

УДК 517.977:519.876.2

СУБОПТИМАЛЬНОЕ РАВНОВЕСНОЕ ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГООБЪЕКТНОЙ СИСТЕМОЙ НА ОСНОВЕ МНОГОПРОГРАММНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Е.М. Воронов, А.А. Карпунин, С.В. Фролов, Чжан Сяньцзянь

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

e-mail: emvoronov@mail.ru; ksans@yandex.ru; frs2000@bk.ru

В рамках трех классов прикладных задач в условиях исходной структурной несогласованности, конфликтного взаимодействия и неопределенности в теории оптимального управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных компромиссов поставлена и решена задача многокритериального синтеза позиционного управления динамикой конфликта многообъектных систем в форме билинейной модели динамики средних. Решение данной задачи базируется на результатах многокритериального синтеза позиционного управления на основе методов многопрограммной стабилизации и синергетических подходов.

Ключевые слова: многокритериальный синтез, позиционное управление, многопрограммная стабилизация, динамика конфликта, билинейная модель, равновесие, динамическая самоорганизация.

SUBOPTIMAL EQUILIBRIUM POSITIONAL CONTROL OF MULTIPLE-OBJECT SYSTEM BASED ON MULTIPROGRAM STABILIZATION

Е.М. Voronov, А.А. Karpunin, S.V. Frolov, Zhang Xianjian

Bauman Moscow State Technical University, Moscow

e-mail: emvoronov@mail.ru; ksans@yandex.ru; frs2000@bk.ru

Within three classes of applied problems under conditions of initial structural non-coordination of the conflict interaction and uncertainty in the theory of optimal control of multiple-object multicriterion systems based on the stably effective trade-offs, a problem is stated and solved regarding the multicriterion synthesis of positional control of dynamics of conflict of multiple object systems in the form of bilinear model of dynamics of averages. Solving of this problem is relied on the results of multicriterion synthesis of positional control based on the multiprogram stabilization methods and the synergetic approaches.

Keywords: multicriterion synthesis, positional control, multiprogram stabilization, conflict dynamics, bilinear model, synergistic approaches.

Как известно [1], в классе задач конфликтного взаимодействия структурно и функционально сложных систем управления соединениями (многообъектными комплексами) летательных аппаратов (СУСЛА) выделяется набор задач, которые составляют поуровневые фрагменты трехуровневой системы. В рамках совместного или независимого исследования это задачи конфликтного взаимодействия группировок на основе моделей исследования операций и принятия решений [1, гл. 10]; задачи конфликтного взаимодействия малых групп

ЛА с нераздельной комбинацией моделей принятия тактических решений и траекторной динамики группы ЛА [1, гл. 10]; динамические задачи антагонистического противодействия — противоборства в дуэльной ситуации, в ситуации конфликтного сближения-уклонения, преследования и другие задачи (обзор по “антагонизму”, некоторые модели и результаты даны, например, в работе [1, гл. 7, 8, 10]).

Настоящая статья открывает серию публикаций по применению разработанного метода многокритериального синтеза позиционного управления [2, 3] на основе многопрограммной стабилизации [4–6] и синергетических подходов [7] в практически полезном классе задач управления данной иерархической трехуровневой системой в целом и ее поуровневыми фрагментами, имеющими смысл многообъектных многокритериальных систем (ММС).

1. Типичной практически значимой структурой задачи конфликтного взаимодействия группировок на верхнем уровне СУСЛА является задача распределения ресурсов противников (целераспределение — ЦР) с учетом текущих конфигураций систем (КС) и конфликтно-оптимального прогноза динамики конфликта (ПДК), которая в целом может быть задана аббревиатурой: КС-ПДК-ЦР [1]. Подобным образом могут быть сформированы структуры задач конфликтного позалпового взаимодействия авиационно-ракетной локальной (тактической) системы воздушного базирования (ЛС ВБ) и морской, сухопутной или симметричной воздушной локальной системы ПВО (ЛС ПВО).

В настоящей статье рассматривается этап КС-ПДК последовательного варианта алгоритма решения задачи КС-ПДК-ЦР [1], на котором формируются как функции состояния конфликтно-оптимальные доли множества активных средств каждой из конфликтующих систем для поражения активных и пассивных подгрупп объектов противника. Полученные позиционные функции затем используются в задачах ЦР конфликтующих ЛС ВБ и ЛС ПВО [1], структурированных на основе КС-ПДК.

Структура конфликтной ситуации для модели КС-ПДК с одним вариантом множества активных объектов (АО) и пассивных объектов (ПО) для каждой ЛС без ограничения общности анализа дана на рис. 1.

На рис. 1 $\nu_{ij}(\mathbf{x}, t)$ — доли множества АО- i системы i ($i = 1, 2$), как функции текущей численности x объектов системы, где $\mathbf{x} = (x_{в1}, x_{в2}, x_{п1}, x_{п2})$, выделенные для поражения АО ($j = 1$) или ПО ($j = 2$) противника в текущий момент времени залпового обмена. В частном случае, доли ν_{ij} зависят от текущей численности активных средств противника, т.е. $\nu_{ij} = \nu_{ij}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x} = \mathbf{x}_п$ ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_в$), $i = 1$ ($i = 2$).

