС в режиме разгрузки кинетического момента инерционных исполнительных органов (ИИО) с учетом аэродинамического момента понадобится знать значения следующих параметров:

– тензор инерции МКС

$$J = \begin{bmatrix} 129,978287 & 3,294386 & 5,279790 \\ 3,294386 & 83,966791 & 0,990955 \\ 5,279790 & 0,990955 & 193,699689 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

– модуль угловой скорости МКС $\omega_0 = 0,0667^\circ/\text{с}$;

– модуль скорости движения $V = 8 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.

Координаты центра масс МКС в системе координат ISS — $CM_x = -4,30 \text{ м}$, $CM_y = -0,54 \text{ м}$, $CM_z = 3,92 \text{ м}$; коэффициент диффузии $c = 0,35$; средняя плотность атмосферы $\rho = 6 \cdot 10^{-13} \text{ кг/м}^3$.

С учетом всех упомянутых параметров, а также найденных матриц обратных связей, определяющих закон управления КА, получаем следующие зависимости углового положения МКС, ее угловой скорости и кинетического момента (рис. 9–11).

Заключение. Описан модифицированный метод модального управления корнями характеристического полинома многомерной много-связной динамической системы. Точность метода проиллюстрирована двумя примерами: на задаче синтеза закона управления для КА с двойным вращением, представляющего собой вращающийся солнечный парус с компенсирующим гироскопом в подвесе Гука, и на алгоритме

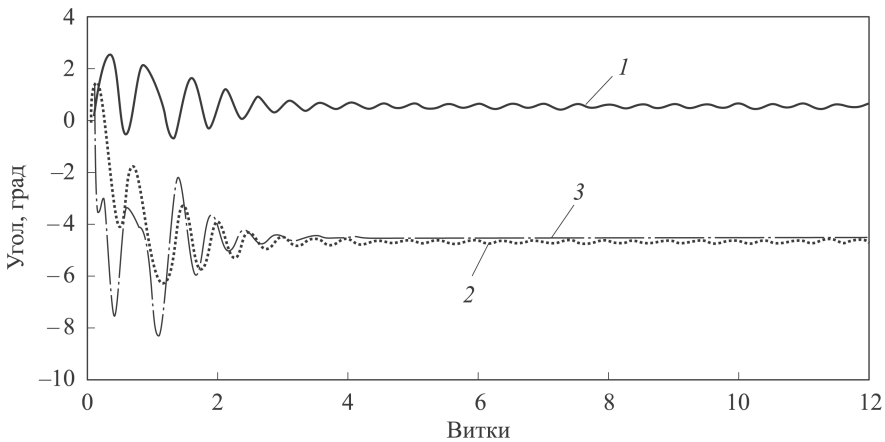


Рис. 9. Угловое положение МКС по каналам крена (1), рысканья (2) и тангажа (3)

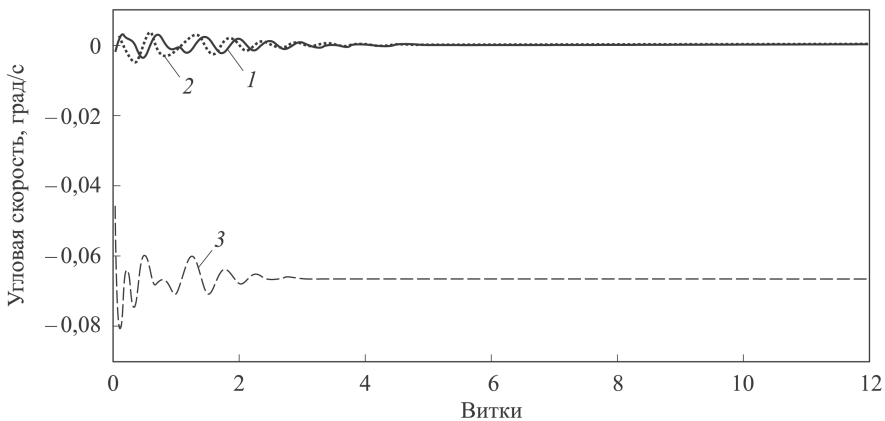


Рис. 10. Угловая скорость МКС по каналам крена (1), рысканья (2) и тангажа (3)

