# ЛАЗЕРНЫЕ И ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 535.33+621.373

В. А. Кудряшов

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ БЛОХА В ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, ПРОШЕДШЕГО РЕЗОНАНСНУЮ СРЕДУ

*В полуклассическом приближении приведено решение уравнений Блоха для общего случая двухуровневой среды. Система уравнений Максвелла–Блоха сведена к уравнению Максвелла с нелинейной правой частью, которое можно эффективно использовать для определения области значений параметров, при которых возникает эффект конического рассеяния лазерного излучения в резонансной среде.*

Явление рассеяния интенсивного лазерного излучения, имеющего ярко выраженную коническую структуру, при его распространении в атомарной резонансной среде впервые экспериментально наблюдалось в начале 70-х годов XX в. В 80-х годах интенсивно велись экспериментальные и теоретические исследования конического рассеяния (см. библиографию к работе [1]). В 1989 г. для объяснения природы и свойств конического рассеяния была предложена единая модель [1], однако полученные результаты [2, 3] показали, что проблема исследований природы и свойств конического излучения далеко не исчерпана. Исследования рассеяния интенсивного лазерного излучения при его распространении в атомарной резонансной среде продолжаются по настоящее время [4–12]. При этом результаты экспериментальных исследований определяются в значительной мере наличием соответствующей базы и методических разработок [4, 5, 9–12]. Теоретическая часть исследований заканчивается на представлении в той или иной форме системы уравнений Максвелла–Блоха, которая определяет модель наблюдаемых эффектов [6–8, 11, 12]. Затем эта система преобразуется к виду, удобному для численных расчетов ограниченного числа параметров, далеко не полностью определяющих пространство параметров, при которых возникают эффекты.

Наиболее удачная попытка создать единую модель конического рассеяния в рамках численного анализа системы уравнений Максвелла–Блоха предпринята в работе [6]. Тем не менее, в этом случае также не удалось отразить все экспериментально наблюдаемые свойства этого явления, и в дальнейшем эта модель дорабатывалась авторами [7, 12]. В то же время, любое существенное продвижение в аналитическом решении системы уравнений Максвелла–Блоха позволит сделать значительный шаг на пути более строгого математического и физического описания рассматриваемого явления.

**Постановка задачи.** В настоящей работе рассмотрено решение уравнений Блоха для общего случая двухуровневой среды; задача в полуклассическом приближении сводится к уравнению Максвелла с нелинейной правой частью, определяемой уравнениями Блоха. Решение основано на раскрытии матричных экспонент. Уравнение Максвелла имеет вид

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_n \vec{p}_n\delta\left(\vec{r} - \vec{R}_n(t)\right), \tag{1}$$

где $c$ — скорость света; $\vec{E}$ — напряженность поля; $\vec{r}$ — радиус-вектор; $\delta$ — дельта-функция; $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; $\vec{p}_n$ — дипольный момент $n$-го атома (зависящий от $\vec{E}$), $\vec{R}_n(t)$ — его траектория. Для определения $\vec{p}_n$ применим следующую теорию.

Изменение состояния атома под воздействием электромагнитного поля описывается уравнениями Блоха.

Предполагаем, что атом имеет два энергетических уровня $E_{1,2} = E_0 \mp \dfrac{\hbar\omega_0}{2}$, $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$, $\omega_0$ — резонансная частота (здесь и далее обозначения с индексом “0” относятся к резонансной частоте). Состояние атома характеризуется матрицей плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}, \qquad \rho_{12} = \rho_{21}^{*}, \tag{2}$$

которая изменяется со временем в соответствии с уравнением

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] = \frac{1}{i\hbar}(H\rho - \rho H), \tag{3}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка. При воздействии поля $\vec{E}$ гамильтониан атома $H$ имеет вид

$$H = H_0 - P\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 & -\vec{\mu}_{12}\vec{E} \\ -\vec{\mu}_{21}\vec{E} & E_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ — гамильтониан невозмущенного атома; $P = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\mu}_{12} \\ \vec{\mu}_{21} & 0 \end{pmatrix}$ — оператор дипольного момента; $\vec{\mu}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, — матричные элементы дипольного момента, $\vec{\mu}_{12} = \vec{\mu}_{21}^*$. Легко получим

$$H\rho - \rho H = \begin{pmatrix} E_1 & -\vec{\mu}_{12}\vec{E} \\ -\vec{\mu}_{21}\vec{E} & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & -\vec{\mu}_{12}\vec{E} \\ -\vec{\mu}_{21}\vec{E} & E_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\rho_{12}\vec{\mu}_{21} - \rho_{21}\vec{\mu}_{12})\,\vec{E} & -\hbar\omega_0\rho_{12} + (\rho_{11}\vec{\mu}_{12} - \rho_{22}\vec{\mu}_{12})\,\vec{E} \\ \hbar\omega_0\rho_{21} + (\rho_{22}\vec{\mu}_{21} - \rho_{11}\vec{\mu}_{21})\,\vec{E} & (\rho_{21}\vec{\mu}_{12} - \rho_{12}\vec{\mu}_{21})\,\vec{E} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Отсюда следуют уравнения Блоха