2. Математическая модель ПДК базируется на уравнениях динамики средних [1, 8], которые, в свою очередь, есть следствие марков-

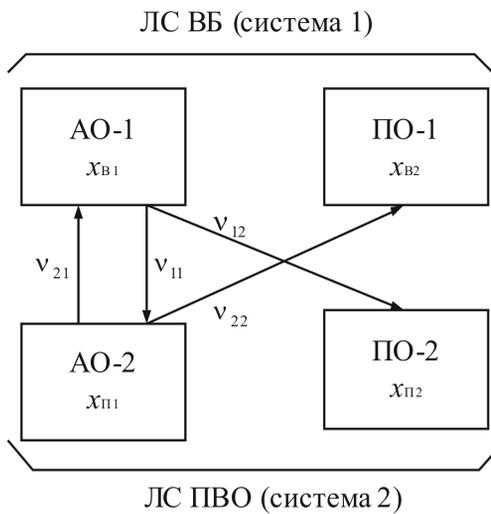


Рис. 1. Структура конфликтной ситуации

ского процесса перехода из одного состояния в другое (“не поражен” – “поражен”) единичного объекта под влиянием потока случайных событий с пуассоновским законом распределения. Характеристикой состояния систем ЛС ВБ, ЛС ПВО становится средняя численность $x_{в1}(t)$, $x_{в2}(t)$ и $x_{п1}(t)$, $x_{п2}(t)$ соответственно объектов, находящихся в состоянии “не поражен” (так как число пораженных объектов – это разность $x_{в1}(t_0) - x_{в1}(t), \dots, x_{п2}(t_0) - x_{п2}(t)$) с дисперсией [8]

$$\sigma_{\alpha}^2(t) = x_{\alpha}(t) (1 - x_{\alpha}(t)/x_{\alpha}(t_0)), \quad \alpha = в1, в2, п1, п2; \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

где t – момент времени (мгновенный такт) непрерывного залпового обмена подгрупп АО-1, АО-2 противодействующих сторон. При этом, как известно, истинные текущие численности $x_{\alpha}^H(t)$ принадлежат доверительным интервалам:

$$x_{\alpha} - 3\sigma_{\alpha} \leq x_{\alpha}^H \leq x_{\alpha} + 3\sigma_{\alpha}.$$

Непрерывному варианту конфликта со структурной схемой, приведенной на рис. 1, соответствует система уравнений динамики конфликта следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{в1}(t) &= -P_{п1}^{в1} a_{п1} \nu_{21} x_{п1}(t) - \nu_{в1}^0 x_{в1}(t); \\ \dot{x}_{в2}(t) &= -P_{п2}^{в2} a_{п2} \nu_{22} x_{п2}(t) - \nu_{в2}^0 x_{в2}(t); \\ \dot{x}_{п1}(t) &= -P_{в1}^{п1} a_{в1} \nu_{11} x_{в1}(t) - \nu_{п1}^0 x_{п1}(t); \\ \dot{x}_{п2}(t) &= -P_{в2}^{п2} a_{в2} \nu_{12} x_{в2}(t) - \nu_{п2}^0 x_{п2}(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\nu_{21} + \nu_{22} = 1; \quad \nu_{11} + \nu_{12} = 1; \quad 0 \leq \nu_{ij} \leq 1; \quad i, j = 1, 2; \quad (3)$$

$$x_{pi}(t_0) = x_{pi0}; \quad i = 1, 2; \quad x_{vi}(t_0) = x_{vi0}; \quad i = 1, 2; \quad (4)$$

P_i^j — эффективность воздействия на один объект j -го типа одного объекта i -го типа (конфигурации систем могут быть учтены введением $P_i^{j\theta\psi}$, причем θ, ψ — метки положения i -го и j -го объектов соответственно); $a_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_i(\Delta t)}{\Delta t}$ — скорострельность i -го объекта ($i = v1, p1$) (интенсивность пуассоновского потока событий); $P_i(\Delta t)$ — вероятность выстрела i -го объекта на интервале Δt ; ν_i^0 ($i = v1, v2, p1, p2$) — темп “истощения” объектов i -го типа, кроме поражения: ненадежность и др.

Кроме предельного варианта непрерывного позалпового взаимодействия ЛС ВБ и ЛС ПВО, модель ПДК может быть преобразована для описания в потактовом варианте, когда l -й залповый такт из m залпов конфликтного взаимодействия не мгновенен, а имеет реальную длительность $\Delta T_l = T/m$, $l = 1, 2, \dots, m$. При этом $a_i = 1$ на ΔT_l , тогда конечномерное приближение системы (2) для l -го такта залпового обмена принимает вид [1]

$$\begin{aligned} x_{v1}(l+1) &= x_{v1}(l) - P_{p1}^{v1} \nu_{21} x_{p1}(l) - \nu_{v1}^0 x_{v1}(l); \\ x_{v2}(l+1) &= x_{v2}(l) - P_{p1}^{v2} \nu_{22} x_{p1}(l) - \nu_{v2}^0 x_{v2}(l); \\ x_{p1}(l+1) &= x_{p1}(l) - P_{v1}^{p1} \nu_{11} x_{v1}(l) - \nu_{p1}^0 x_{p1}(l); \\ x_{p2}(l+1) &= x_{p2}(l) - P_{v1}^{p2} \nu_{12} x_{v1}(l) - \nu_{p2}^0 x_{p2}(l). \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме потактового (5) приближения (2), учитываются следующие реальные условия конфликта [8]: каждый активный объект нацеливается и обслуживает один объект противника. В системе (2) имеет место полная информация без запаздывания о текущих средних численностях. При усложнении модели (2) [1] может быть учтено запаздывание информации и конечное время перехвата цели, которые в (5) компенсируются конечным интервалом времени k -го такта залпового обмена.

