УДК 681.3.04+658.012

А. А. Грешилов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ

Рассмотрены условия, при которых оптимальное решение задачи линейного программирования не изменяется при изменении коэффициентов целевой функции, элементов матрицы условий-ограничений и координат вектора правой части приведенной системы уравнений. Приведены алгоритмы нахождения допустимой области неопределенности указанных параметров задачи.

Задачи линейного программирования широко используются во многих областях науки. Либо математическая постановка задачи приводит к задачам линейного программирования, либо в процессе перехода от непрерывных функций к их дискретным аналогам возникают задачи линейного программирования, например, как в задачах оптимального управления и принятия решений [1–7]. При этом важно знать, как изменится решение задачи линейного программирования при изменении ее параметров: коэффициентов целевой функции, элементов матрицы и правой части условий-ограничений. Особенно важно знать, при каких изменениях параметров задачи оптимальное решение этой задачи остается неизменным. Изменение параметров задачи линейного программирования может происходить за счет изменения условий функционирования описываемых объектов (например, изменяются цены на комплектующие изделия, на трудовые ресурсы, изменяется стоимость продукции на рынке и т.д.). Эти изменения обуславливают неопределенность параметров задачи и являются в данном случае детерминированными величинами.

В ряде других случаев параметры задачи линейного программирования являются случайными величинами, и тогда важно знать, как изменяется решение задачи при различных реализациях. При этом необходимо иметь по крайней мере сведения о математическом ожидании и дисперсии этих случайных величин, если нет возможности оценить их функции распределения. В случае неопределенности значений параметров необходимо указать соответствующую им доверительную вероятность.

Как правило, в обоих случаях решают серию прямых близких задач, изменяя значения параметров [1, 4–6].

Особенность задач линейного программирования состоит в том, что полученное оптимальное решение может не изменяться при изменении значений параметров в целевой функции и в условиях-ограничениях в достаточно широких пределах. Более привычным является вариант, при котором небольшим изменениям параметров задачи обязательно соответствуют изменения решения — изменяются координаты точки оптимума [1]. Для исследования изменения решения можно использовать параметрическое программирование и определять изменение решения задачи линейного программирования в зависимости от параметра t, включенного в коэффициенты целевой функции и в элементы матрицы и правой части условий-ограничений [3, 4]. Однако эти процедуры даже для одного параметра t громоздки; к тому же, путем введения одного параметра t не удается описать все возможные изменения параметров задачи. Необходимо разработать алгоритмы, позволяющие определить допустимые множества значений параметров задачи линейного программирования и не приводящие к изменению найденного оптимального решения, и, таким образом, указать диапазон изменения каждого параметра.

Рассмотрим задачу линейного программирования (с одним критерием): целевая функция имеет вид

$$\max \vec{c}\,\vec{x} = z \tag{1}$$

при условиях

$$A_1\vec{x} \geqslant \vec{b}_1, \tag{2}$$

$$A_2\vec{x} = \vec{b}_2, \quad \vec{x} \geqslant 0; \tag{3}$$

здесь $\vec{c}$ — вектор коэффициентов целевой функции; z — значение целевой функции; $\vec{x}$ — вектор исходных (структурных) переменных; $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ — векторы правых частей; A_1 и A_2 — матрицы системы ограничений неравенств и равенств.

Для нахождения аналитического решения задача линейного программирования представляется в канонической форме [1, 6]: целевая функция имеет вид

$$\max \vec{c}\,\vec{x} = z$$

при условиях

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad \vec{x} \geqslant 0, \tag{4}$$

где $\vec{x}$ — вектор исходных и дополнительных (слабых) переменных; A — матрица размерности $m \times n$, расширенная за счет столбцов дополнительных переменных, вводимых для преобразования неравенств (2) в равенства; $\vec{b}$ — вектор правых частей (объединяет векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$); $\vec{c}$ — вектор коэффициентов целевой функции.

Исследуем устойчивость точки оптимального решения задачи (1)–(3) при следующих условиях:

1) неопределенность или погрешность содержится только в коэффициентах $\vec{c}$ целевой функции;

2) неопределенность или погрешность содержится только в элементах вектора $\vec{b}$;

3) неопределенность или погрешность содержится только в элементах матриц A_1 и A_2 (т.е. в элементах матрицы A, за исключением элементов, относящихся к дополнительным переменным).

Алгоритмы учета других комбинаций неопределенностей основываются на алгоритмах для этих случаев.

