

Константин Александрович Пупков родился в 1930 г., окончил в 1954 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, зав. кафедрой “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член РАЕН. Автор более 200 научных работ в области теории автоматического управления.

K.A. Pupkov (b. 1930) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1954. D. Sc. (Eng.), professor, head of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University, full member of Russian Academy of Natural Sciences. Author of over 200 publications in the field of theory of automatic control.



Александр Дмитриевич Устюжанин родился в 1983 г. Студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор одной научной работы в области систем управления летательными аппаратами.

A.D. Ustyuzhanin (b. 1983). Student of the Bauman Moscow State Technical University. Author of a publication in the field of control systems of flying vehicles.



УДК 519.711.3+629.11.012.7

В. Г. Ко нь ко в, Д. А. Ан дри ко в

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С АНТИБЛОКИРОВОЧНОЙ СИСТЕМОЙ В РЕЖИМЕ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ КОЛЕС

Предложена математическая модель режима, возникающего при экстренном торможении, когда колеса начинают проскальзывать относительно горизонтального дорожного полотна. Приведены полная и упрощенная модели.

Наземное транспортное средство (ТС) с антиблокировочной системой (АБС) (например, пассажирский автобус) — сложная динамическая система, движущаяся в зависимости от ситуации, сложившейся на дороге, в разнообразных режимах [1–5]. В силу различия условий контакта с дорогой, например различия коэффициентов трения для левых и правых колес (микст), ТС начинает поворачиваться относительно вертикальной оси, отчего затрудняется управление им и, соответственно, снижается уровень безопасности движения.

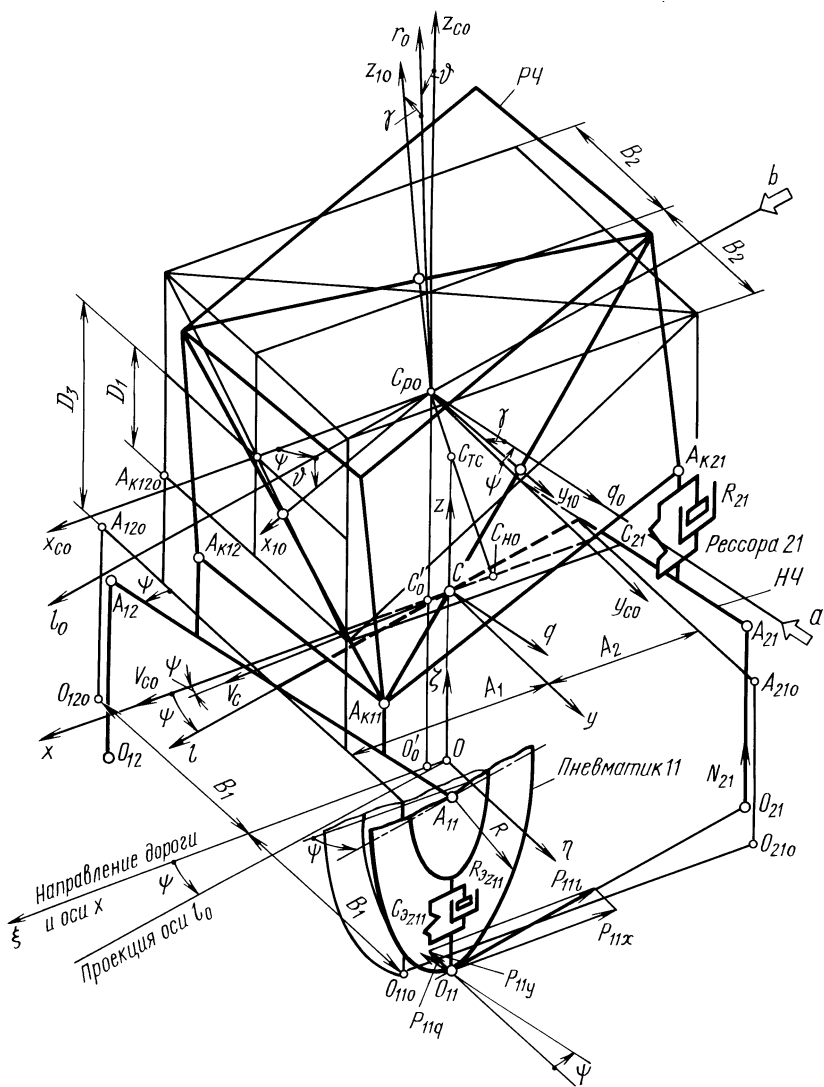


Рис. 1. Расчетная схема ТС

Системы координат. Представим ТС в виде подрессоренного корпуса (салон с кабиной водителя) и непрессоренной части [1]. Непрессоренную часть ТС представим в виде Н-образного соединения стержней с колесами (рис. 1). Стержни не имеют массы и являются абсолютно жесткими. Массу m_p корпуса считаем сосредоточенной в одной точке C_p . Центры масс колес расположены в точках A_{ij} на осях их вращения, индекс i задает переднюю ($i = 1$) и заднюю ($i = 2$) оси, индекс j — левую ($j = 1$) и правую ($j = 2$) стороны по ходу движения. Корпус подрессорен в точках A_{kij} . Массой рессор пренебрегаем. Масса каждого колеса — m_{nij} , их радиус в ненагруженном состоя-

нии — R . Примем систему отсчета $A_{ij}x_{A_{ij}}y_{A_{ij}}z_{A_{ij}}$, связанную с дисками колес (рис. 2). Символ $z_{A_{ij}o}^{A_{ij}}$ означает координату $z_{A_{ij}o}$ точки A_{ij} ; здесь и далее “o” в индексе точки означает ее положение, которое она займет при отсутствии нагрузок.

Точка A_{ij} лежит на пересечении оси вращения колеса ij с продольной плоскостью симметрии его пневматика, совпадающей с плоскостью $A_{ij}o x_{A_{ij}o} z_{A_{ij}o}$, ось $A_{ij}y_{A_{ij}}$ совпадает с осью вращения колеса. Точку крепления рессоры ij к корпусу обозначим A_{kij} . Конструкция ТС такова, что $A_{kij}o$ совпадает с $A_{ij}o$; $D_3 = D_1$; $D_2 = R + D_1$; $B_1 = B_2$ (см. рис. 1).

В ненагруженном состоянии автомобиля каждое колесо касается опорной плоскости в единственной точке O_{ij} (см. рис. 1, 2). Вращение колеса ij вокруг своей оси вращения задается абсолютной угловой скоростью $\Omega_{y_{ij}}$.