Каждая группировка ЛС ВБ и ЛС ПВО имеет векторные показатели потерь. В работе [1] приведены восемнадцать вариантов. В настоящем варианте каждая локальная система имеет три показателя потерь (слагаемые в (6)): терминальные перевесы противника по пассивным и активным объектам и темп убывания активных средств противника. Данные показатели, взвешенные тактическими весами α_i и β_i , скаляризованы на основе метода свертки с нормированием слагаемых и

принимают вид

$$\begin{aligned}
 J_1 = J_{\text{вб}} &= \alpha_{\text{п1}} [x_{\text{п1}}^2(t_k) - x_{\text{в1}}^2(t_k)] + \alpha_2 [x_{\text{п2}}^2(t_k) - x_{\text{в2}}^2(t_k)] + \\
 &+ \alpha_3 \int_{t_0}^{t_k} x_{\text{п1}}(t) dt \rightarrow \min_{\nu_{11}}; \\
 J_2 = J_{\text{пво}} &= \beta_1 [x_{\text{в1}}^2(t_k) - x_{\text{п1}}^2(t_k)] + \beta_2 [x_{\text{в2}}^2(t_k) - x_{\text{п2}}^2(t_k)] + \\
 &+ \beta_3 \int_{t_0}^{t_k} x_{\text{в1}}(t) dt \rightarrow \min_{\nu_{21}}
 \end{aligned} \tag{6}$$

а при условии (3)

$$\begin{aligned}
 \nu_{22} &= 1 - \nu_{21}; \quad \nu_{12} = 1 - \nu_{11}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1; \\
 \sum_i \alpha_i &= 1; \quad 0 \leq \beta_i \leq 1; \quad \sum_i \beta_i = 1, \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Как известно [5, 6], билинейная управляемая система имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i(t)u_i \right) \mathbf{x}. \tag{7}$$

В соответствии с системой (2) имеем

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{E}\boldsymbol{\nu}^0, \quad \boldsymbol{\nu}^{0\text{T}} = (-\nu_{\text{в1}}^0, -\nu_{\text{в2}}^0, -\nu_{\text{п1}}^0, -\nu_{\text{п2}}^0), \tag{8}$$

где \mathbf{E} — диагональная единичная матрица.

Матрица

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i(t)u_i &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{z}^{\text{T}}(\mathbf{u}) = \\
 &= \begin{pmatrix} -P_{\text{п1}}^{\text{в1}} a_{\text{п1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \nu_{21} + \dots + \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_{\text{в1}}^{\text{п2}} a_{\text{в1}} \end{pmatrix} \nu_{12},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\mathbf{z}^{\text{T}}(\mathbf{u}) = (-P_{\text{п1}}^{\text{в1}} a_{\text{п1}} \nu_{21}, -P_{\text{п1}}^{\text{в2}} a_{\text{п1}} \nu_{22}, -P_{\text{в1}}^{\text{п1}} a_{\text{в1}} \nu_{11}, -P_{\text{в1}}^{\text{п2}} a_{\text{в1}} \nu_{12}). \tag{10}$$

Из (8), (9) следует, что матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B}_i ($i = \overline{1, 4}$) не являются функциями времени.

3. В соответствии с методами многокритериального позиционного управления [2, 3] на основе многопрограммной стабилизации [4–6]

имеем N равновесных программных управлений [1] и траекторий, полученных из решения задачи (2)–(4), б на множестве из N начальных условий

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^{rT}(t) &= (\mathbf{u}_{\Pi,k}^r(t), \mathbf{u}_{\text{В},k}^r(t)) = (\nu_{21,k}^r(t), \nu_{22,k}^r(t), \nu_{11,k}^r(t), \nu_{12,k}^r(t)); \\ \mathbf{x}_k^{rT}(t) &= (\mathbf{x}_{\text{В},k}^r(t), \mathbf{x}_{\Pi k}^r(t)) = (x_{\text{В}1,k}^r(t), x_{\text{В}2,k}^r(t), x_{\Pi 1,k}^r(t), x_{\Pi 2,k}^r(t)), \\ \mathbf{x}_k(t_0) &= \mathbf{x}_{0,k}, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (11)$$

в соответствии с определением и необходимыми условиями равновесия по Нэшу [1].

Определение 1 [1]. Управление $\mathbf{u}^{rT}(t) = (\mathbf{u}_{\Pi}^r(t), \mathbf{u}_{\text{В}}^r(t))$ является равновесным по Нэшу, если имеет место система неравенств

$$\begin{aligned} J_{\text{ВВ}}(\mathbf{u}_{\Pi}^r, \mathbf{u}_{\text{В}}) &\geq J_{\text{ВВ}}(\mathbf{u}_{\Pi}^r, \mathbf{u}_{\text{В}}^r), \\ J_{\text{ПВВ}}(\mathbf{u}_{\Pi}, \mathbf{u}_{\text{В}}^r) &\geq J_{\text{ПВВ}}(\mathbf{u}_{\Pi}^r, \mathbf{u}_{\text{В}}^r), \end{aligned}$$

где данная система имеет смысл увеличения потерь каждой ЛС при отклонении от равновесного управления.