$$\dot{\rho} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{i\hbar}\operatorname{Im}\rho_{12}\vec{\mu}_{21}\vec{E} & i\omega_0\rho_{12} - \dfrac{1}{i\hbar}(\rho_{22} - \rho_{11})\,\vec{\mu}_{12}\vec{E} \\ -i\omega_0\rho_{21} + \dfrac{1}{i\hbar}(\rho_{22} - \rho_{11})\,\vec{\mu}_{21}\vec{E} & \dfrac{2}{i\hbar}\operatorname{Im}\rho_{21}\vec{\mu}_{12}\vec{E} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\dot{\rho}_{12} = i\omega_0\rho_{12} - \frac{1}{i\hbar}D\vec{\mu}_{12}\vec{E},$$

$$\dot{\rho}_{21} = -i\omega_0\rho_{21} + \frac{1}{i\hbar}D\vec{\mu}_{21}\vec{E},$$

$$\dot{D} = \frac{4}{i\hbar}\operatorname{Im}\rho_{21}\vec{\mu}_{12}\vec{E},$$

где

$$D = \rho_{22} - \rho_{11}. \tag{7}$$

**Решение уравнений Блоха в матричном виде.** Для упрощения системы (7) используем метод “вращающейся волны” и приближение медленно изменяющихся амплитуд в предположении

$$\vec{E} = \operatorname{Re}\vec{\mathcal{E}}e^{i\omega t}, \qquad \rho_{12} = \tilde{\rho}_{12}e^{i\omega t}, \tag{8}$$

где $\vec{\mathcal{E}}$ — комплексная амплитуда напряженности электрического поля, $\tilde{\rho}_{12}$ — медленно изменяющаяся амплитуда, $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ — частота воздействия, $\Delta\omega$ — частота отстройки от резонансной частоты. Имеем

$$\dot{\tilde{\rho}}_{12}e^{i\omega t} + i\omega\tilde{\rho}_{12}e^{i\omega t} = i\omega_0\tilde{\rho}_{12}e^{i\omega t} - \frac{1}{i\hbar}D\vec{\mu}_{12}\,\mathrm{Re}\,\vec{\mathcal{E}}e^{i\omega t},$$
$$\dot{\tilde{\rho}}_{21}e^{-i\omega t} - i\omega\tilde{\rho}_{21}e^{-i\omega t} = -i\omega_0\tilde{\rho}_{21}e^{-i\omega t} + \frac{1}{i\hbar}D\vec{\mu}_{21}\,\mathrm{Re}\,\vec{\mathcal{E}}e^{i\omega t}, \tag{9}$$

$$\dot{D} = \frac{4}{i\hbar}\,\mathrm{Im}\,\rho_{21}\vec{\mu}_{12}\,\mathrm{Re}\,\vec{\mathcal{E}}e^{i\omega t}, \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\tilde{\rho}}_{12}\\ \dot{\tilde{\rho}}_{21}\\ \dot{D}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\Delta\omega\tilde{\rho}_{12} - \dfrac{1}{2i\hbar}D\vec{\mu}_{12}\vec{\mathcal{E}} \\ i\Delta\omega\tilde{\rho}_{21} + \dfrac{1}{2i\hbar}D\vec{\mu}_{21}\vec{\mathcal{E}}^* \\ \dfrac{1}{i\hbar}(\tilde{\rho}_{21}\vec{\mu}_{12}\vec{\mathcal{E}} - \tilde{\rho}_{12}\vec{\mu}_{21}\vec{\mathcal{E}}^*)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -i\Delta\omega & 0 & -\dfrac{\vec{\mu}_{12}\vec{\mathcal{E}}}{2i\hbar} \\ 0 & i\Delta\omega & \dfrac{\vec{\mu}_{21}\vec{\mathcal{E}}^*}{2i\hbar} \\ -\dfrac{\vec{\mu}_{21}\vec{\mathcal{E}}^*}{i\hbar} & \dfrac{\vec{\mu}_{12}\vec{\mathcal{E}}}{i\hbar} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\rho}_{12}\\ \tilde{\rho}_{21}\\ D\end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\tilde{\rho}}_{12}\\ \dot{\tilde{\rho}}_{21}\\ \dot{D}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\Delta\omega & 0 & x \\ 0 & i\Delta\omega & x^* \\ -2x^* & -2x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\rho}_{12}\\ \tilde{\rho}_{21}\\ D\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$x = -\frac{\vec{\mu}_{12}\vec{\mathcal{E}}}{2i\hbar}. \tag{13}$$

**Решение уравнений с учетом релаксации.** Пусть $\alpha$ — декремент поперечной релаксации, $\beta$ — декремент продольной релаксации, $\beta < \alpha$. Тогда имеем

$$\dot{\rho}_{12} = -\alpha\rho_{12} + i\omega_0\rho_{12} - \frac{1}{i\hbar}D\vec{\mu}_{12}\vec{E} = p\rho_{12} - \frac{1}{i\hbar}D\vec{\mu}_{12}\vec{E},$$
$$\dot{\rho}_{21} = -\alpha\rho_{21} - i\omega_0\rho_{21} + \frac{1}{i\hbar}D\vec{\mu}_{21}\vec{E} = p^*\rho_{21} + \frac{1}{i\hbar}D\vec{\mu}_{21}\vec{E}, \tag{14}$$
$$\dot{D} = \frac{4}{i\hbar}\,\mathrm{Im}\,\rho_{21}\vec{\mu}_{12}\vec{E} - \beta\,(D - D_0),$$