Центры масс ТС и неподдресоренной части обозначим точками $C_{ТС}$, C_H соответственно. Точка O — проекция $C_{ТС}$ на опорную плоскость (плоскость $O_{11}O_{12}O_{22}$), $O\xi\eta\zeta$ — неподвижная система отсчета. Плоскость $O\xi\eta$ принадлежит опорной плоскости, ось $O\zeta$ вертикальна, ось $O\xi$ направлена по ходу движения вдоль V_{co} — проекции начального вектора скорости центра масс ТС на опорную плоскость. Точка C является проекцией $C_{ТС}$ на плоскость, проходящую через оси колес. В начальный момент времени точка $C \equiv C_o$ в системе $O\xi\eta\zeta$ имеет координаты $(0, 0, R)$. Рабочая неподвижная система координат — C_oxyz .

Система координат $C_px_cy_cz_c$ поступательно перемещается относительно системы C_oxyz . Оси x, x_c параллельны оси $O\xi$, оси y, y_c параллельны $O\eta$, а оси z, z_c параллельны $O\zeta$. В начальный момент времени C_oxyz совпадает с $O\xi\eta\zeta$ при $z = \zeta - R$.

Система координат $C_px_1y_1z_1$ жестко связана с корпусом, оси совпадают с ее главными центральными осями инерции. Ось C_px_1 лежит в продольной плоскости симметрии корпуса. Угловое положение $C_px_1y_1z_1$ относительно $C_px_cy_cz_c$ определяется углами Эйлера $(\psi, \vartheta, \gamma)$. Положение C_p относительно C задают координаты

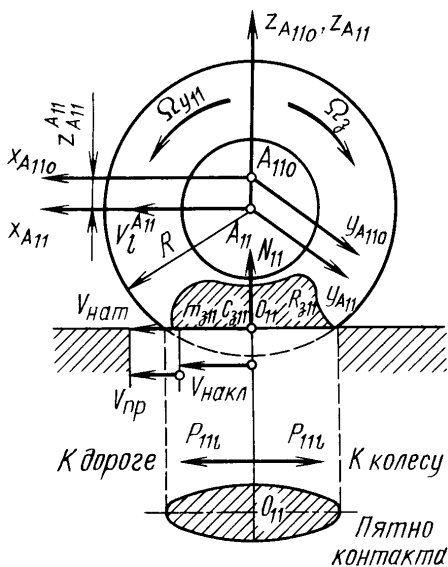


Рис. 2. Качение колеса 11 на сминаемом пневматике

$x + C'C$ (C' — точка C'_0 при нагрузках), $y, z + D_3$. Угол рыскания ψ — угол поворота корпуса вокруг оси $C_p z_c$, угол тангажа ϑ — угол поворота корпуса вокруг $C_p q$ (поперечной оси ТС), угол крена γ — угол поворота корпуса вокруг $C_p l$ (продольной оси). В дальнейшем предполагается использовать модель для улучшения характеристик движения ТС только путем формирования дополнительных воздействий в стандартной АБС. Поэтому влияние рулевого управления не учитывается и в пренебрежении углами развала и схождения колес оси трехгранников $A_{ij}x_{A_{ij}}y_{A_{ij}}z_{A_{ij}}$ ориентированы по осям трехгранника $Clqz_c$ (см. рис. 1).

Модель трения. Точка касания O_{11} принадлежит как колесу, так и дороге. Точки касания на колесе образуются и за счет вращательного движения — накатывания (в этом случае точками касания на колесе становятся каждый раз различные его точки) со скоростью $V_{нак11} = \Omega_{y11}R$, и за счет поступательного движения — натаскивания (точка касания на колесе всегда одна, колесо не прокручивается) со скоростью $V_{нат11l} = V_l^{A11}$ (верхний индекс обозначает рассматриваемую точку, а нижний — направление, в котором рассматривается скорость).

Поскольку колесо совершает два движения одновременно — вращательное и (вместе с корпусом) поступательное, возможны два режима торможения.

Рассмотрим торможение в режиме качения без проскальзывания. Скорость вращения колеса Ω_{y11} должна принимать во все моменты времени значения $\Omega_{y11кач} = V_l^{A11}/R$ (условие качения без проскальзывания).

Режим торможения без проскальзывания сохранится, пока сила трения $P_{т11}$ не превысит критического значения $P_{ткр}$, различного для разных дорожных покрытий (рис. 3).

При увеличении скорости торможения путем увеличения тормозного момента M_T необходимо, чтобы значение M_T не превышало $M_{ткр}$, так как в этом случае эффективность торможения против ожидаемого

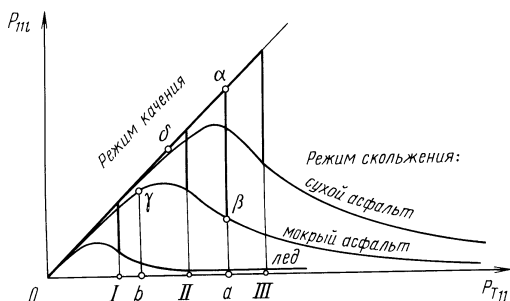


Рис. 3. Режимы работы АБС при переходе в режим скольжения

снизится в силу перехода ТС в режим торможения с проскальзыванием, который следует считать аварийным: прекратится характерная для режима качения полная компенсация поперечных сил P_q и моментов M_z на колесах (например, для четырехколесного ТС из-за влияния возмущающего момента M_z вокруг вертикальной оси пропадет своеобразная зона нечувствительности к M_z , определяемая $P_{\text{ткр}}$) силами трения, т.е. начнется “закрутка” и боковое смещение ТС.

Тормозить даже в экстремальных ситуациях необходимо в режиме качения. С помощью АБС поддерживается максимально возможное значение $M_{\text{тв}j}$, не превышающее (с некоторым запасом) критического значения (см., например, точку a на рис. 3 при движении по сухому асфальту).

Торможение колеса при качении с проскальзыванием. Из рис. 3 видно, что при резком попадании ТС на мокрый асфальт торможение колеса в режиме качения перейдет в торможение колеса в режиме качения с проскальзыванием, так как величина a больше значения $P_{\text{ткр}}$ для мокрого асфальта (скачок $\alpha \rightarrow \beta$ на рис. 3). АБС резким сбросом значения $M_{\text{тв}j}$ переведет этот новый режим в управляемую область с выбором точки b , соответствующей технически максимальным значениям сил торможения в этих условиях (траектория $\beta \rightarrow \gamma$ на рис. 3).