Тогда позиционное управление, реализующее многокритериальный синтез динамики конфликта с любыми начальными условиями, например из диапазона

$$\min_k \mathbf{x}_{0k} \leq \mathbf{x}_0 \leq \max_k \mathbf{x}_{0k}, \quad (12)$$

в соответствии с подходом [2, 4] принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{u}_k^r(t) + \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k^r(t)) - \right. \\ &\quad \left. - 2\mathbf{u}_k^r \sum_{s=1, s \neq k}^N \frac{(\mathbf{x}_k^r(t) - \mathbf{x}_s^r(t)) \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k^r(t))}{(\mathbf{x}_k^r(t) - \mathbf{x}_s^r(t))^2} \right) \times \\ &\quad \times \prod_{l=1, l \neq s}^N \frac{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_l^r(t))^2}{(\mathbf{x}_k^r(t) - \mathbf{x}_l^r(t))^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{u}_{\Pi}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}_{\text{В}}(\mathbf{x}, t))$.

Тогда, например,

$$\mathbf{u}_{\Pi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \left(\mathbf{u}_{\Pi,k}^r(t) + \mathbf{C}_k(t)(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k^r(t)) - \right.$$

$$- 2\mathbf{u}_{\Pi,k}^r \sum_{s=1, s \neq k}^N \frac{(\mathbf{x}_k^r(t) - \mathbf{x}_s^r(t)) \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k^r(t))}{(\mathbf{x}_k^r(t) - \mathbf{x}_s^r(t))^2} \times \\ \times \prod_{l=1, l \neq s}^N \frac{(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_l^r(t))^2}{(\mathbf{x}_k^r(t) - \mathbf{x}_l^r(t))^2}. \quad (14)$$

В частном случае, отмеченном в п. 1, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{u}_{\Pi}(\mathbf{x}_B, t), \mathbf{u}_{\Pi}(\mathbf{x}_B, t))$. Тогда, например,

$$\mathbf{u}_{\Pi}(\mathbf{x}_B, t) = \sum_{k=1}^N \left(u_{\Pi,k}^r(t) + \mathbf{C}_k(t) (\mathbf{x}_B(t) - \mathbf{x}_{B,k}^r(t)) - \right. \\ \left. - 2\mathbf{u}_{\Pi,k}^r \sum_{s=1, s \neq k}^N \frac{(\mathbf{x}_{B,k}^r(t) - \mathbf{x}_{B,s}^r(t)) \cdot (\mathbf{x}_B(t) - \mathbf{x}_{B,k}^r(t))}{(\mathbf{x}_{B,k}^r(t) - \mathbf{x}_{B,s}^r(t))^2} \right) \times \\ \times \prod_{l=1, l \neq s}^N \frac{(\mathbf{x}_B(t) - \mathbf{x}_{B,l}^r(t))^2}{(\mathbf{x}_{B,k}^r(t) - \mathbf{x}_{B,l}^r(t))^2}, \quad (15)$$

Управление (13) порождает траекторию системы (2)

$$\mathbf{x}^T(t) = (x_{B1}(t), x_{B2}(t), x_{\Pi 1}(t), x_{\Pi 2}(t)), \quad (16)$$

для которой набор траекторий $\mathbf{x}_k^r(t)$, $k = \overline{1, N}$ обладает асимптотическими свойствами [2, 4].

Это достигается дополнительными обратными связями в (13)

$$\mathbf{u}_{o,k}(t) = \mathbf{C}_k(t) (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k^r(t)) = \mathbf{C}_k(t) \mathbf{y}_k(t), \quad k = \overline{1, N}, \quad (17)$$

где отклонение

$$\mathbf{y}_k(t) = (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k^r(t)). \quad (18)$$

Выбор матриц $\mathbf{C}_k(t)$, $k = \overline{1, N}$, обеспечивает асимптотические свойства всех $\mathbf{x}_k^r(t)$, $k = \overline{1, N}$, когда $\mathbf{y}_k(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

После преобразования (18)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_k(t) + \mathbf{x}_k(t) \quad (19)$$

и подстановки (19) в (7) может быть получена нелинейная система относительно отклонений $\mathbf{y}_k(t)$, $k = \overline{1, N}$. В работах [2, 6] описывается методика формирования структурных требований к $\mathbf{C}_k(t)$, $k = \overline{1, N}$, из условий устойчивости линеаризованной системы в отклонениях для каждого фиксированного $k = \overline{1, N}$:

$$\dot{\mathbf{y}}_k = \mathbf{P}_k(t) \mathbf{y}_k + \mathbf{Q}_k(t) \mathbf{v}_k, \quad (20)$$

где

$$\mathbf{P}_k(t) = \mathbf{A}(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i(t) u_{ik}(t), \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}_k(t) = (\mathbf{B}_1(t)x_k^1(t), \dots, \mathbf{B}_m(t)x_k^m(t)), \quad (22)$$

а нулевое решение системы (20) при фиксированном k стабилизируется управлениями

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{C}_k(t)\mathbf{y}_k(t), \quad k = \overline{1, N}, \quad (23)$$

где матрица $\mathbf{C}_k(t)$ имеет размер $n \times n$, а с учетом системы (2), $n = m = 4$.