Будем в дальнейшем полагать, что задача линейного программирования решается с помощью симплекс-метода [1, 3, 6].

Неопределенность в коэффициентах целевой функции. Точка оптимума в симплекс-методе определяется условием $c_j - z_j \leqslant 0$, $z_j = (\vec{c}_B \vec{a}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $\vec{c}_B$ — вектор элементов c_j, относящихся к базисным переменным; $\vec{a}_j$ — j-й столбец матрицы A [3].

Значение целевой функции имеет вид $z = \vec{c}_B \vec{b}$.

Пусть вместо c_j имеем значение $c_j + \Delta c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$; тогда условие оптимума будет определяться величиной

$$c_j + \Delta c_j - ((\vec{c}_B + \Delta \vec{c}_B)\vec{a}_j) = \\ = (c_j - (\vec{c}_B \vec{a}_j)) + (\Delta c_j - (\Delta \vec{c}_B \vec{a}_j)), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (5)$$

Невыполнение условия оптимальности зависит от конкретных значений последнего слагаемого в выражении (5): если всегда $\Delta c_j - (\Delta \vec{c}_B \vec{a}_j) \leqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то оптимальное решение не изменяется; при наличии хотя бы одного условия $\Delta c_j - (\Delta \vec{c}_B \vec{a}_j) > 0$ возможно изменение оптимального решения.

Система неравенств

$$(c_j - (\vec{c}_B \vec{a}_j)) + (\Delta c_j - (\Delta \vec{c}_B \vec{a}_j)) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad (6)$$

определяет множество значений элементов Δc_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ (включающее также элементы вектора $\Delta \vec{c}_B$), при которых условия оптимума в данной точке выполнены.

Пример. Рассмотрим задачу линейного программирования о выпуске продукции предприятием [6]. Математическая модель этой задачи имеет следующий вид:

$$\max z = 10x_1 + 20x_2$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + 3{,}5x_2 &\leqslant 350,\\ 2x_1 + 0{,}5x_2 &\leqslant 240,\\ x_1 + x_2 &\leqslant 150,\\ x_1 + x_2 &\geqslant 110,\\ 10x_1 + 20x_2 &\geqslant 1400,\\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Оптимальное решение задачи приведено в симплекс-таблице:

Базис	$\vec{b}$	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$
x_7	90	0	0	$1/5$	0	$3/5$	0	1
x_4	120	0	0	$3/5$	1	$-26/5$	0	0
x_6	40	0	0	0	0	1	1	0
x_1	70	1	0	$-1/5$	0	$7/5$	0	0
x_2	80	0	1	$1/5$	0	$-2/5$	0	0
z	2300	0	0	2	0	6	0	0

Элементы строки z для переменных x_j, $j = 1, 2, \ldots, 7$, взятые с противоположным знаком, являются значениями выражения $c_j - z_j = c_j - (\vec{c}_B \vec{a}_j)$, по которым судят об оптимальности решения. Различие в знаках обусловлено правилами заполнения симплекс-таблиц.

Неопределенность содержится в коэффициентах исходной целевой функции. Поэтому $\Delta c_j \neq 0$, $j = 1, 2$; $\Delta c_j = 0$, $j = 3, \ldots, 7$; $\Delta \vec{c}_B = \{0, 0, 0, \Delta c_1, \Delta c_2\}$. Рассчитаем значения $\Delta_j = \Delta c_j - (\Delta \vec{c}_B \vec{a}_j)$ для различных j:

$\Delta_j = 0$ при $j = 1, 2, 4, 6, 7$;

$\Delta_3 = \frac{1}{5}\Delta c_1 - \frac{1}{5}\Delta c_2$ при $j = 3$;

$\Delta_5 = -\frac{7}{5}\Delta c_1 + \frac{2}{5}\Delta c_2$ при $j = 5$.

Таким образом, на выбор оптимальной точки в данном случае оказывают влияние только коэффициенты при $j = 3$ и $j = 5$. Точка оптимума не изменится для тех значений Δc_1 и Δc_2, когда согласно системе (6) имеем

$$-2 + \frac{1}{5}\Delta c_1 - \frac{1}{5}\Delta c_2 \leqslant 0,$$
$$-6 - \frac{7}{5}\Delta c_1 + \frac{2}{5}\Delta c_2 \leqslant 0.$$

Множество S таких значений представляет собой часть плоскости Δc_1, Δc_2, заключенную между двумя лучами, выходящими из точки $(-10; -20)$ в направлениях $\vec{v}_1 = \{1; 1\}$ и $\vec{v}_2 = \{1; 3{,}5\}$.