Возникновение нового режима объясняется тем, что сила трения $P_{l_{11}}$, приложенная к колесу со стороны дороги, в точке b становится меньше силы $P_{\text{т11}}$, приложенной к нему от тормозных колодок (отчего режим качения без проскальзывания не сохранился), и точки касания на колесе начинают проскальзывать относительно точек касания на дороге.

Скорость проскальзывания $V_{\text{пр}l_{11}}$ определяется разницей скоростей перемещения точек касания на колесе, вызванных его натаскиванием и его накатыванием:

$$V_{\text{пр}l_{11}} = V_{\text{нат}l_{11}} - V_{\text{нак}l_{11}} = V_l^{A_{11}} - \Omega_{y_{11}}R.$$

Величина трения качения с проскальзыванием зависит от силы N_{11} нормальной реакции со стороны поверхности, от типа поверхности, учитываемого коэффициентом кулонова трения $\nu_{l_{11}}$, и от величины проскальзывания, учитываемой функцией $p_l(s_{l_{11}})$, где $s_{l_{11}}$ — относительное проскальзывание:

$$P_{l_{11}} = -N_{11}\nu_{l_{11}}p_l(s_{l_{11}}). \quad (1)$$

Исследования сил трения, возникающих при качении с проскальзыванием, показывают, что оно зависит не только от проскальзывания,

но и от того, на какой скорости оно происходит, поэтому аргументом функции p_l является проскальзывание относительное:

$$s_{l_{11}} = \frac{|V_{\text{пр}l_{11}}|}{|V_{\text{нар}l_{11}}|}.$$

Если режим скольжения возник из-за процессов, происходящих вдоль оси l , то он существует и в направлении оси q . Трение качения также заменяется трением скольжения, которое не может компенсировать поперечные силы, и корпус ТС начинает поворачиваться ($\psi \neq 0$), т.е. возникает скорость V_y ; поэтому относительное проскальзывание имеет вид

$$s_{l_{ij}} = \frac{|V_x^{A_{ij}} \cos \psi - V_y^{A_{ij}} \sin \psi - \Omega_{y_{ij}} R|}{|V_x^{A_{ij}} \cos \psi - V_y^{A_{ij}} \sin \psi|},$$

$$s_{q_{ij}} = \frac{|-V_x^{A_{ij}} \sin \psi + V_y^{A_{ij}} \cos \psi|}{|V_x^{A_{ij}} \cos \psi - V_y^{A_{ij}} \sin \psi|}.$$
(2)

При использовании тормозных колодок имеем $s_{l_{11}} = 0 \dots 1$. При малых скольжениях (т.е. в наиболее распространенном случае) $p_l(s_{l_{11}})$ является линейной функцией. Типовой вид функции $p_l(s_{l_{11}})$ представлен на рис. 4.

В результате торможения в режиме качения с проскальзыванием на колесе образуется вязкий слой, уменьшающий эффективность торможения (см. максимум функции $p_l(s_l)$ на рис. 4).

Приведенные на рис. 4 экспериментальные данные соответствуют аналитическому выражению [8]

$$p_l(s_{l_{ij}}) = (a + bs_{l_{ij}})e^{-cs_{l_{ij}}} + d,$$

где a, b, c, d — константы, зависящие от пар трения.

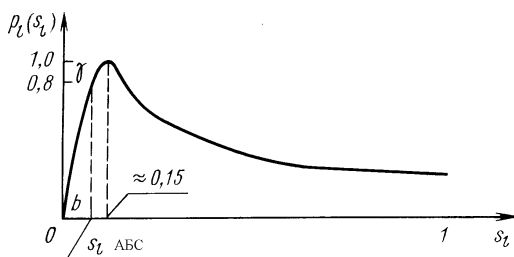


Рис. 4. Зависимость силы трения от относительного проскальзывания

Опорной точкой при экстренном торможении должна быть точка в окрестности точки b (на рис. 3).

Выражения для сил трения, действующих на ТС при торможении с проскальзыванием колес. В работах [1–4, 6] рассмотрены способы учета влияния на движение ТС сил трения в режиме качения с проскальзыванием колес. В настоящей работе предлагается учитывать это трение следующим образом.

Обычно до момента начала режима торможения ТС с проскальзыванием направление l совпадает с направлением x (т.е. $\psi = 0$), так как поперечные силы, возникающие от действия возмущающего момента M_z (являющегося следствием, например, различия условий сцепления под колесами), не превосходят P_T (по модулю).

Анизотропия трения пневматика о дорогу проявляется в отличии $\nu_{q_{ij}}$ от $\nu_{l_{ij}}$, функции p_q от функции p_l (например, из-за особенностей рисунка протектора) [7], но в настоящей работе анизотропией пренебрегаем.

Как видно из выражений (1), (2), $P_{q_{ij}}$ является не управляемой тормозами составляющей трения (в отличие от $P_{l_{ij}}$); таким образом, быстрое возрастание ψ — закручивание — ведет не только к такому очевидному резкому ухудшению ситуации, что водитель не способен управлять направлением и характером движения ТС с АБС, но (в силу быстрого возрастания доли $P_{q_{ij}}$ в P_{ij}) также к ослаблению потенциальной возможности активно бороться с закручиванием. Назовем это ослаблением АБС-управляемости.

Для предотвращения входа ТС в аварийное закручивание и полной потери АБС-управляемости необходимо периодически, до сильного возрастания угла ψ , ненадолго прекращать торможение (эта задача также возложена на АБС); при движении ТС с АБС реализуется режим работы АБС, соответствующий траектории $\alpha\beta\gamma$ на рис. 3 и далее, по возможности, траектории $\gamma\theta\delta$ для каждого колеса [3]. Тогда проскальзывание по направлению l прекратится, а если угол ψ мал, то проскальзывание прекратится также по направлению q . В режиме качения (точка δ на рис. 3) силы трения под колесами, имеющие большие значения, во-первых, остановят закручивание и заставят ТС двигаться только вдоль направления l , во-вторых, рулевое управление вновь станет эффективным, что позволит изменить направления l , x и $V_{ТС}$ и получить требуемое направление движения, т.е. обеспечить ситуацию, соответствующую $\psi = 0$, к началу следующего срыва качения. Такие манипуляции позволяют ТС с АБС обеспечивать управляемость, близкую к максимально возможной в режиме проскальзывания при малых ψ .