Управления $u_{ik}(t)$ системы (2) имеют вид

$$u_{ik}(t) = \nu_{ijk}(t), \quad ij = (21, 22, 11, 12). \quad (24)$$

Подставляя (23) в (20), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{P}_k(t)\mathbf{y}_k(t) + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t)\mathbf{y}_k(t) = \\ &= (\mathbf{P}_k(t) + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t))\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{D}_k(t)\mathbf{y}_k(t), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\mathbf{D}_k(t) = \mathbf{P}_k(t) + \mathbf{Q}_k(t)\mathbf{C}_k(t). \quad (26)$$

4. Применяя соотношения (20)–(26) к системе (2), из формул (9)–(11) имеем

$$\mathbf{P}_k(t) = \mathbf{E}\boldsymbol{\nu}^0 + \mathbf{E}\mathbf{z}_k(\mathbf{u}^r) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\nu}^0 + \mathbf{z}_k(\mathbf{u}^r)), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k^r(\mathbf{u}_k^r) &= (-P_{\pi 1}^{\text{B1}} a_{\pi 1} \nu_{21k}^r, -P_{\pi 1}^{\text{B2}} a_{\pi 1} \nu_{22k}^r, -P_{\text{B1}}^{\pi 1} a_{\text{B1}} \nu_{11k}^r, -P_{\text{B1}}^{\pi 1} a_{\text{B1}} \nu_{12k}^r) = \\ &= (z_{1k}(\mathbf{u}_k^r), z_{2k}(\mathbf{u}_k^r), z_{3k}(\mathbf{u}_k^r), z_{4k}(\mathbf{u}_k^r)). \end{aligned} \quad (28)$$

Выражение (22) в соответствии с (9) с заменой ν_{ij} на $x_k(t)$ дает

$$\mathbf{Q}_k(t) = \mathbf{E}\mathbf{z}(\mathbf{x}_k^r), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k^r(\mathbf{x}_k) &= (-P_{\pi 1}^{\text{B1}} a_{\pi 1} x_{\text{B1}k}^r, -P_{\pi 1}^{\text{B2}} a_{\pi 1} x_{\text{B2}k}^r, -P_{\text{B1}}^{\pi 1} a_{\pi 1} x_{\pi 1k}^r, -P_{\text{B1}}^{\pi 1} a_{\text{B1}} x_{\pi 2k}^r) = \\ &= (z_{1k}(\mathbf{x}_k^r), z_{2k}(\mathbf{x}_k^r), z_{3k}(\mathbf{x}_k^r), z_{4k}(\mathbf{x}_k^r)). \end{aligned} \quad (30)$$

Из (27), (29) следует, что матрицы $\mathbf{P}_k(t)$ и $\mathbf{Q}_k(t)$ — диагональные, с отрицательными элементами, так как $0 \leq \nu_{ijk}^r \leq 1$, а $x_{ik}^r(t) \geq 0$ в соответствии с системой (2) — положительные монотонно убывающие функции.

Тогда, ограничиваясь диагональной структурой матрицы $\mathbf{C}_k(t) = (c_{iik})$, $i = \overline{1, 4}$ [2] без ограничения общности обеспечения ее стабилизирующих свойств, имеем в соответствии с (25), (26)

$$\mathbf{D}_k(t) = (d_{iik}), \quad i = \overline{1, 4}.$$

Окончательно, в соответствии с (26) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} d_{11k} &= z_{1k}(\mathbf{u}_k^r) - \nu_{\text{в1}}^0 + z_{1k}(\mathbf{x}_k^r)c_{11k}; \\ d_{22k} &= z_{2k}(\mathbf{u}_k^r) - \nu_{\text{в2}}^0 + z_{2k}(\mathbf{x}_k^r)c_{22k}; \\ d_{33k} &= z_{3k}(\mathbf{u}_k^r) - \nu_{\text{п1}}^0 + z_{3k}(\mathbf{x}_k^r)c_{33k}; \\ d_{44k} &= z_{4k}(\mathbf{u}_k^r) - \nu_{\text{п2}}^0 + z_{4k}(\mathbf{x}_k^r)c_{44k}. \end{aligned} \quad (31)$$

В системе (31) элементы z являются отрицательными в соответствии с формулами (28), (30). Элементы $\nu_{ij}^0 \geq 0$, $\nu_{ij}^0 \geq 0$, следовательно, при $c_{iik} \geq 0$, $i = \overline{1, 4}$ элементы

$$d_{iik} < 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (32)$$

Тогда, как указано в [9, стр. 39], нулевое решение системы (20) в соответствии с системой (2) экспоненциально устойчиво, а из (18) следует, что (16) асимптотически устойчиво относительно асимптоты $\mathbf{x}_k^r(t)$.

Замечание 1. Более полное определение экспоненциальной устойчивости требует проверки неравенства (33).

Определение 2 [9]. Нулевое решение системы (25) является экспоненциально устойчивым, если существуют положительные константы α и β , такие что

$$\|\mathbf{y}_k(t)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \|\mathbf{y}_k(t_0)\|, \quad t \geq t_0. \quad (33)$$

Проверим (33). Поскольку $\mathbf{D}_k(t)$ в (25) — диагональная матрица, то система (25) может быть представлена в следующем виде

$$\dot{y}_{ik} = d_{iik}(t)y_{ik}, \quad d_{iik} < 0, \quad y_{ik} \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (34)$$

Решим эти уравнения

$$\frac{\dot{y}_{ik}}{y_{ik}} = d_{iik}(t), \quad \ln y_{ik}|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t d_{iik}(t)dt, \quad y_{ik}(t) = y_{ik}(t_0)e^{-\int_{t_0}^t d_{iik}(t)dt},$$

где функции $-d_{iik}(t) > 0$ и

$$\inf_t (-d_{iik}(t)) = \beta_{iik}. \quad (35)$$

Тогда

$$y_{ik}(t) = y_{ik}(t_0)e^{-\int_{t_0}^t d_{iik}(t)dt} \leq y_{ik}(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \beta_{iik}dt} = y_{ik}(t_0)e^{-\beta_{iik}(t-t_0)}, \quad (36)$$

$$y_k(t) \leq y_k(t_0)e^{-\beta_{iik}(t-t_0)} \leq y_k(t_0)e^{-\beta(t-t_0)}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (37)$$

где $\beta = \inf \{\beta_{iik}, i = \overline{1, 4}\}$.