где $p = -\alpha + i\Delta\omega$. Отсюда получим

$$\begin{pmatrix}\dot{\tilde{\rho}}_{12}\\ \dot{\tilde{\rho}}_{21}\\ \dot{D}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^* & 0 & x \\ 0 & p & x^* \\ -2x^* & -2x & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\rho}_{12}\\ \tilde{\rho}_{21}\\ D\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \beta D_0\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Решение уравнения (15) представим в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{12} \\ \tilde{\rho}_{21} \\ D \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} -p & 0 & x \\ 0 & -p^* & x^* \\ -2x^* & -2x & -\beta \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{12_0} \\ \tilde{\rho}_{21_0} \\ D_0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \int\limits_0^t e^{\begin{pmatrix} -p & 0 & x \\ 0 & -p^* & x^* \\ -2x^* & -2x & -\beta \end{pmatrix} (t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta D_0 \end{pmatrix} d\tau. \quad (16)$$

В результате достаточно сложных вычислений получаем

$$e^{\begin{pmatrix} -p & 0 & x \\ 0 & -p^* & x^* \\ -2x^* & -2x & -\beta \end{pmatrix} t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} -p & 0 & x \\ 0 & -p^* & x^* \\ -2x^* & -2x & -\beta \end{pmatrix}^n =$$

$$= \frac{(p-\lambda_0)(p^*-\lambda_0)(p-\lambda_1)(p^*-\lambda_1)(p-\lambda_2)(p^*-\lambda_2)}{|x|^2(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)(p-p^*)(\lambda_1-\lambda_2)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{x}{p+\lambda_0} & \dfrac{x}{p+\lambda_1} & \dfrac{x}{p+\lambda_2} \\ \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_0} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_1} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\dfrac{x^*(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_0 t}}{(p^*+\lambda_1)(p^*+\lambda_2)} & \dfrac{x(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_0 t}}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)} \\ \dfrac{x^*(\lambda_0-\lambda_2)e^{\lambda_1 t}}{(p^*+\lambda_0)(p^*+\lambda_2)} & -\dfrac{x(\lambda_0-\lambda_2)e^{\lambda_1 t}}{(p+\lambda_0)(p+\lambda_2)} \\ -\dfrac{x^*(\lambda_0-\lambda_1)e^{\lambda_2 t}}{(p^*+\lambda_1)(p^*+\lambda_0)} & \dfrac{x(\lambda_0-\lambda_1)e^{\lambda_2 t}}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_0)} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{|x|^2(p-p^*)(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_0 t}}{(p+\lambda_1)(p^*+\lambda_2)(p^*+\lambda_1)(p+\lambda_2)} \\ -\dfrac{|x|^2(p-p^*)(\lambda_0-\lambda_2)e^{\lambda_1 t}}{(p+\lambda_0)(p^*+\lambda_2)(p+\lambda_2)(p^*+\lambda_0)} \\ \dfrac{|x|^2(p-p^*)(\lambda_0-\lambda_1)e^{\lambda_2 t}}{(p+\lambda_0)(p^*+\lambda_1)(p+\lambda_1)(p^*+\lambda_0)} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — корни уравнения

$$(p+\lambda)(p^*+\lambda)(\beta+\lambda)+4|x|^2(\alpha+\lambda)=0. \tag{18}$$

При этом $\lambda_0$ — вещественный корень:

$$-\alpha<\lambda_0<-\beta; \tag{19}$$

$\lambda_1, \lambda_2$ — комплексные взаимно сопряженные корни:

$$\lambda_{1,2}=-\varepsilon\pm i\sqrt{\Delta\omega^2+4|x|^2-\delta^2}=-\varepsilon\pm i\Omega. \tag{20}$$

Здесь величины $\varepsilon$ и $\delta$ характеризуют релаксационные процессы. Их точные значения описываются громоздкими выражениями, однако оценки очень просты:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}<\varepsilon<\alpha, \quad 0<\delta<\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{21}$$

Далее получаем

$$\begin{pmatrix}\tilde\rho_{12}\\ \tilde\rho_{21}\\ D\end{pmatrix}=\frac{(p+\lambda_0)(p^*+\lambda_0)(p+\lambda_1)(p^*+\lambda_1)(p^*+\lambda_2)(p+\lambda_2)}{|x|^2(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)(p-p^*)(\lambda_1-\lambda_2)}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{x}{p+\lambda_0} & \dfrac{x}{p+\lambda_1} & \dfrac{x}{p+\lambda_2}\\ \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_0} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_1} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_2}\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left\{\begin{pmatrix}-\dfrac{x^*(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_0 t}}{(p^*+\lambda_1)(p^*+\lambda_2)} & \dfrac{x(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_0 t}}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)}\\ \dfrac{x^*(\lambda_0-\lambda_2)e^{\lambda_1 t}}{(p^*+\lambda_0)(p^*+\lambda_2)} & -\dfrac{x(\lambda_0-\lambda_2)e^{\lambda_1 t}}{(p+\lambda_0)(p+\lambda_2)}\\ -\dfrac{x^*(\lambda_0-\lambda_1)e^{\lambda_2 t}}{(p^*+\lambda_1)(p^*+\lambda_0)} & \dfrac{x(\lambda_0-\lambda_1)e^{\lambda_2 t}}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_0)}\end{pmatrix}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{|x|^2(p-p^*)(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_0 t}}{(p+\lambda_1)(p^*+\lambda_1)(p+\lambda_2)(p^*+\lambda_2)}\\ -\dfrac{|x|^2(p-p^*)(\lambda_0-\lambda_2)e^{\lambda_1 t}}{(p+\lambda_0)(p^*+\lambda_0)(p+\lambda_2)(p^*+\lambda_2)}\\ \dfrac{|x|^2(p-p^*)(\lambda_0-\lambda_1)e^{\lambda_2 t}}{(p+\lambda_0)(p^*+\lambda_0)(p+\lambda_1)(p^*+\lambda_1)}\end{matrix}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\D_0\end{pmatrix}+$$