Если пневматик сминаемый (см. рис. 2), то получим

$$V_{\text{нат } ij} = V_l^{A_{ij}} + \dot{l}_{A_{ij}o}^{O_{ij}}, \quad V_{\text{нак } ij} = \Omega_{yij} \left(R + z_{A_{ij}o}^{A_{ij}} \right), \quad (3)$$

где $\dot{l}_{A_{ij}o}^{O_{ij}}$ — скорость деформации пневматика ij в точке O_{ij} в направлении оси $l_{A_{ij}o}$; $z_{A_{ij}o}^{A_{ij}}$ — перемещение точки A_{ij} в направлении оси $z_{A_{ij}o}$ из-за деформации пневматика ij .

Таким образом, при движении на сминаемых пневматиках согласно выражениям (2), (3) имеем

$$s_{l_{ij}} = \frac{\left| V_x^{A_{ij}} \cos \psi - V_y^{A_{ij}} \sin \psi + \dot{l}_{A_{ij}o}^{O_{ij}} - \Omega_{yij} (R + z_{A_{ij}o}^{A_{ij}}) \right|}{\left| V_x^{A_{ij}} \cos \psi - V_y^{A_{ij}} \sin \psi + \dot{l}_{A_{ij}o}^{O_{ij}} \right|},$$

$$s_{q_{ij}} = \frac{\left| -V_x^{A_{ij}} \sin \psi + V_y^{A_{ij}} \cos \psi + \dot{q}_{A_{ij}o}^{O_{ij}} \right|}{\left| V_x^{A_{ij}} \cos \psi - V_y^{A_{ij}} \sin \psi + \dot{l}_{A_{ij}o}^{O_{ij}} \right|},$$

где $\dot{q}_{A_{ij}o}^{O_{ij}}$ — скорость деформации пневматика ij в точке O_{ij} в направлении оси $q_{A_{ij}o}$.

Предполагается, что углы ψ , ϑ , γ малы и их синусы можно считать равными нулю, а косинусы — единице. Введем

$$\Omega_z = \frac{d\psi}{dt}, \quad \Omega_y = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \Omega_x = \frac{d\gamma}{dt}$$

— угловые скорости вращения корпуса относительно соответствующих осей.

Учет скорости, на которой происходит проскальзывание, необходим для учета изменения функции $p(s)$, где $s = s_l$ или $s = s_q$, но поскольку в окрестности точки γ (на рис. 4), в которой система должна удерживаться за счет работы АБС, функция $p(s)$ неизменна (линейна), то можно предположить, что зависимость от проскальзывания описывается функцией $p_l(V_{\text{пр}})$, а не функцией $p(s)$, как предполагалось ранее; это позволяет избавиться от ее нелинейного аргумента (см. формулу (2)).

Из приведенных формул видно, что силы трения в каждый момент времени можно вычислить, если известны параметры движения ТС, которые определяются из решения уравнений движения ТС.

Вывод уравнения движения колесного ТС с АБС в режиме торможения с проскальзыванием колес исходя из принципа Даламбера. Пусть линия $C_{p0} C_{n0}$ (см. рис. 1) вертикальна (при этом точки C_{n0} , C и C' совпадают).

“Первопричинная” сила — сила веса ТС (поскольку рассматривается движение по гладкой поверхности) вызывает смещение центра масс вдоль оси z (рис. 5) по следующему закону:

$$\frac{m_p}{4} \frac{d^2 z_{\text{цм}}^{A_{kij}}}{dt^2} + R_{ij} \frac{d(z_{\text{цм}}^{A_{kij}} - z_{A_{ij}o}^{A_{ij}})}{dt} + C_{ij}(z_{\text{цм}}^{A_{kij}} - z_{A_{ij}o}^{A_{ij}}) = \frac{m_p}{4} g + \frac{F_{az}}{4};$$

$$m_{ij} \frac{d^2 z_{A_{ij}o}^{A_{ij}}}{dt^2} + R_{z_{ij}} \frac{dz_{A_{ij}o}^{A_{ij}}}{dt} + C_{z_{ij}} z_{A_{ij}o}^{A_{ij}} = m_{ij} g + R_{ij} \frac{d(z_{\text{цм}}^{A_{kij}} - z_{A_{ij}o}^{A_{ij}})}{dt} + C_{ij}(z_{\text{цм}}^{A_{kij}} - z_{A_{ij}o}^{A_{ij}});$$

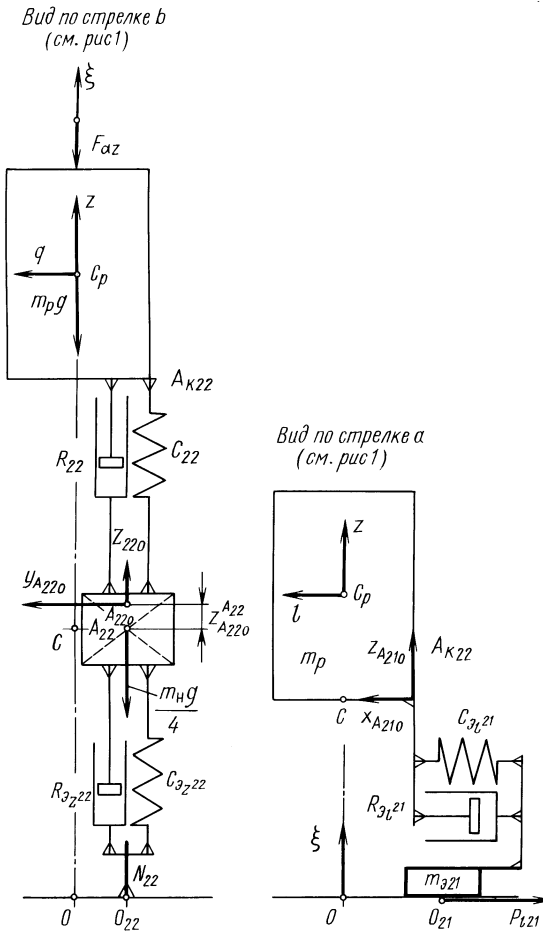


Рис. 5. Расчетная схема движения ТС с АБС в режиме торможения с проскальзыванием

здесь $m_{ij} = m_{\text{п}ij} + \frac{m_{\text{п}}}{4}$ — масса колеса ij ; g — ускорение свободного падения; $z_{\text{цм}}^{A_{kij}}$ — смещение точки A_{kij} вдоль оси z из-за движения центра масс корпуса; F_{az} — составляющая силы аэродинамического сопротивления вдоль оси z ; R_{ij}, C_{ij} — коэффициенты соответственно вязкого и упругого сопротивлений рессоры ij ; $R_{\text{э}zij}, C_{\text{э}zij}$ — эквивалентные коэффициенты соответственно вязкого и упругого сопротивлений пневматика ij в направлении оси z_{ij} ;

$$R_{\text{э}zij} \frac{dz_{A_{ij}o}^{A_{ij}}}{dt} + C_{\text{э}zij} z_{A_{ij}o}^{A_{ij}} = -N_{ij}$$