При этом в (37) знак “меньше или равно” сохраняется, так как β совпадает с наименьшим из β_{iik} .

Возведение в квадрат неравенств (37), суммирование полученных неравенств и извлечение корня приводит к (33) при $\alpha = 1$.

Замечание 2. Поскольку в исходном билинейном уравнении (7) на основе (2) матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B}_i , $i = \overline{1, m}$ постоянные, то можно предположить формирование постоянных $c_{iik} \geq 0$, $i = \overline{1, 4}$ общих для всех $k = \overline{1, N}$.

5. Рассмотрим иллюстративный упрощенный пример решения задачи получения программных равновесных по Нэшу управлений и траекторий (11) для системы (2) по критериям (6) для двух вариантов начальных условий ($N = 2$), с формированием позиционного управления (13) и траектории (16) и анализом свойств траектории (16) при задании асимптотических свойств (11) на основе (32) и замечания 2.

Моделирование субоптимальных программных равновесных по Нэшу управлений реализуется с простейшей параметризацией программных управлений [1, гл. 1] и с потактовым определением параметров на модели (5) в силу специфики задачи проводилось в программной среде многокритериальной параметрической оптимизации многообъектных динамических систем МОМДИС [1]. Математическая модель (5) описана системой следующих уравнений с переобозначениями ПС МОМДИС в виде конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} X_-(1) &= X(1) - P31 * Q(2) * X(3) - n01 * X(1); \\ X_-(2) &= X(2) - P32 * (1 - Q(2)) * X(3) - n02 * X(2); \\ X_-(3) &= X(3) - P13 * Q(1) * X(3) - n03 * X(3); \\ X_-(4) &= X(4) - P14 * (1 - Q(1)) * X(3) - n04 * X(4); \\ Z &= [X_-(1); X_-(2); X_-(3); X_-(4)]; \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} J(1) &= a1 * (Z(3) \wedge 2 - Z(1) \wedge 2) + \\ &+ a2 * (Z(4) \wedge 2 - Z(2) \wedge 2) + a3 * Z(3); \\ J(2) &= b1 * (Z(1) \wedge 2 - Z(3) \wedge 2) + \\ &+ b2 * (Z(2) \wedge 2 - Z(4) \wedge 2) + b3 * Z(1), \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} a1 &= 0,6; & a2 &= 0,3; & a3 &= 0,1; \\ b1 &= 0,3; & b2 &= 0,6; & b3 &= 0,1; \\ P31 &= 0,5; & P32 &= 0,5; & P13 &= 0,5; & P14 &= 0,5; \\ n01 &= 0,1; & n02 &= 0,07; & n03 &= 0,05; & n04 &= 0,2. \end{aligned}$$

Эксперимент № 1.

Начальные численности:

$$X_1 = 10, \quad X_2 = 6, \quad X_3 = 12, \quad X_4 = 7.$$

Эффективности воздействия объектов i -го типа на объекты j -го типа:

$$P_{31} = P_{32} = P_{13} = P_{14} = 0,5.$$

Таблица 1

Результаты оптимизации на такте № 1

	Численности				Доли		Показатели	
	X_1	X_2	X_3	X_4	$Q1$	$Q2$	J_A	J_B
Начало	10	6	12	7	$X_1 \rightarrow X_3$	$X_3 \rightarrow X_1$		
Нэш	7	2	6	5	0,93545	0,38267	0,47651	0,43709

В табл. 1–4 ячейка Q_1 имеет смысл доли активных средств X_1 , воздействующих на активные средства противодействующей стороны X_3 , а Q_2 — доли активных средств X_3 , воздействующих на активные средства противодействующей стороны X_1 .

Таблица 2

Результаты оптимизации на такте № 2

	Численности				Доли		Показатели	
	X_1	X_2	X_3	X_4	$Q1$	$Q2$	J_A	J_B
Начало	77	2	6	5	$X_1 \rightarrow X_3$	$X_3 \rightarrow X_1$		
Нэш	4	1	3	3	0,81566	0,83623	0,42607	0,49486

По результатам моделирования получились зависимости, представленные на рис. 2, 3 и 4.

Эксперимент № 2.

Рассмотрим влияние количественного превосходства ПВО.