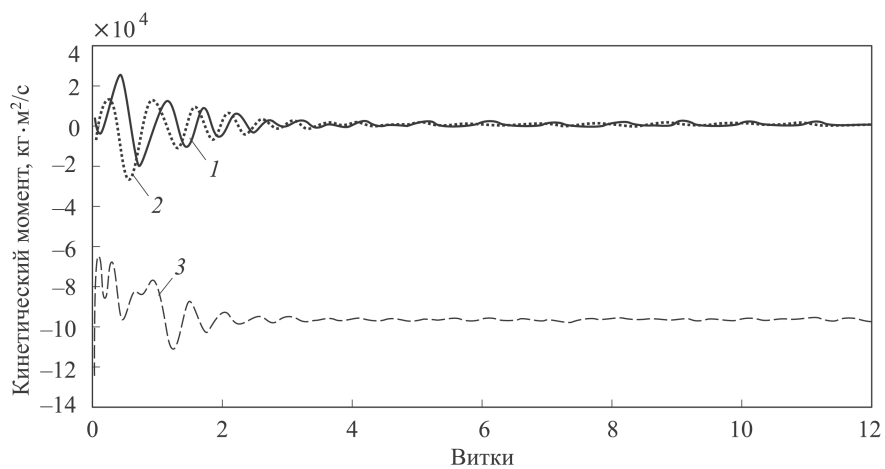


Рис. 11. Кинетический момент по каналам крена (1), рысканья (2) и тангажа (3)

управления МКС в режиме Momentum Management. Необходимо отметить, что процедура *place*, основанная на широко известном методе [13] и реализованная в среде MATLAB, со второй тестовой задачей не справляется из-за накопленных ошибок в процессе преобразований матриц большой размерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (12-08-00254-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ackermann J.* Der entwurf linearer regelungssysteme im zustandsraum // Regelungstechnik und Prozessdatenverarbeitung. 1992. Vol. 7. P. 297–300.
2. *Mayne D.Q., Murdoch P.* Modal control of linear time invariant systems // Int. J. Control. 1970. Vol. 11. No. 2. P. 223–227.
3. *Maki M.C., Van de Vegte J.* Optimization of multiple-input systems with assigned poles // I.E.E.E. Trans. autom. Control. 1974. Vol. 19. No. 2. P. 130–133.
4. *Barnett S.* Introduction to mathematical control theory (Oxford University Press). 1975. 264 p.
5. *Gourishankar V., Ramar K.* Pole assignment with minimum eigenvalue sensitivity to plant parameter variations // Int. J. Control. 1976. Vol. 23. No. 4. P. 493–504.
6. *Moore B.C.* On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment // I.E.E.E. Trans. autom. Control. 1978. Vol. 21. No. 5. P. 689–692.
7. *Klein G., Moore B.C.* Eigenvalue-generalized eigenvector assignment with state feedback // I.E.E.E. Trans. autom. Control. 1977. Vol. 22. No. 1. P. 140–141.
8. *Porter B., D’Azzo J.J.* Closed-loop eigenstructure assignment by state feedback in multivariable linear systems // Int. J. Control. 1978. Vol. 27. No. 6. P. 487–492.
9. *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, 2nd ed. N.Y.: Springer, 1979. 322 p.
10. *Flamm D.S.* A new proof of Rosenbrock’s theorem on pole assignment // I.E.E.E. Trans. autom. Control. 1980. Vol. 25. No. 6. P. 1128–1133.
11. *Varga A.A.* Schur method for pole assignment // I.E.E.E. Trans. autom. Control. 1981. Vol. 26. No. 2. P. 517–519.
12. *Fahmy M.M., O’Reilly J.* On eigenstructure assignment in linear multivariable systems // I.E.E.E. Trans. autom. Control. 1982. Vol. 27. No. 690.
13. *Kautsky J., Nichols N.K., Van Dooren P.* Robust pole assignment in linear state feedback, Internat. J. Control, 1985. Vol. 41. No. 5. P. 1129–1155.
14. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 p.
15. *Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Черемных Е.А.* Собственные колебания вращающейся мембраны с центральной жесткой вставкой (применение функций Хойна) // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 224–238.
16. *Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Зыков А.В.* Исследование динамики управляемого углового движения космического аппарата с вращающимся солнечным парусом // Труды МФТИ. 2013. Т. 5, № 2. С. 106–119.
17. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
18. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.
19. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

20. Тимаков Н.С. Исследование управляемого углового движения космического аппарата на высокоэллиптической орбите // Навигация и управление движением. Матер. IX Конф. молодых ученых. СПб. 2007. С. 330–336.