— нормальная реакция дороги на пневматик ij . Эта реакция вызывает “второпричинные” силы — проекции силы трения скольжения $P_{l_{ij}}$ и $P_{q_{ij}}$, которые, в свою очередь, вызывают смещение точек O_{ij} вдоль осей $l_{A_{ij}o}$ и $q_{A_{ij}o}$ по следующему закону:

$$m_{\text{э}ij} \frac{d^2 l_{A_{ij}o}^{O_{ij}}}{dt^2} + R_{\text{э}lij} \frac{dl_{A_{ij}o}^{O_{ij}}}{dt} + C_{\text{э}lij} l_{A_{ij}o}^{O_{ij}} = P_{l_{ij}} + m_{\text{э}ij} \frac{d\psi}{dt} \frac{dq_{A_{ij}o}^{O_{ij}}}{dt},$$

$$m_{\text{э}ij} \frac{d^2 q_{A_{ij}o}^{O_{ij}}}{dt^2} + R_{\text{э}qij} \frac{dq_{A_{ij}o}^{O_{ij}}}{dt} + C_{\text{э}qij} q_{A_{ij}o}^{O_{ij}} = P_{q_{ij}} - m_{\text{э}ij} \frac{d\psi}{dt} \frac{dl_{A_{ij}o}^{O_{ij}}}{dt},$$

где $R_{\text{э}lij}, C_{\text{э}lij}, R_{\text{э}qij}, C_{\text{э}qij}$ — эквивалентные коэффициенты вязкого и упругого сопротивлений пневматика ij в направлении осей l_{ij} и q_{ij} , а также вызывают появление “третьепричинных” сил $P_{l_{ij}}^{A_{ij}}, P_{q_{ij}}^{A_{ij}}$ — проекций сил торможения, передаваемых в направлении осей соответственно l_o, q_o через пневматик ij на точку A_{ij} :

$$P_{q_{ij}}^{A_{ij}} = R_{\text{э}qij} \frac{dq_{A_{ij}o}^{O_{ij}}}{dt} + C_{\text{э}qij} q_{A_{ij}o}^{O_{ij}}; \quad P_{l_{ij}}^{A_{ij}} = R_{\text{э}lij} \frac{dl_{A_{ij}o}^{O_{ij}}}{dt} + C_{\text{э}lij} l_{A_{ij}o}^{O_{ij}}.$$

Из-за сил $P_{l_{ij}}^{A_{ij}}, P_{q_{ij}}^{A_{ij}}$ изменится положение точки C' вдоль осей l и q , описываемое координатами $l^{C'} = l, q^{C'} = q$, по закону

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} - m \frac{d\psi}{dt} \frac{dq}{dt} = \sum_{i,j=1}^2 P_{A_{lij}}^{A_{ij}} + F_{al}, \quad (4)$$

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} + m \frac{d\psi}{dt} \frac{dl}{dt} = \sum_{i,j=1}^2 P_{A_{qij}}^{A_{ij}} + F_{aq}; \quad (5)$$

здесь F_{al}, F_{aq} — составляющие силы аэродинамического сопротивления вдоль осей l и q ;

$$m = m_{\text{ТС}} = m_{\text{п}} + \sum_{i,j=1}^2 m_{ij};$$

$m \frac{d\psi}{dt} \frac{dl}{dt}$, $m \frac{d\psi}{dt} \frac{dq}{dt}$ — компоненты сил инерции, появляющиеся вследствие того, что описывается движение во вращающейся системе координат.

Из-за сил $P_{l_{ij}}^{A_{ij}}$, $P_{q_{ij}}^{A_{ij}}$ теперь возникнут смещения точки C' в направлении осей l и q . Помимо вращения корпуса (угол ψ) начнет поворачиваться вектор скорости ТС (угол Ψ на рис. 1) согласно соотношению

$$\frac{dV_y}{dt} = V_x \frac{d\Psi}{dt},$$

или

$$\frac{dV_x}{dt} = V_y \frac{d\Psi}{dt},$$

описывающему связь поперечного ускорения тела с изменением угла поворота вектора его продольной скорости.

Проекции сил трения $P_{l_{ij}}$, $P_{q_{ij}}$ и силы N_{ij} являются причиной не только описанного выше движения центра масс ТС, но и движения ТС вокруг центра масс:

$$J_z \frac{d^2\psi}{dt^2} = \left((P_{l_{11}}^{O_{11}} + P_{l_{21}}^{O_{21}}) - (P_{l_{21}}^{O_{12}} + P_{l_{22}}^{O_{22}}) \right) B + \\ + (P_{q_{11}}^{O_{11}} + P_{q_{12}}^{O_{12}}) A_1 - (P_{q_{21}}^{O_{21}} + P_{q_{22}}^{O_{22}}) A_2 + M_{az};$$

$$J_q \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{A_1} \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{dz_{A_{1j}^{A_{1j}}}}{dt} \right) R_{1j} A_1 - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{A_2} \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{dz_{A_{2j}^{A_{2j}}}}{dt} \right) R_{2j} A_2 + \\ + \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\vartheta}{A_1} - z_{A_{1j}^{A_{1j}}} \right) C_{1j} A_1 - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\vartheta}{A_2} - z_{A_{2j}^{A_{2j}}} \right) C_{2j} A_2 = \\ = \sum_{i,j=1}^2 P_{l_{ij}}^{O_{ij}} (D_2 + z^{A_{kij}}) + (|N_{21}| + |N_{22}|) A_2 - (|N_{11}| + |N_{12}|) A_1 + M_{al};$$

$$J_l \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \left(\sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{B} \frac{d\gamma}{dt} - \frac{dz_{A_{i1}^{A_{i1}}}}{dt} \right) R_{i1} - \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{B} \frac{d\gamma}{dt} - \frac{dz_{A_{i2}^{A_{i2}}}}{dt} \right) R_{i2} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\gamma}{B} - z_{A_{i1}^{A_{i1}}} \right) C_{i1} - \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\gamma}{B} - z_{A_{i2}^{A_{i2}}} \right) C_{i2} \right) B = \\ = \sum_{i,j=1}^2 P_{q_{ij}}^{O_{ij}} (D_2 + z^{A_{kij}}) + \left((|N_{11}| + |N_{21}|) - (|N_{12}| + |N_{22}|) \right) B + M_{aq};$$

(6)

здесь J_z — момент инерции ТС относительно оси z ; J_q, J_l — моменты инерции корпуса ТС относительно осей l_o и q_o ; M_{az}, M_{al}, M_{aq} — моменты аэродинамического сопротивления вокруг соответствующих осей; $B = B_1 = B_2$.