Начальные численности

$$X_1 = 12, X_2 = 10, X_3 = 30, X_4 = 10.$$

Эффективности воздействия объектов i -го типа на объекты j -го типа

$$P_{31} = P_{32} = P_{13} = P_{14} = 0,5.$$

Таблица 3

Результаты оптимизации на такте № 1

	Численности				Доли		Показатели	
	X_1	X_2	X_3	X_4	$Q1$	$Q2$	J_A	J_B
Начало	12	10	30	10	$X_1 \rightarrow X_3$	$X_3 \rightarrow X_1$		
Нэш	4	2	15	7	0,91727	0,49422	0,46431	0,39945

Результаты оптимизации на такте № 2

	Численности				Доли		Показатели	
	X_1	X_2	X_3	X_4	$Q1$	$Q2$	J_A	J_B
Начало	4	2	15	7	$X_1 \rightarrow X_3$	$X_3 \rightarrow X_1$		
Нэш	0	1	8	4	0,81658	0,89722	0,31715	0,46641

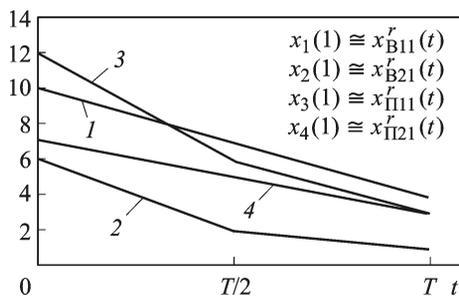
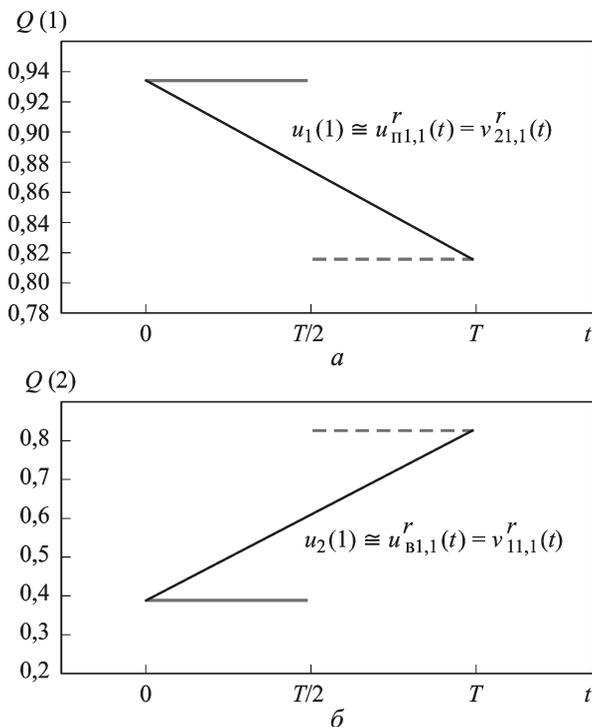


Рис. 2. Изменение вектора состояний

Рис. 3. Изменение доли средств ЛС ПВО $Q(1)$ ($u_{п2,1}^r = 1 - u_{п1,1}^r = v_{22,1}^r(t)$) (а) и $Q(2)$ ($u_{в2,1}^r = 1 - u_{в1,1}^r = v_{12,1}^r(t)$) (б)

По результатам моделирования получились зависимости, представленные на рис. 5, 6 и 7.

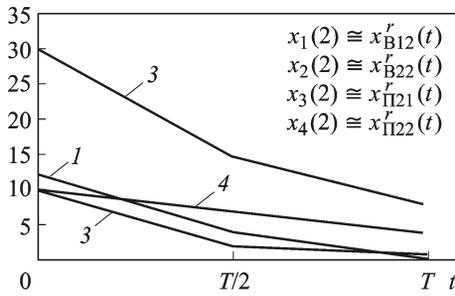


Рис. 4. Изменение вектора состояний

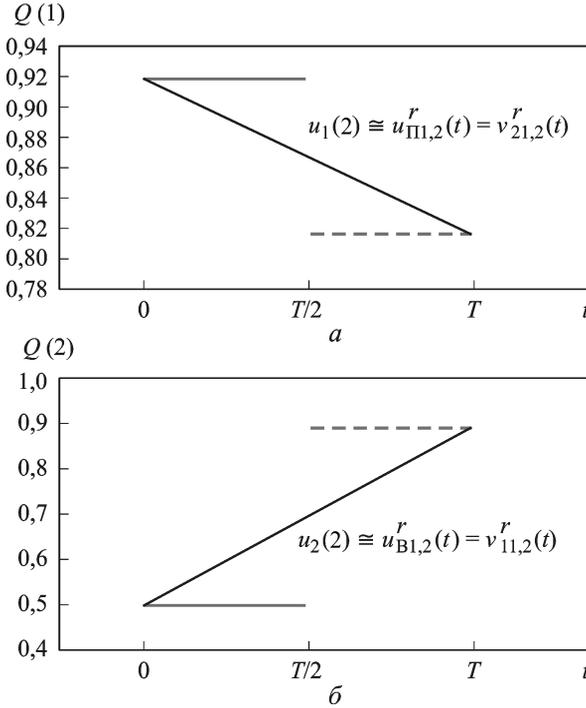


Рис. 5. Изменение доли средств ЛС ПВО $Q(1)$ и ЛС ВБ $Q(2)$:

$a - u_{\Pi 2,2}^r = 1 - u_{\Pi 1,2}^r = \nu_{22,2}^r(t)$; $b - u_{B2,2}^r = 1 - u_{B1,2}^r = \nu_{12,2}^r$