$$
+\int\limits_0^t \left( \begin{array}{cc}
-\dfrac{x^*\left(\lambda_1-\lambda_2\right)e^{\lambda_0(t-\tau)}}{\left(p^*+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_2\right)} & \dfrac{x\left(\lambda_1-\lambda_2\right)e^{\lambda_0(t-\tau)}}{\left(p+\lambda_1\right)\left(p+\lambda_2\right)} \\
\dfrac{x^*\left(\lambda_0-\lambda_2\right)e^{\lambda_1(t-\tau)}}{\left(p^*+\lambda_0\right)\left(p^*+\lambda_2\right)} & -\dfrac{x\left(\lambda_0-\lambda_2\right)e^{\lambda_1(t-\tau)}}{\left(p+\lambda_0\right)\left(p+\lambda_2\right)} \\
-\dfrac{x^*\left(\lambda_0-\lambda_1\right)e^{\lambda_2(t-\tau)}}{\left(p^*+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_0\right)} & \dfrac{x\left(\lambda_0-\lambda_1\right)e^{\lambda_2(t-\tau)}}{\left(p+\lambda_1\right)\left(p+\lambda_0\right)}
\end{array} \right. \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \left. \begin{array}{c}
\dfrac{|x|^2\left(p-p^*\right)\left(\lambda_1-\lambda_2\right)e^{\lambda_0(t-\tau)}}{\left(p+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_2\right)\left(p^*+\lambda_1\right)\left(p+\lambda_2\right)} \\
-\dfrac{|x|^2\left(p-p^*\right)\left(\lambda_0-\lambda_2\right)e^{\lambda_1(t-\tau)}}{\left(p+\lambda_0\right)\left(p^*+\lambda_2\right)\left(p+\lambda_2\right)\left(p^*+\lambda_0\right)} \\
\dfrac{|x|^2\left(p-p^*\right)\left(\lambda_0-\lambda_1\right)e^{\lambda_2(t-\tau)}}{\left(p+\lambda_0\right)\left(p^*+\lambda_1\right)\left(p+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_0\right)}
\end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \beta D_0 \end{array} \right) d\tau \right\} =
$$

$$
= \frac{\left(p+\lambda_0\right)\left(p^*+\lambda_0\right)\left(p+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_2\right)\left(p+\lambda_2\right)}{|x|^2\left(\lambda_0-\lambda_1\right)\left(\lambda_0-\lambda_2\right)\left(p-p^*\right)\left(\lambda_1-\lambda_2\right)} \times
$$

$$
\times \left( \begin{array}{ccc}
\dfrac{x}{p+\lambda_0} & \dfrac{x}{p+\lambda_1} & \dfrac{x}{p+\lambda_2} \\
\dfrac{x^*}{p^*+\lambda_0} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_1} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_2} \\
1 & 1 & 1
\end{array} \right) \times
$$

$$
\times \left\{ \left( \begin{array}{cc}
-\dfrac{x^*\left(\lambda_1-\lambda_2\right)e^{\lambda_0 t}}{\left(p^*+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_2\right)} & \dfrac{x\left(\lambda_1-\lambda_2\right)e^{\lambda_0 t}}{\left(p+\lambda_1\right)\left(p+\lambda_2\right)} \\
\dfrac{x^*\left(\lambda_0-\lambda_2\right)e^{\lambda_1 t}}{\left(p^*+\lambda_0\right)\left(p^*+\lambda_2\right)} & -\dfrac{x\left(\lambda_0-\lambda_2\right)e^{\lambda_1 t}}{\left(p+\lambda_0\right)\left(p+\lambda_2\right)} \\
-\dfrac{x^*\left(\lambda_0-\lambda_1\right)e^{\lambda_2 t}}{\left(p^*+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_0\right)} & \dfrac{x\left(\lambda_0-\lambda_1\right)e^{\lambda_2 t}}{\left(p+\lambda_1\right)\left(p+\lambda_0\right)}
\end{array} \right. \right. \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \left. \begin{array}{c}
\dfrac{|x|^2\left(p-p^*\right)\left(\lambda_1-\lambda_2\right)e^{\lambda_0 t}}{\left(p+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_1\right)\left(p+\lambda_2\right)\left(p^*+\lambda_2\right)} \\
-\dfrac{|x|^2\left(p-p^*\right)\left(\lambda_0-\lambda_2\right)e^{\lambda_1 t}}{\left(p+\lambda_0\right)\left(p^*+\lambda_0\right)\left(p+\lambda_2\right)\left(p^*+\lambda_2\right)} \\
\dfrac{|x|^2\left(p-p^*\right)\left(\lambda_0-\lambda_1\right)e^{\lambda_2 t}}{\left(p+\lambda_0\right)\left(p^*+\lambda_0\right)\left(p+\lambda_1\right)\left(p^*+\lambda_1\right)}
\end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ D_0 \end{array} \right) +
$$