Каналы управления движением колесного ТС. Из обобщения формулы (1) для всех колес и из формулы (3) следует, что доступной АБС-воздействию на процесс торможения (с помощью тормозных колодок) ТС с АБС в режиме с проскальзыванием колес является угловая скорость вращения колес Ω_{yij} . Она доступна изменению за счет создания соответствующими колодками тормозных моментов M_{rij} . Привод колодок может быть электромеханическим (в зависимости от требуемой мощности и особенности конструкции), он управляется напряжением u_T . Работа этого привода в линейном приближении описывается уравнением

$$T_{rij} \frac{dM_{rij}}{dt} + M_{rij} = K_T u_{rij}.$$

Тормозной момент M_{rij} приводит к изменению Ω_{yij} по закону

$$J_{yij} \frac{d\Omega_{yij}}{dt} = -M_{rij} + P_{lij} (R + z_{Aij_o}^{Aij}).$$

Через Ω_{yij} сигналы u_{rij} управляют тормозящими силами P_{lij} влияют на все движение ТС с АБС. Таким образом, u_{rij} — АБС-управляющие воздействия ТС.

Каналы измерения. Напряжение с датчиков угловой скорости колес имеет вид

$$u_{dcij} = k_{dc} \Omega_{yij}.$$

Если точно известно, что колесо ij находится в режиме торможения качения, то напряжение, снимаемое с датчика его угловой скорости, позволяет получить сигнал, пропорциональный V_l^{Aij} этого колеса:

$$V_l^{Aij} = u_{dcij} (R - z_{Aij_o}^{Aij}).$$

Вывод уравнений движения системы с помощью уравнения Лагранжа II рода. С учетом исследования системы в соответствии с принципом Даламбера в качестве обобщенных координат выбраны следующие: ξ^C, η^C, ζ^C — координаты точки C ; ψ, ϑ, γ — углы поворота корпуса ТС; $x_{Aij_o}^{Aij}, y_{Aij_o}^{Aij}, z_{Aij_o}^{Aij}$ — координаты перемещения точек A_{ij} из-за деформации пневматика ij в направлении осей $x_{Aij}, y_{Aij}, z_{Aij}$ соответственно; φ_{ij} — угол вращения колеса ij .

При качении колес со скольжением ТС является голономной системой [8].

Для удобства расчетов введем векторы обобщенных координат:

$$X^{C_0} = \begin{bmatrix} \xi^{C_0} \\ \eta^{C_0} \\ \zeta^{C_0} \end{bmatrix}; \quad \Theta = \begin{bmatrix} \psi \\ \gamma \\ \vartheta \end{bmatrix}; \quad X_{ij}^{\text{ПНВ}} = \begin{bmatrix} x_{A_{ij}^0}^{A_{ij}} \\ y_{A_{ij}^0}^{A_{ij}} \\ z_{A_{ij}^0}^{A_{ij}} \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix}.$$

Векторы без нижнего индекса соответствуют неподвижной системе координат C_0xyz .

Отметим, что деформация каждой рессоры выражается через ξ^C и углы γ, ϑ .

Связь между $C_px_1y_1z_1$ и $C_px_cy_cz_c$ задана матрицей перехода $A = A_\gamma A_\vartheta A_\psi$, где $A_\gamma, A_\vartheta, A_\psi$ — матрицы единичных поворотов относительно соответствующих осей [9].

Вычислим обобщенные силы, действующие на ТС [8]:

$$Q_\Theta = \begin{bmatrix} P_{q11}A_1 + P_{q12}A_1 - P_{q21}A_2 - P_{q22}A_2 + B \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{j+1} P_{lij} + M_{az} \\ (|F_{\text{pec}21}| + |F_{\text{pec}22}|)A_2 - (|F_{\text{pec}11}| + |F_{\text{pec}12}|)A_1 + M_{aq} \\ ((|F_{\text{pec}11}| + |F_{\text{pec}21}|) - (|F_{\text{pec}12}| + |F_{\text{pec}22}|)) B + M_{al} \end{bmatrix},$$

$$Q_{X^{C_0}} = \begin{bmatrix} - \sum_{i,j=1}^2 P_{qij} \sin \psi - \sum_{i,j=1}^2 P_{lij} \cos \psi - F_{ax} \\ - \sum_{i,j=1}^2 P_{qij} \cos \psi - \sum_{i,j=1}^2 P_{lij} \sin \psi - F_{ay} \\ - \left(m_p + \sum_{i,j}^2 m_{nij} \right) g - F_{ax} \end{bmatrix},$$

$$Q_{X_{ij}^{\text{ПНВ}}} = \begin{bmatrix} -R_{\vartheta lij} \frac{dl_{A_{ij}}^{O_{ij}}}{dt} - C_{\vartheta lij} l_{A_{ij}}^{O_{ij}} \\ -R_{\vartheta qij} \frac{dq_{A_{ij}}^{O_{ij}}}{dt} - C_{\vartheta qij} q_{A_{ij}}^{O_{ij}} \\ -R_{\vartheta zij} \frac{dz_{A_{ij}}^{O_{ij}}}{dt} - C_{\vartheta zij} z_{A_{ij}}^{O_{ij}} \end{bmatrix}, \quad Q_{\varphi_{ij}} = -M_T - P_{lij} \left(R + z_{A_{ij}^0}^{A_{ij}} \right),$$

где

$$F_{\text{pec}ij} = R_{ij} \frac{d \left(z_{\text{ЦМ}}^{A_{kij}} - z_{A_{ij}^0}^{A_{ij}} \right)}{dt} + C_{ij} \left(z_{\text{ЦМ}}^{A_{kij}} - z_{A_{ij}^0}^{A_{ij}} \right).$$