REFERENCES

- [1] Ackermann J. Der entwurf linearer regelungssysteme im zustandsraum. *Regelungstechnik und Prozessdatenverarbeitung*, 1972, vol. 7, pp. 297–300.
- [2] Mayne D.Q., Murdoch P. Modal control of linear time invariant systems. *Int. J. Control*, 1970, vol. 11, no. 2, pp. 223–227.
- [3] Maki M.C., Van de Vegte J. Optimization of multiple-input systems with assigned poles. *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 1974, vol. 19, no. 2, pp. 130–133.
- [4] Barnett S. Introduction to Mathematical Control Theory. Oxford University Press, 1975, 264 p.
- [5] Gourishankar V., Ramar K. Pole assignment with minimum eigenvalue sensitivity to plant parameter variations. *Int. J. Control*, 1976, vol. 23, no. 4, pp. 493–504.
- [6] Moore B.C. On the flexibility offered by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment. *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 1976, vol. 21, no. 5, pp. 689–692.
- [7] Klein G., Moore B.C. Eigenvalue-generalized eigenvector assignment with state feedback. *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 1977, vol. 22, no. 1, pp. 140–141.
- [8] Porter B., D’Azzo J.J. Closed-loop eigenstructure assignment by state feedback in multivariable linear systems. *Int. J. Control*, 1978, vol. 27, no. 6, pp. 487–492.
- [9] Wonham W.M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. 2nd ed. New York, Springer, 1979. 322 p.
- [10] Flamm D.S. A new proof of Rosenbrock’s theorem on pole assignment // *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 1980, vol. 25, p. 1128–1133.
- [11] Varga A. A Schur method for pole assignment. *I.E.E.E. Trans. autom. Control*, 1981, vol. 26, no. 2, pp. 517–519.
- [12] Fahmy M.M., O’Reilly J. On eigenstructure assignment in linear multivariable systems. *I.E.E.E. Trans. Autom. Control*, 1982, vol. 27. no. 3, pp. 690–693.
- [13] Kautsky J., Nichols N. K., Van Dooren P. Robust pole assignment in linear state feedback. *Int. J. Control*, 1985, vol. 41, no. 5, pp. 1129–1155.
- [14] Kvakernaak Kh., Sivan R. Linear optimal control systems. Wiley-Interscience, New-York, 1972. (Russ. ed.: Kvakernaak Kh., Sivan R. Lineynye optimal’nye sistemy upravleniya. Moscow, Mir Publ., 1977. 650 p.)
- [15] Legostaev V.P., Subbotin A.V., Timakov S.N., Cheremnykh E.A. Natural oscillations of a rotating membrane with a central rigid insert (use of Heun function) *Prikladnaja matematika i mehanika* [J. Appl. Math. Mech.], 2001, vol. 75, iss. 2, pp. 224–238 (in Russ.).
- [16] Legostaev V.P., Subbotin A.V., Timakov S.N., Zykov A.V. Study of the dynamics of controlled angular motion of spacecraft with rotating solar sail. *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhn. inst. MIPT (SU)* [Proc. of the Moscow Inst. Ph. Techn. (State University)], 2013, no. 2, pp. 106–119 (in Russ.).
- [17] Beletskiy V.V. Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel’no tsentra mass. [Motion of satellite vehicle with respect to the center of mass]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 416 p.
- [18] Kuzovkov N.T. Modal’noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva. [Modal control and monitoring devices] Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 184 p.
- [19] Branets V.N., Shmyglevskiy I.P. Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela. [Applying of quaternions in problems of orientation of solid]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 320 p.

- [20] Timakov N.S. Study of controlled angular motion of spacecraft on highly elliptical orbit. *Tr. IX Konf. molodykh uchenykh "Navigatsiya i upravlenie dvizheniem"*. [Proc. IX Conf. of young scientists "Navigation and motion control"], St. Petersburg, 2007, pp. 330–336 (in Russ).

Статья поступила в редакцию 21.02.2014

Сергей Николаевич Тимаков — канд. техн. наук, доцент МФТИ, ведущий научный сотрудник ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва". Автор более 25 научных работ в области систем управления.

ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва", Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

S.N. Timakov — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of the Moscow Institute for Physics and Technology, leading researcher of the OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya". Author of more than 25 publications in the field of control systems.

OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Кирилл Андреевич Богданов — инженер ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва". Специализируется в области систем управления.

ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва", Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

K.A. Bogdanov — engineer of the OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya". Specializes in the field of control systems.

OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.

Сергей Евгеньевич Нефёдов — инженер ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва". Специализируется в области систем управления.

ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королёва", Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4а.

S.E. Nefedov — engineer of the OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya". Specializes in the field of control systems.

OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141070 Russian Federation.