$$+\begin{pmatrix} -\dfrac{x^*(\lambda_1-\lambda_2)\left(1-e^{\lambda_0 t}\right)}{(p^*+\lambda_1)(p^*+\lambda_2)\lambda_0} & \dfrac{x(\lambda_1-\lambda_2)\left(1-e^{\lambda_0 t}\right)}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)\lambda_0} \\ \dfrac{x^*(\lambda_0-\lambda_2)\left(1-e^{\lambda_1 t}\right)}{(p^*+\lambda_0)(p^*+\lambda_2)\lambda_1} & -\dfrac{x(\lambda_0-\lambda_2)\left(1-e^{\lambda_1 t}\right)}{(p+\lambda_0)(p+\lambda_2)\lambda_1} \\ -\dfrac{x^*(\lambda_0-\lambda_1)\left(1-e^{\lambda_2 t}\right)}{(p^*+\lambda_1)(p^*+\lambda_0)\lambda_2} & \dfrac{x(\lambda_0-\lambda_1)\left(1-e^{\lambda_2 t}\right)}{(p+\lambda_1)(p+\lambda_0)\lambda_2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{|x|^2(p-p^*)(\lambda_1-\lambda_2)\left(1-e^{\lambda_0 t}\right)}{(p+\lambda_1)(p^*+\lambda_2)(p^*+\lambda_1)(p+\lambda_2)\lambda_0} \\ -\dfrac{|x|^2(p-p^*)(\lambda_0-\lambda_2)\left(1-e^{\lambda_1 t}\right)}{(p+\lambda_0)(p^*+\lambda_2)(p+\lambda_2)(p^*+\lambda_0)\lambda_1} \\ \dfrac{|x|^2(p-p^*)(\lambda_0-\lambda_1)\left(1-e^{\lambda_2 t}\right)}{(p+\lambda_0)(p^*+\lambda_1)(p+\lambda_1)(p^*+\lambda_0)\lambda_2} \end{matrix}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta D_0 \end{pmatrix} \Bigg\}. \qquad (22)$$

Перемножая матрицы, в результате достаточно сложных вычислений получаем окончательное выражение

$$\begin{pmatrix} \tilde\rho_{12} \\ \tilde\rho_{21} \\ D \end{pmatrix} = D_0 \begin{pmatrix} \dfrac{x}{p+\lambda_0} & \dfrac{x}{p+\lambda_1} & \dfrac{x}{p+\lambda_2} \\ \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_0} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_1} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{(p+\lambda_0)(p^*+\lambda_0)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)}\left(e^{\lambda_0 t}+\beta\dfrac{e^{\lambda_0 t}-1}{\lambda_0}\right) \\ -\dfrac{(p^*+\lambda_1)(p+\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)}\left(e^{\lambda_1 t}+\beta\dfrac{e^{\lambda_1 t}-1}{\lambda_1}\right) \\ \dfrac{(p^*+\lambda_2)(p+\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)}\left(e^{\lambda_2 t}+\beta\dfrac{e^{\lambda_2 t}-1}{\lambda_2}\right) \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

**Анализ решения.** Полагаем, что начальное состояние атома имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_0 \end{pmatrix}$. Из выражения (23) видно, что в течение времени релаксации $T \approx 1/\alpha$, $1/\beta$ после начала воздействия идет сложный колебательный процесс изменения состояния атома.

При $\tau_и \gg T$, $e^{\lambda_{0,1,2}\tau_и} \to 0$ процесс устанавливается, что может соответствовать на определенном отрезке времени непрерывному излучению:

$$
\begin{pmatrix} \tilde\rho_{12} \\ \tilde\rho_{21} \\ D \end{pmatrix} = -\beta D_0 \times
$$

$$
\times \begin{pmatrix} \dfrac{x}{p+\lambda_0} & \dfrac{x}{p+\lambda_1} & \dfrac{x}{p+\lambda_2} \\ \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_0} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_1} & \dfrac{x^*}{p^*+\lambda_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{(p+\lambda_0)\,(p^*+\lambda_0)}{(\lambda_0-\lambda_1)\,(\lambda_0-\lambda_2)\,\lambda_0} \\ -\dfrac{(p^*+\lambda_1)\,(p+\lambda_1)}{(\lambda_0-\lambda_1)\,(\lambda_1-\lambda_2)\,\lambda_1} \\ \dfrac{(p^*+\lambda_2)\,(p+\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_2)\,\lambda_2} \end{pmatrix} =
$$

$$
= -\beta D_0 \left( \begin{array}{l} \dfrac{x(p^*+\lambda_0)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)\lambda_0} - \dfrac{x(p^*+\lambda_1)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1} + \\ \dfrac{x^*(p+\lambda_0)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)\lambda_0} - \dfrac{x^*(p+\lambda_1)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1} + \\ \dfrac{(p+\lambda_0)(p^*+\lambda_0)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)\lambda_0} - \dfrac{(p^*+\lambda_1)(p+\lambda_1)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_1} + \end{array} \right. \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow \left. \begin{array}{l} +\dfrac{x(p^*+\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2} \\ +\dfrac{x^*(p+\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2} \\ +\dfrac{(p^*+\lambda_2)(p+\lambda_2)}{(\lambda_0-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)\lambda_2} \end{array} \right) = \frac{\beta D_0}{|p|^2\beta + 4|x|^2\alpha} \begin{pmatrix} xp^* \\ x^*p \\ |p|^2 \end{pmatrix}. \quad (24)
$$