Уравнения движения колесного ТС с АБС в режиме торможения с проскальзыванием колес. Для получения уравнений движения используем уравнение Лагранжа II рода [7] и получаем искомые уравнения:

$$m_p \left(\ddot{X}^{C_0} + \ddot{X}_{ij}^{\text{ПНВ}} + \ddot{A}^T D_K \right) + \sum_{i,j} m_{ij} \left(\ddot{X}^{C_0} + \ddot{X}_{ij}^{\text{ПНВ}} + \ddot{A}_\psi^T D_{nij} \right) = Q_{X^{C_0}},$$

$$m_{ij} \left(\ddot{X}^{C_0} + \ddot{X}_{ij}^{\text{ПНВ}} + \ddot{A}_\psi^T D_{nij} \right) = Q_{X_{ij}^{\text{ПНВ}}},$$

$$\begin{aligned} & J^2 \ddot{\Theta} + m_p \frac{\partial \dot{A}^T D_K}{\partial \dot{\Theta}} \left(\ddot{X}^{C_0} + \ddot{X}_{ij}^{\text{ПНВ}} + \ddot{A}^T D_K \right) + \\ & + m_p \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{A}^T D_K}{\partial \dot{\Theta}} \left(\dot{X}^{C_0} + \dot{X}_{ij}^{\text{ПНВ}} + \dot{A}^T D_K \right) + \\ & + \sum_{i,j} m_{ij} \frac{\partial \dot{A}_\psi^T D_{nij}}{\partial \dot{\Theta}} \left(\ddot{X}^{C_0} + \ddot{X}_{ij}^{\text{ПНВ}} + \ddot{A}_\psi^T D_{nij} \right) + \\ & + \sum_{i,j} m_{ij} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{A}_\psi^T D_{nij}}{\partial \dot{\Theta}} \left(\dot{X}^{C_0} + \dot{X}_{ij}^{\text{ПНВ}} + \dot{A}_\psi^T D_{nij} \right) - \\ & - m_p \frac{\partial \dot{A}^T D_K}{\partial \Theta} \left(\dot{X}^{C_0} + \dot{X}_{ij}^{\text{ПНВ}} + \dot{A}^T D_K \right) - \\ & - \sum_{i,j} m_{ij} \frac{\partial \dot{A}_\psi^T D_{nij}}{\partial \Theta} \left(\dot{X}^{C_0} + \dot{X}_{ij}^{\text{ПНВ}} + \dot{A}_\psi^T D_{nij} \right) = Q_\Theta, \end{aligned}$$

$$J_{y_{ij}} \ddot{\Phi} = Q_{\varphi_{ij}},$$

где J — тензор инерции ТС; $J_{y_{ij}}$ — полярный момент инерции колеса ij ; $D_{nij} = [A_i \ B_j \ 0]^T$ — положение колеса ij в системе координат $Cx_1y_1z_1$; вектор $D_K = [CC' \ \delta C \ D_3]^T$ задает положение корпуса относительно $Cx_1y_1z_1$; δC — смещение по оси q центров масс корпуса и НЧ (так называемая асимметрия).

Тензор инерции J имеет следующий вид:

$$J = \begin{bmatrix} \sqrt{J_{x_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{J_{y_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{J_{z_1}} \end{bmatrix},$$

где J_{x_1} , J_{y_1} , J_{z_1} — моменты инерции ТС относительно соответствующих осей.

Упрощенные модели. На основании анализа и моделирования уравнений видно, что на изменение ψ основное влияние оказывает

изменение сил на колесах, возможное несовпадение C_p с плоскостью $O_{11}O_{12}O_{22}$ и возникновение из-за этого момента сил инерции относительно точки C , приводящее к изменению N_{ij} не более чем на 15% по сравнению с их обычным значением. Изменением γ можно пренебречь, поскольку оно не оказывает существенного влияния на N_{ij} . Перемещение C из-за деформации пневматика гораздо меньше перемещения из-за деформации рессоры, и оба эти перемещения мало влияют на $\dot{\psi}$. Поэтому предлагаются следующие упрощения: пренебрегаем влиянием пневматиков и рессор; $m_{ij} = m_H$ (для всех i, j); синусы углов тангажа и крена полагаем равными нулю, а косинусы принимаем равными единице (вследствие их малости); курсовой угол изменяется в небольших пределах из-за работы блока, обеспечивающего курсовую устойчивость, таким образом, в уравнениях заменяем синус курса на угол, а косинус на единицу; скорости тангажа и крена не оказывают существенного влияния на изменение реакций дороги. Деформацией пневматиков и рессор пренебрегаем. Пренебрегаем также величинами второго порядка малости. В результате обе полные модели позволяют получить следующую упрощенную модель:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi^{\text{TC}} &= \frac{1}{(m_p + 4m_H)} \left(-\sum_{i,j} P_{l_{ij}} - \psi \sum_{i,j} P_{q_{ij}} \right), \\ \dot{V}_\eta^{\text{TC}} &= \frac{1}{(m_p + 4m_H)} \left(-\psi \sum_{i,j} P_{l_{ij}} - \sum_{i,j} P_{q_{ij}} \right), \\ J_{y_{ij}} \frac{d\Omega_{y_{ij}}}{dt} &= -M_{r_{ij}} - P_{l_{ij}} (R + z_{A_{ij}}^{A_{ij}}), \\ J\ddot{\psi} - 2(A_1 - A_2) m_H \dot{V}_\xi^{\text{TC}} \psi + 2(A_1 - A_2) m_H \dot{V}_\eta^{\text{TC}} &= \\ &= P_{q_{11}} A_1 + P_{q_{12}} A_1 - P_{q_{21}} A_2 - P_{q_{22}} A_2 + B \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{j+1} P_{l_{ij}}, \\ P_{q_{ij}} &= \Delta_{ij} p_q (-\psi(\dot{x}_c + \dot{\psi} B_j) + (\dot{y}_c + \dot{\psi} A_i)), \\ P_{l_{ij}} &= \Delta_{ij} p_l (\dot{x}_c + \dot{\psi} B_j + \psi(\dot{y}_c + \dot{\psi} A_i) + \dot{\varphi}_{ij} R); \end{aligned} \quad (8)$$

здесь Δ_{ij} — коэффициент, учитывающий возможное изменение сцепления колеса ij с дорогой.