Проблему устойчивости оптимального решения задачи линейного программирования при неопределенности только в коэффициентах целевой функции можно свести к геометрическому аналогу. Плоскость, вектор нормали которой определен коэффициентами целевой функции, в точке оптимума может быть повернута таким образом, чтобы она коснулась граней выпуклого многогранника, содержащих точку оптимума. Диапазон изменения углов поворота плоскости и будет определять допустимый разброс значений коэффициентов целевой функции.

Для удобства все уравнения линейных поверхностей представим в нормальном (нормированном) виде [8]. Таким образом, будем рассматривать направляющие косинусы плоскостей (в трехмерном пространстве — $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$). Чтобы определить грани многогранника, содержащие точку оптимума, подставим координаты точки оптимума в ограничения (2) и (3). Ограничения, которые имеют вид равенств, определяют искомые грани.

Пусть некоторая грань в трехмерном пространстве описывается уравнением

$$ax + by + cz + d = 0;$$

нормальное уравнение этой плоскости имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0;$$

здесь x, y, z — текущие координаты; a, b, c, d — параметры уравнения плоскости; p — параметр, определяющий расстояние до плоскости от начала координат;

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \;\; \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \;\; \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Для плоскости, соответствующей целевой функции с параметрами c_1, c_2, c_3, получим

$$\cos\alpha_0 = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}; \quad \cos\beta_0 = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}; \quad \cos\gamma_0 = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}.$$

Важно определить не значения c_1, c_2, c_3, а их отношения:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}; \quad \frac{c_1}{c_3} = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\gamma_0}; \quad \frac{c_2}{c_3} = \frac{\cos\beta_0}{\cos\gamma_0}. \tag{8}$$

Если некоторая i-я грань многогранника имеет направляющие косинусы $\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i$, то всякая плоскость, направляющие косинусы которой будут иметь значения в интервалах между $\cos\alpha_0$ и $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_0$ и $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_0$ и $\cos\gamma_i$ соответственно, не повлияет на положение оптимальной точки. Проанализировав таким образом все грани, которым принадлежит оптимальная точка, найдем диапазоны изменений отношений параметров a, b и c, которым должны удовлетворять плоскости, проходящие через оптимальную точку и не влияющие на оптимальное решение задачи. Отсюда легко получить возможный диапазон неопределенностей в значениях коэффициентов целевой функции, не влияющих на решение задачи.

Пример (продолжение). Определим грани многоугольника, которым принадлежит точка оптимума. Подставим оптимальное решение задачи $x_1 = 70$, $x_2 = 80$ в исходную модель (7) и получим, что оптимальная точка — это точка пересечения прямых $x_1 + 3{,}5x_2 = 350$ и $x_1 + x_2 = 150$. Вектор нормали целевой функции имеет координаты $\{10; 20\}$; векторы нормали прямых — $\{1;\ 3{,}5\}$ и $\{1;\ 1\}$. Вектор нормали целевой функции может быть повернут до вектора нормали одной из прямых, т.е. согласно отношениям (8)

$$\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1} \geqslant \frac{c_2 + \Delta c_2}{c_1 + \Delta c_1} \geqslant \frac{\cos\beta_2}{\cos\alpha_2};$$

$$\cos\alpha_1 = 0{,}275; \ \ \cos\beta_1 = 0{,}962; \ \ \cos\alpha_2 = \cos\beta_2 = 0{,}707.$$

Окончательно условие (8) имеет вид

$$3{,}5 \geqslant \frac{c_2 + \Delta c_2}{c_1 + \Delta c_1} \geqslant 1.$$

Полученный результат можно сравнить с приведенным выше результатом аналитического расчета.

Неопределенность только в координатах вектора правой части системы (4). При изменении значений правой части исходной системы (1)–(3) в процессе решения изменяется только столбец свободных членов $\vec{b}$ и значение целевой функции z. В точке оптимума столбец свободных членов не содержит отрицательных элементов [1, 6]. Таким образом, неопределенность в координатах вектора правой части до тех пор не влияет на оптимальное решение, пока не появятся отрицательные элементы в столбце свободных членов.