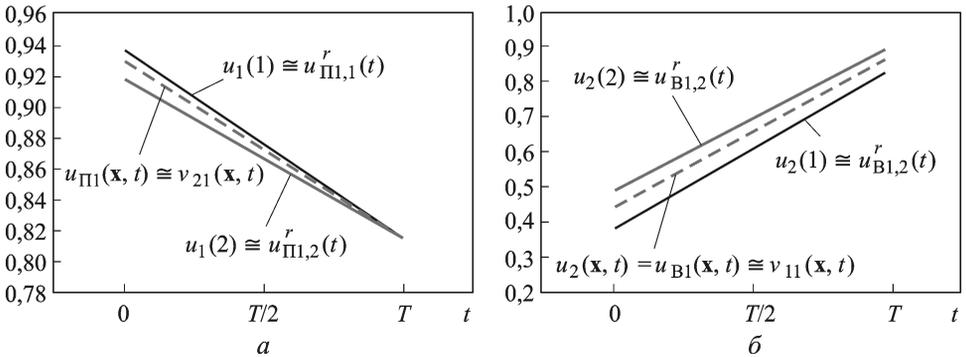


Рис. 6. Временная реализация для управления $u_{\Pi 1}(x, t)$ ($u_{\Pi 2}(x, t) = 1 - u_{\Pi 1}(x, t) = \nu_{22}(x, t)$) (а) и $u_{B1}(x, t)$ ($u_{B2}(x, t) = 1 - u_{B1}(x, t) = \nu_{12}(x, t)$) (б)

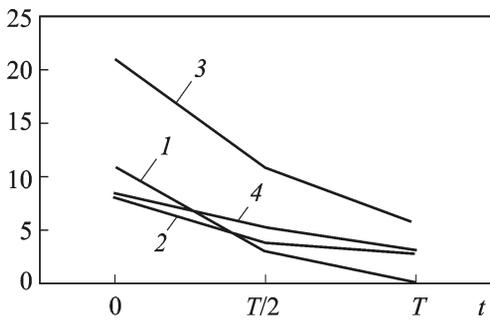


Рис. 7. Изменение вектора состояний в зависимости от синтезированного управления

В результате применения метода многокритериального синтеза позиционного управления на основе метода многопрограммной стабилизации с аппроксимированными оптимальными управлениями были получены субоптимальные равновесные позиционные управления в экспериментах № 1 и № 2.

Аналитический вид $\mathbf{u}(x, t)$, где $\mathbf{u}_1(x, t) = \mathbf{u}_п(x, t)$ и $\mathbf{u}_2(x, t) = \mathbf{u}_в(x, t)$ соответствует варианту (14). Вид выражения для позиционного управления $\mathbf{u}_в(x, t)$ может быть получен по аналогии из (14) с заменой $\mathbf{u}_п$ на $\mathbf{u}_в$. Диагональная матрица $C_k = (c_{iik})$, $i = \overline{1, n}$ с элементами $c_{ii} = 1$ в соответствии с (32) обеспечивает проявления асимптотических свойств всех $\mathbf{x}_k^r(t)$, $k = 1, 2$.

Временная реализация для управлений $\mathbf{u}_1(x, t)$ и $\mathbf{u}_2(x, t)$ для компонент $u_{п1}(x, t)$, $u_{в1}(x, t)$ при средних значениях $x_i(t_0)$ (12) с малой кривизной данных компонент дана на рис. 6, а и 6, б.

Как следует из рис. 6, многокритериальное позиционное управление достаточно хорошо ориентировано на усредняющие свойства оптимальных программных управлений. Кроме того, асимптотические свойства обладают полезной грубостью.

На рис. 7 дано изменение вектора состояния при применении $\mathbf{u}(x, t)$.

Замечание 3. Очевидно, что увеличение числа тактов приближает реализацию программных управлений и траекторий на потактовой модели ПДК (5) к модели (2).

Рис. 7 показывает, что векторная траектория системы (2), вызванная законом управления, имеет определенную степень близости к траекториям-асимптомам, представленным на рис. 2 и 4.

Полученные законы управления ресурсами являются примером реализации алгоритмов динамической самоорганизации в структурно и функционально сложных системах [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В о р о н о в Е. М. Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных компромиссов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 576 с.
2. В о р о н о в Е. М. Многокритериальный синтез позиционного управления на основе многопрограммной стабилизации. Ч. 1 // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2012. – № 2. – С. 3–19.
3. В о р о н о в Е. М. Многокритериальный синтез позиционного управления на основе многопрограммной стабилизации. Ч. 2 // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2012. – № 3. – С. 3–11.
4. З у б о в В. И. Синтез многопрограммных устойчивых управлений // Докл. АН СССР, 1991. – Т. 318, № 2. – С. 274–277.
5. С м и р н о в Н. В. Задачи многопрограммной стабилизации в различных классах динамических систем // Труды Средневожского мат. общ., 2005. – Т. 7, № 1. – С. 192–201.
6. С о л о в ь е в а И. В. Синтез многопрограммных систем управления на основе метода позиционной оптимизации. – Автореферат дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. СПб. гос. ун-т, 2010. – 15 с.
7. К о л е с н и к о в А. А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного анализа. – М.: КомКнига, 2006. – 240 с.
8. В е н т ц е л ь Е. С. Исследование операций. – М: Сов. радио, 1972. – 552 с.
9. К в а к е р н а к Х., С и в а н Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
10. К о н ц е п ц и я иерархической пента-структуры (ИПС) модели (облика) интеллектуальной системы управления (ИСУ) и принцип “притягивающих многообразий” в самоорганизации и оптимизации ИСУ / Пупков К.А., Воронов Е.М., Карпунин А.А., Пролетарский А.В. // Интеллектуальные системы: Тр. X Междунар. симп. – М.: РУСАКИ, 2012. – С. 23–34.

Статья поступила в редакцию 31.05.2012