Результаты моделирования. Моделирование проведено для ТС, имеющего следующие параметры (автобуса): $m_p = 10$ т, $m_{ij} = 100$ кг (для всех i, j), $R = 25$ см, $J_{x_1} = 10$ т · м², $J_{y_1} = 100$ т · м², $J_{z_1} = 20$ т · м², $J_{y_{ij}} = 5$ кг · м², $M_T = 1$ кН · м², $A_1 = 5$ м, $A_2 = 4,5$ м, $B_1 = B_2 = 2$ м, $D_k = [0 \ 0 \ 1]^T$ м; значения аэродинамических сил и моментов приняты равными нулю. Считаем, что $\Delta_{11} = \Delta_{21}$, $\Delta_{12} = \Delta_{22}$. Параметр μ

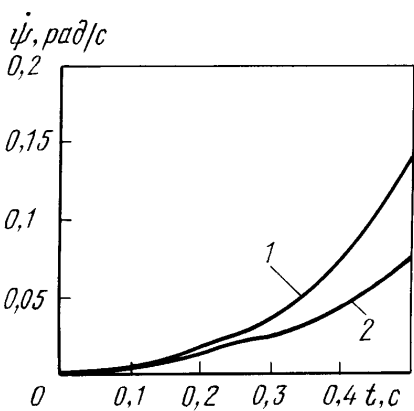


Рис. 6. Влияние рессор, $\delta C = 0$:
1 — полные модели, 2 — модели без рессор и пневматиков

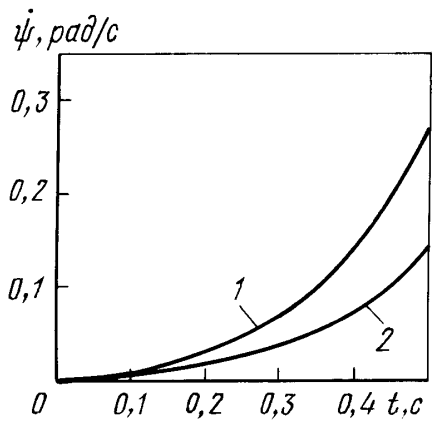


Рис. 7. Влияние нецентровки:
1 — модели при $\delta C = 0$, 2 — вторая модель при $\delta C = 0,5$ м

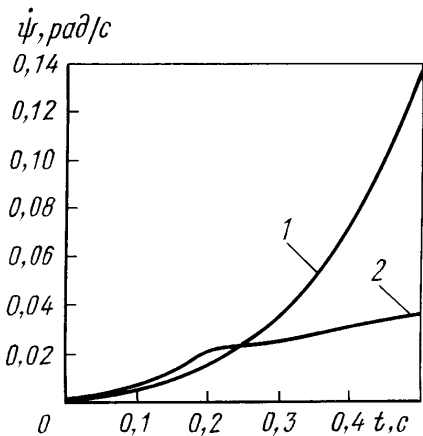


Рис. 8. Угловые скорости рыскания:
1 — полная модель, 2 — упрощенная модель

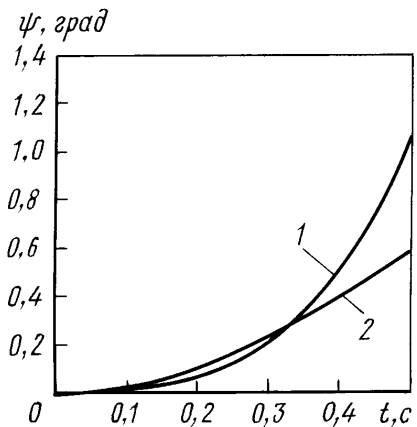


Рис. 9. Углы рыскания:
1 — полная модель, 2 — упрощенная модель

является микстом: $\mu = \Delta_{11} - \Delta_{22}$.

Результаты моделирования при $\mu = 0,9$ представлены на рис. 6–9.

Выводы. В упрощенной и полной моделях с высокой степенью точности совпадают значения ψ и $\dot{\psi}$ в начале движения, что подтверждает правильность сделанных предположений. Модель, сформированная на основе уравнений Лагранжа II рода, позволяет, в отличие от модели, основанной на принципе Даламбера, учитывать смещения центра масс ТС относительно геометрического центра.

Полные математические модели движения ТС описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений, решение которых в аналитическом виде не представляется возможным.

На основе предложенных моделей можно прогнозировать поведение ТС с АБС для управления в реальном масштабе времени [1, 3, 5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамика системы дорога–шина–автомобиль–водитель / Под ред. А.А. Хачатурова. – М.: Машиностроение, 1976.
2. Коньков В.Г., Гараев Д.Я., Гараева И.П. Синтез робастного регулятора движения автомобиля с АБС // Труды 4-го междунар. симпозиума “Интелс-2000”. – М.: Русаки, 2000. – С. 114–116.
3. Pat. 5517099 USA. Method and Aparatus for Robust Integral-Pulse Modulation Control of a Servodrive of Unknown Dynamics / M.Kh. Magomedov. – Publ. 14.05.1996.
4. Magomedov M.Kh., Aleksandrov A., Pupkov K.A. Robust Adaptive Stabilisation of Moving Car Under Braking with ABS in Control Circuit // ATTCE 2001 Proceedings Volume Chassis and Total Vehicle (Barselona, 2001). – P. 7–17.
5. Коньков В.Г., Андриков Д.А. База знаний интеллектуальной системы управления торможением транспортного средства с антиблокировочной системой в режиме с проскальзыванием колес // Труды Пятого междунар. симпозиума INTELS’2002 (Калуга, 2002). – Калуга: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
6. Крагельский И.В. Трение и износ. – М.: Машиностроение, 1968.
7. Ахметшин А.М. Самообучающаяся антиблокировочная тормозная система колесных машин. – М.: МГИУ, 2002.
8. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1991.
9. Лобусов Е.С. Определение углового положения систем координат. Кинематические соотношения углового движения / Под ред. В.А. Карабанова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992.

Статья поступила в редакцию 26.02.2003

Виктор Григорьевич Коньков родился в 1935 г., окончил в 1959 г. МВТУ им. Н.Э.Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор более 70 научных работ в области теории автоматического управления.

V.G. Konkov (b. 1935) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1959. Ph. D. (Eng.), ass. professor of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 70 publications in the field of theory of automatic control.



Денис Анатольевич Андриков родился в 1981 г. Студент МГТУ им. Н.Э.Баумана, бакалавр техники и технологий по направлению “Автоматизация и управление”. Автор 5 научных работ в области теории автоматического управления.

D.A. Andrikov (b. 1981). Student of the Bauman Moscow State Technical University, Bachelor for engineering and technology in Automation and Control. Author of 5 publications in the field of theory of automatic control.