Рассмотрим другой крайний случай: воздействует очень короткий импульс длительностью $\tau_{\text{и}} \ll T$. Полагаем, что за время действия импульса релаксационное затухание не проявляется, т.е.

$$
\alpha, \beta = 0, \;\; \lambda_0 = 0, \;\; \lambda_{12} = \pm i\Omega = \pm i\sqrt{\Delta\omega^2 + 4|x|^2}, \;\; p = i\Delta\omega, \quad (25)
$$

$$
\begin{pmatrix} \tilde\rho_{12} \\ \tilde\rho_{21} \\ D \end{pmatrix} = D_0 \begin{pmatrix} \dfrac{x}{i\Delta\omega} & \dfrac{x}{i\,(\Delta\omega+\Omega)} & \dfrac{x}{i\,(\Delta\omega-\Omega)} \\ \dfrac{x^*}{-i\Delta\omega} & \dfrac{x^*}{-i\,(\Delta\omega-\Omega)} & \dfrac{x^*}{-i\,(\Delta\omega+\Omega)} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times
$$

$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} \\ -\dfrac{\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right)}{2\Omega^2} e^{i\Omega t} \\ -\dfrac{\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right)}{2\Omega^2} e^{-i\Omega t} \end{pmatrix} =$$

$$= D_0 \begin{pmatrix} \dfrac{x\Delta\omega}{i\Omega^2} - \dfrac{x\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right) e^{i\Omega t}}{2i\left(\Delta\omega + \Omega\right)\Omega^2} + \dfrac{x\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right) e^{-i\Omega t}}{2i\left(\Delta\omega - \Omega\right)\Omega^2} \\ \dfrac{x^*\Delta\omega}{-i\Omega^2} - \dfrac{x^*\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right) e^{i\Omega t}}{2i\left(\Delta\omega - \Omega\right)\Omega^2} - \dfrac{x^*\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right) e^{-i\Omega t}}{2i\left(\Delta\omega + \Omega\right)\Omega^2} \\ \dfrac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} - \dfrac{\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right) e^{i\Omega t}}{2\Omega^2} - \dfrac{\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right) e^{-i\Omega t}}{2\Omega^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{D_0}{\Omega^2} \begin{pmatrix} \dfrac{x\Delta\omega}{i} - \dfrac{x\left(\Delta\omega - \Omega\right) e^{i\Omega t}}{2i} - \dfrac{x\left(\Delta\omega + \Omega\right) e^{-i\Omega t}}{2i} \\ -\dfrac{x^*\Delta\omega}{i} + \dfrac{x^*\left(\Delta\omega + \Omega\right) e^{i\Omega t}}{2i} + \dfrac{x^*\left(\Delta\omega - \Omega\right) e^{-i\Omega t}}{2i} \\ \dfrac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} - \dfrac{\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right) e^{i\Omega t}}{2\Omega^2} - \dfrac{\left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right) e^{-i\Omega t}}{2\Omega^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{D_0}{\Omega^2} \begin{pmatrix} -ix\Delta\omega\left(1 - \cos\Omega t\right) + \Omega\sin\Omega t \\ ix^*\Delta\omega\left(1 - \cos\Omega t\right) + \Omega\sin\Omega t \\ \Delta\omega^2 - \left(\Delta\omega^2 - \Omega^2\right)\cos\Omega t \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{D_0}{\Omega^2} \begin{pmatrix} -ix\Delta\omega\left(1 - \cos\Omega t\right) + \Omega\sin\Omega t \\ ix^*\Delta\omega\left(1 - \cos\Omega t\right) + \Omega\sin\Omega t \\ \Delta\omega^2 + 4\left|x\right|^2\cos\Omega t \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Таким образом, под действием очень короткого импульса атом перейдет в состояние

$$\begin{pmatrix} \tilde\rho_{12}\left(\tau_{\text{и}}\right) \\ \tilde\rho_{21}\left(\tau_{\text{и}}\right) \\ D\left(\tau_{\text{и}}\right) \end{pmatrix} = \frac{D_0}{\Omega^2} \begin{pmatrix} -ix\Delta\omega\left(1 - \cos\Omega\tau_{\text{и}}\right) + \Omega\sin\Omega\tau_{\text{и}} \\ ix^*\Delta\omega\left(1 - \cos\Omega\tau_{\text{и}}\right) + \Omega\sin\Omega\tau_{\text{и}} \\ \Delta\omega^2 + 4\left|x\right|^2\cos\Omega\tau_{\text{и}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