Представим матрицу полного ранга A из условий (4) в виде двух блоков N и B: $A = [N;\ B]$, где N состоит из небазисных столбцов A, а B — из базисных [3]. Аналогично, векторы $\vec{c}$ и $\vec{x}$ состоят из базисных и небазисных координат: $\vec{c} = (\vec{c}_N, \vec{c}_B)$, $\vec{x} = (\vec{x}_N, \vec{x}_B)$. Следовательно, имеем

$$\begin{gathered} A\vec{x} = \vec{b}, \\ N\vec{x}_N + B\vec{x}_B = \vec{b}, \\ B^{-1}N\vec{x}_N + B^{-1}B\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}, \\ \vec{x}_B = B^{-1}\vec{b}, \end{gathered}$$

поскольку $\vec{x}_N = 0$. Таким образом, столбец свободных членов $\vec{b} + \Delta\vec{b}$ на любой итерации может быть получен умножением матрицы B^{-1} на вектор $\vec{b}$ в исходной постановке (4). Вектор B формируется из тех столбцов исходной матрицы A из системы (4), номера которых на данной итерации определяют базисные переменные. С другой стороны [3], j-й столбец матрицы A для данной итерации имеет вид

$$\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j,$$

где $\vec{a}_j$ — j-й столбец в исходной матрице A из системы (4); Y — матрица A после преобразований.

Столбцы матрицы B^{-1} — это столбцы тех переменных текущей матрицы Y, которые были базисными в исходной таблице (как правило, это последние m столбцов), поскольку $Y = B^{-1}A$, а столбцы матрицы A, относящиеся к базису исходной таблицы, образуют единичную матрицу. Матрица B^{-1} всегда присутствует в процессе решения. Исходный вектор $\vec{b}$ и неопределенность его значения $\Delta\vec{b}$ задаются. Таким образом получают новый столбец свободных членов. Если исходный вектор равен $\vec{b} + \Delta\vec{b}$, то новый столбец свободных членов имеет вид

$$B^{-1}(\vec{b} + \Delta\vec{b}) = B^{-1}\vec{b} + B^{-1}\Delta\vec{b} = \vec{x}_B + B^{-1}\Delta\vec{b}.$$

Поскольку в столбце свободных членов оптимального решения не должно быть отрицательных элементов, то условие стабильности примет вид

$$\vec{x}_B + B^{-1}\Delta\vec{b} \geqslant 0.$$

Пример. Рассмотрим описанный пример в предположении, что исходный вектор правой части $\vec{b} = \{350,\ 240,\ 150,\ -110,\ -1400\}$ имеет неопределенность $\Delta\vec{b} = \{\Delta b_1,\ \Delta b_2,\ \Delta b_3,\ \Delta b_4,\ \Delta b_5\}$, т.е. необходимо рассматривать вектор $\{350 + \Delta b_1,\ 240 + \Delta b_2,\ 150 + \Delta b_3,\ -110 + \Delta b_4,\ -1400 + \Delta b_5\}$. Элементы матрицы B^{-1} — это элементы пяти последних столбцов симплекс-таблицы оптимального решения [6]:

$$
B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & -\frac{26}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{7}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Условие стабильности оптимального решения данной задачи имеет вид

$$
\begin{gathered}
90 + \Delta b_1 + \frac{3}{5}\Delta b_3 \geqslant 0, \\
120 + \Delta b_2 - \frac{26}{5}\Delta b_3 \geqslant 0, \\
40 + \Delta b_3 \geqslant 0, \\
70 + \Delta b_4 + \frac{7}{5}\Delta b_3 \geqslant 0, \\
80 + \Delta b_5 - \frac{2}{5}\Delta b_3 \geqslant 0.
\end{gathered}
$$

Отсюда находим те комбинации Δb_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, при которых оптимальное решение не изменяется.

Неопределенность в элементах матриц A_1 и A_2. Если *отдельные элементы* матриц A_1 и A_2 имеют неопределенность, то можно воспользоваться тем, что элементы матрицы Y оптимального решения определяются через матрицу B^{-1} и исходную матрицу A из условий (4) [3]:

$$
\vec{y}_j = B^{-1}\vec{a}_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, n.
$$

Пусть только один элемент a_{ij} имеет неопределенность Δa_{ij}. В матрице Y оптимального решения получим элемент $y_{ij} = B_i^{-1}(\vec{a}_j + \Delta\vec{a}_j)$. По знаку рассматриваемого элемента y_{ij} принимается решение о положении оптимальной точки.

Этот подход приемлем при небольшом числе элементов матриц, имеющих неопределенность.