являющееся при $\Omega\tau_и = 2\pi$ ($2\pi$ — импульс) начальным состоянием. После окончания воздействия начинается релаксационный процесс. При отсутствии воздействия имеем

$$e^{\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p^* & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} t} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} (-p)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-p^*)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\beta)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-pt} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-p^* t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{12} \\ \tilde{\rho}_{21} \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-p(t-\tau_и)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-p^*(t-\tau_и)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta(t-\tau_и)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{12}(\tau_и) \\ \tilde{\rho}_{21}(\tau_и) \\ D(\tau_и) \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_{\tau_и}^{t} \begin{pmatrix} e^{-p(t-\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-p^*(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta D_0 \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-p(t-\tau_и)} \tilde{\rho}_{12}(\tau_и) \\ e^{-p^*(t-\tau_и)} \tilde{\rho}_{21}(\tau_и) \\ e^{-\beta(t-\tau_и)} D(\tau_и) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{1-e^{-p(t-\tau_и)}}{p} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-e^{-p^*(t-\tau_и)}}{p^*} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-e^{-\beta(t-\tau_и)}}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta D_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-p(t-\tau_и)} \tilde{\rho}_{12}(\tau_и) \\ e^{-p^*(t-\tau_и)} \tilde{\rho}_{21}(\tau_и) \\ e^{-\beta(t-\tau_и)} \left(D(\tau_и) - D_0\right) + D_0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Дипольный момент атома имеет вид

$$\vec{P} = \rho_{12}\vec{\mu}_{21} + \rho_{21}\vec{\mu}_{12} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,\rho_{12}\vec{\mu}_{21} = 2\,\mathrm{Re}\,\tilde{\rho}_{12}\vec{\mu}_{21}e^{i\omega t} = \mathrm{Re}\,\vec{\mathcal{P}}e^{i\omega t}, \tag{30}$$

$$\vec{\mathcal{P}} = 2\tilde{\rho}_{12}\mu_{21};$$

$\rho_{12}, \rho_{21}$ получены из общего решения.

При длительном воздействии ($\tau_{\text{и}} \gg T$) установившийся дипольный момент определяется выражением

$$\vec{\mathcal{P}} = 2\tilde{\rho}_{12}\vec{\mu}_{21} = \frac{2\beta D_0}{|p|^2\beta + 4|x|^2\alpha} x p^* \vec{\mu}_{21} = \\ = \frac{\beta D_0}{|p|^2\beta + \left|\frac{\vec{\mu}_{12}\vec{\mathcal{E}}}{\hbar}\right|^2 \alpha} \frac{i\vec{\mu}_{12}\vec{\mathcal{E}}}{\hbar} p^* \vec{\mu}_{21}. \quad (31)$$

Пусть $\vec{\mu}_{12} = \vec{m}\mu$, $\vec{\mathcal{E}} = \vec{l}\mathcal{E}_l$, где $\vec{m}, \vec{l}$ — вещественные единичные векторы, $\vec{m}\vec{l} = \cos\theta$, $\mathcal{E}_l$ — проекция $\vec{\mathcal{E}}$ на направление вектора $\vec{l}$. Тогда

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{m} \frac{\beta D_0}{|p|^2\beta + \left|\frac{\mu\mathcal{E}_l\cos\theta}{\hbar}\right|^2 \alpha} \frac{i\mu\mathcal{E}_l\cos\theta}{\hbar} p^* \mu^*. \quad (32)$$

Усредним полученное выражение по ориентациям:

$$\overline{\vec{\mathcal{P}}\vec{l}} = \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\beta D_0}{|p|^2\beta + \left|\frac{\mu\mathcal{E}_l\cos\theta}{\hbar}\right|^2 \alpha} \frac{i\mu\mathcal{E}_l\cos\theta}{\hbar} p^* \mu^* \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\beta D_0}{|p|^2\beta + \left|\frac{\mu\mathcal{E}_l\cos\theta}{\hbar}\right|^2 \alpha} \frac{i\,|\mu|^2\,\mathcal{E}_l p^*}{\hbar} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\beta D_0}{\frac{|p|^2\beta}{\alpha}\left|\frac{\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right|^2 + \cos^2\theta} \frac{i\,|\mu|^2\,\mathcal{E}_l p^*}{\hbar\alpha} \left|\frac{\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right|^2 \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \\ = \frac{i\hbar p^*\beta D_0}{\pi\alpha\mathcal{E}_l} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\theta}{\frac{\beta}{\alpha}\left|\frac{p\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right|^2 + \cos^2\theta} \sin\theta d\theta = \frac{i\hbar p^*\beta D_0}{\pi\alpha\mathcal{E}_l} \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\frac{\beta}{\alpha}\left|\frac{p\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right|^2 + t^2} dt = \\ = \frac{i\hbar p^*\beta D_0}{\pi\alpha\mathcal{E}_l} \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\frac{\beta}{\alpha}\left|\frac{p\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right|^2 + t^2} dt =$$

$$= \frac{i\hbar p^* \beta D_0}{\pi\alpha\mathcal{E}_l}\left(2 - \frac{\beta}{\alpha}\left|\frac{p\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right|^2 \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\frac{\beta}{\alpha}\left|\frac{p\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right|^2 + t^2}\right) =$$

$$= \frac{i\hbar p^* \beta D_0}{\pi\alpha\mathcal{E}_l}\left(2 - \frac{\beta}{\alpha}\left|\frac{p\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right|^2 \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\frac{\beta}{\alpha}\left|\frac{p\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right|^2 + t^2}\right) =$$

$$= \frac{2D_0 i\hbar p^* \beta}{\pi\alpha\mathcal{E}_l}\left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left|\frac{p\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right| \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\left|\frac{\mu\mathcal{E}_l}{p\hbar}\right|\right). \quad (33)$$

Тогда усредним полученное выражение по пространству. Для этого умножим его на плотность пространственного распределения атомов $N$. Получаем

$$\left\langle\overline{\mathcal{P}_l}\right\rangle = \frac{2\Delta N_0 i\hbar p^* \beta}{\pi\alpha\mathcal{E}_l}\left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left|\frac{p\hbar}{\mu\mathcal{E}_l}\right| \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\left|\frac{\mu\mathcal{E}_l}{p\hbar}\right|\right), \quad (34)$$

где $\Delta N_0 = ND_0$ — равновесная плотность разности населенности уровней, $\mathcal{P}_l$ — проекция $\vec{\mathcal{P}}$ на направление вектора $\vec{l}$. При малой мощности накачки

$$|\mathcal{E}_l| \lesssim \frac{\pi\hbar\,|p|}{4\,|\mu|}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

получаем

$$\left\langle\overline{\mathcal{P}_l}\right\rangle \approx \frac{2\Delta N_0 i\hbar p^* \beta}{3\pi\alpha\mathcal{E}_l}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\left|\frac{\mu\mathcal{E}_l}{p\hbar}\right|\right)^2 = \frac{2\Delta N_0 i\,|\mu|^2\,\mathcal{E}_l^*}{3\pi\hbar p}. \quad (35)$$

При большой мощности накачки

$$|\mathcal{E}_l| \gtrsim \frac{\pi\hbar\,|p|}{|\mu|}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

имеем

$$\left\langle\overline{\mathcal{P}_l}\right\rangle \approx \frac{2\Delta N_0 i\hbar p^* \beta}{\pi\alpha_l}. \quad (36)$$

Аналитические выражения получены применением аппарата теории матриц.

Таким образом, система уравнений Максвелла–Блоха сведена к уравнению Максвелла с нелинейной правой частью, определяемой выражением (23), которое может быть эффективно использовано для определения области значений параметров, при которых возникает эффект конического рассеяния лазерного излучения в резонансной среде, что позволяет существенно упростить численное моделирование, более строго обосновать методику проведения экспериментов и интерпретацию численных и экспериментальных результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Crenshaw M. E., Cantrell C. D. Conical emission as a result of pulse breakup into solitary waves // Phys. Rev. A. – 1989. – V. 39. – P. 126–148.
2. Valley J. F. et al. Conical Emission: First Comparison and Agreement between Theory and Experiment // Phys. Rev. Lett. – 1990. – V. 64. – P. 2362–2365.
3. You L. et al. Cone emission from laser-pumped two-level atoms // Phys. Rev. A. – 1991. – V. 44. – P. 6998–7001; – 1992. – V. 46. – P. 2925.
4. Fernandes-Guasti M. et al. Anomalous conical emission in calcium vapory // Opt. Commun. – 1994. – V. 108. – P. 376.
5. Ter-Mikaelian M. et al. Conic radiation into environment as result of self-phase modulation // Opt. Commun. – 1995. – V. 119. – P. 56–60.
6. Старостин А. Н. и др. Эволюция частотно-пространственной структуры интенсивного лазерного импульса, распространяющегося в резонансной среде // ЖЭТФ. – 1995. – Т. 108. – С. 1203–1222.
7. Петрушевич Ю. В., Старостин А. Н. Численное моделирование прохождения мощного лазерного излучения в парах натрия // Квант. электроника. – 1996. – Т. 23. – С. 642.
8. Ben-Aryeh Y. Cooperative effects in cone emission from laser-puped two-level atoms // Phys. Rev. A. – 1997. – V. 56. – P. 854–858.
9. DeFilippo G. et al. Population of metastable barium associated with conical emission // Opt. Commun. – 1997. – V. 144. – P. 315–321.
10. Dreischuh A. et al. Spectral and spatial evolution of a conical emission in Na vapor // J. Opt. Soc. Am. B. – 1998. – V .15. – P. 34–40.
11. Paul B. D. et al. Observation of conical emission from a single self-trapped beam // Phys. Rev. A. – 1999. – V. 59. – P. 4784–4796.
12. Петрушевич Ю. В., Старостин А. Н. Прохождение узких лазерных пучков в резонансно поглощающей среде // Квант. электроника. – 2000. – Т. 30. – С. 243–247.


Статья поступила в редакцию 28.04.2003

Владимир Анатольевич Кудряшов родился в 1944 г., окончил в 1969 г. МИРЭА. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник, руководитель Центра базовых предприятий МИРЭА. Автор более 130 научных работ в области лазерной физики.

V.A. Kudryashov (b. 1944) graduated from the Moscow Institute for Radio-electronics and Automatics in 1969. Ph. D. (Eng.), senior researcher, head of the Center of Basic Enterprises of the Moscow Institute for Radio-electronics and Automatics. Author of over 130 publications in the field of laser physics.