Рассмотрим более *общий подход*. Пусть все элементы матриц A_1 и A_2 имеют неопределенности Δa_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Перенесем неопределенности Δa_{ij} в неопределенности правой части. Необходимо вычислить неопределенность i-й линейной комбинации $\sum\limits_j a_{ij}x_j$ и добавить ее к неопределенности правой части Δb_i. Теперь возникает вопрос, каким образом (согласно какой гипотезе) вычислить неопределенность линейной комбинации и согласно какой гипотезе присоединить ее к неопределенности правой части. От выбора этих гипотез зависит конкретный алгоритм выполнения названных операций.

Рассмотрим два случая. В первом случае неопределенность Δa_{ij} является детерминированной величиной (например, соответствует изменению цены некоторого ресурса); во втором (в задачах линейного программирования с другим физическим содержанием) неопределенность Δa_{ij} является случайной величиной, для которой известны математическое ожидание и дисперсия. Тогда в первом случае неопределенность i-й линейной комбинации $\sum\limits_j a_{ij}x_j$ равна $\sum\limits_j \Delta a_{ij}x_j$, а полная неопределенность i-й координаты вектора правой части имеет вид

$$\Delta_\Sigma b_i = \sum_j \Delta a_{ij}x_j + \Delta b_i. \tag{9}$$

Во втором случае предполагаем, что неопределенности являются случайными величинами и можно вычислить дисперсию линейной комбинации, полагая Δa_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, независимыми случайными величинами с известными дисперсиями $D(a_{ij})$, а затем суммировать дисперсию линейной комбинации и неопределенности правой части Δb_i, полагая $D(b_i) = (\Delta b_i)^2$.

Таким образом, дисперсия линейной комбинации имеет вид [5]

$$D\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j^2 D(a_{ij}),$$

а полная неопределенность (погрешность) i-й координаты вектора правой части $\Delta_\Sigma b_i$ описывается формулой

$$\Delta_\Sigma b_i = \sqrt{D\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) + D\left(b_i\right)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2 D\left(a_{ij}\right) + \left(\Delta b_i\right)^2}. \tag{10}$$

В формулы (9) и (10) подставлены значения x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, из таблицы оптимального решения. Далее анализируем ситуацию таким же образом, как в случае наличия неопределенности только в правой части. Очевидно, что исследование может проводиться подобным образом и для случая $\Delta b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Заключение. Исследована устойчивость оптимального решения задачи линейного программирования (с одной целевой функцией) при наличии неопределенностей в коэффициентах целевой функции, в элементах матрицы условий-ограничений и в координатах вектора правой части системы (4). Приведены алгоритмы нахождения допустимой области неопределенности параметров задачи: коэффициентов целевой функции, координат вектора правой части системы (4) и неопределенности элементов матрицы условий-ограничений как при учете неопределенности вектора правой части, так и без учета неопределенности последнего. Другие варианты неопределенностей в параметрах задачи линейного программирования и их влияние на устойчивость оптимального решения можно исследовать на основе полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муртаф Б. Современное линейное программирование. Теория и практика / Под ред. А.-И. А. Станевичуса. – М.: Мир, 1984. – 224 с.
2. Исследование операций. Методологические основы и математические методы / Под ред. И.М. Макарова, И.М. Бескровного. – М.: Мир, 1981. – 712 с.
3. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения / Под ред. А.В. Лотова. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.
4. Вильямс Н. Н. Параметрическое программирование в экономике. – М.: Статистика, 1976. – 96 с.
5. Грешилов А. А. Анализ и синтез стохастических систем. Параметрические модели и конфлюентный анализ. – М.: Радио и связь, 1990. – 320 с.
6. Грешилов А. А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях. – М.: Радио и связь, 1991. – 317 с.
7. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / К.А. Пупков, А.И. Баркин, Е.М. Воронов и др.; Под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 748 с.
8. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1968. – 336 с.

Статья поступила в редакцию 27.01.2003

Анатолий Антонович Грешилов родился в 1939 г., окончил в 1964 г. Московский инженерно-физический институт. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ, в том числе 9 монографий, 20 авторских свидетельств и патентов, в области разработки математических методов строгого учета неопределенности исходной информации в задачах математической физики, распознавания образов, прогнозирования и в других технических приложениях.

A.A. Greshilov (b. 1939) graduated from the Moscow Institute for Engineering and Physics in 1964. D. Sc. (Eng.), professor of “Computing Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 150 publications including 9 monographs and 20 authors certificates and inventions in the field of development of mathematical methods for strict account of the source data uncertainty in problems of mathematical physics, objects recognition, prediction and other technical applications.