

АВТОКОЛЕБАНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С СУХИМ ТРЕНИЕМ В ОСЯХ КАРДАНОВА ПОДВЕСА ПРИ УГЛОВОМ ДВИЖЕНИИ ОСНОВАНИЯ

С.А. Черников

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: SA_chernikov@mail.ru

Сухое (кулоново) трение — одна из причин возникновения автоколебаний в гироскопических системах, где потери механической энергии на автоколебания непрерывно пополняются притоком энергии (из источника, не имеющего собственных колебательных свойств), который управляется и преобразуется колебательной системой посредством обратной связи. В отличие от таких систем, в настоящей работе рассмотрена гиросистема без обратных связей — трехстепенный гироскоп с сухим (некулоновым) трением в осях карданова подвеса, а источником энергии автоколебаний является угловое движение основания. При этом характеристика сухого трения в зависимости от относительной скорости скольжения имеет падающий и возрастающий участки и представляется суммой трех составляющих, первая из которых — кулоново трение, вторая — (отрицательная) пропорциональна скорости скольжения, а третья — пропорциональна кубу скорости скольжения.

На основе метода гармонической линеаризации показано, что в системе, устойчивой на неподвижном основании, неизбежно возникают автоколебания при угловом движении основания со скоростью, соответствующей ниспадающему участку характеристики сухого трения.

Получены условия возникновения, области существования и параметры автоколебаний. Результаты исследования подтверждены компьютерным моделированием исходной нелинейной гиросистемы. Установлена механическая аналогия трехстепенного гироскопа с сухим (некулоновым) трением в оси карданова подвеса при угловом движении основания с известной в теории колебаний системой под названием “осциллятор с сухим трением на бесконечной ленте, движущейся с постоянной скоростью”.

Ключевые слова: автоколебания, гироскоп, сухое (некулоново) трение.

SELF-OSCILLATION OF A GYROSCOPIC SYSTEM WITH DRY FRICTION IN GIMBAL AXES DURING ANGULAR MOTION OF THE SUPPORT

S.A. Chernikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: SA_chernikov@mail.ru

The dry (Coulomb) friction is one of the causes of self-oscillation arising in gyroscopic systems, where the mechanical energy loss for self-oscillation is continuously replenished by the energy inflow (from the source that has no intrinsic oscillation properties), which is controlled and transformed by the oscillation system using a feedback. Unlike these systems, a gyro system without feedback is considered here (a three-degree-of-freedom gyroscope with dry (non-Coulomb) friction in gimbal axes) while a source of self-oscillation energy is the angular motion of the support. In this case the dry-friction characteristic depending on the relative speed of sliding has the falling and rising parts and is presented as a sum of three constituents, the first of which is the Coulomb friction, the second (negative) one is proportional to the sliding speed, and the third one is proportional to the cube of the sliding speed.

Based on the harmonic linearization method, it is shown that in the system that is stable on the immobile support, self-oscillation inevitably occurs when the angular motion of the support takes place at a speed corresponding to the falling part of the dry-friction curve. Conditions for self-oscillation arising, domains of existence and parameters of self-oscillation are obtained. The study results are confirmed by the computer simulation of the initial nonlinear gyro system. The mechanical analogy is found of the three-degree-of-freedom gyroscope with dry (non-Coulomb) friction in the gimbal axis during the angular motion of the support with the system known from the oscillation theory under the name of “oscillator with dry friction on the endless ribbon moving at a constant speed”.

Keywords: self-oscillation, gyroscope, dry (non-Coulomb) friction.

Влияние сухого (кулонова) трения в кардановом подвесе силового гиросtabilизатора на его динамику впервые было рассмотрено А.Ю. Ишлинским [1]. При этом учитывались постоянные времени усилителя и стабилизирующего двигателя. Решая нелинейную задачу методом энергетического баланса А.Ю. Ишлинский показал, что сухое трение не может быть причиной автоколебаний гиросистемы (ГС) в случае, если при отсутствии сухого трения ГС устойчива. Наличие сухого трения повышает степень устойчивости ГС, т.е. приводит к более интенсивному затуханию собственных колебаний. Многие авторы последующих работ в несколько иной постановке задачи пришли к аналогичному выводу.

Вместе с тем в работе [2] показано, что если приведенная линейная часть ГС с сухим трением обладает по отношению к аргументу нелинейной функции астатизмом третьего и более высокого порядка, то в такой системе, устойчивой при отсутствии сухого трения, неизбежно возникают автоколебания с мягким или жестким возбуждением в условиях сухого трения. При порядке астатизма линейной части меньше трех в системе с сухим трением возможны автоколебания, если цепь обратной связи имеет инерционные свойства.

В отличие от автоколебательной системы, в которой потери механической энергии на автоколебания непрерывно пополняются притоком энергии из источника, не обладающего автоколебательными свойствами, и поток энергии управляется и преобразуется колебательной системой посредством обратной связи, здесь рассматривается ГС без обратной связи — трехстепенный гироскоп (рис. 1, а) или одноосный гиросtabilизатор непосредственного типа (рис. 1, б) с сухим (некулоновым) трением в оси карданного подвеса, а источником энергии автоколебаний является угловое движение основания.

Уравнения, описывающие малые движения гироскопической системы (см. рис. 1), запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} + F(\dot{\theta}) &= M_1; \\ B\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} &= M_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь A и B — приведенные моменты инерции ГС относительно внешней и внутренней осей карданова подвеса; H — кинетический момент гироскопа; α и β — углы поворота ГС относительно внешней и внутренней осей соответственно; $F(\dot{\theta})$ — момент сухого (некулонова) трения.

Зависимость момента сухого трения от относительной скорости скольжения $\dot{\theta} = (\dot{\alpha} - \dot{\psi}_0)$, где $\dot{\psi}_0$ — угловая скорость движения основания, показана

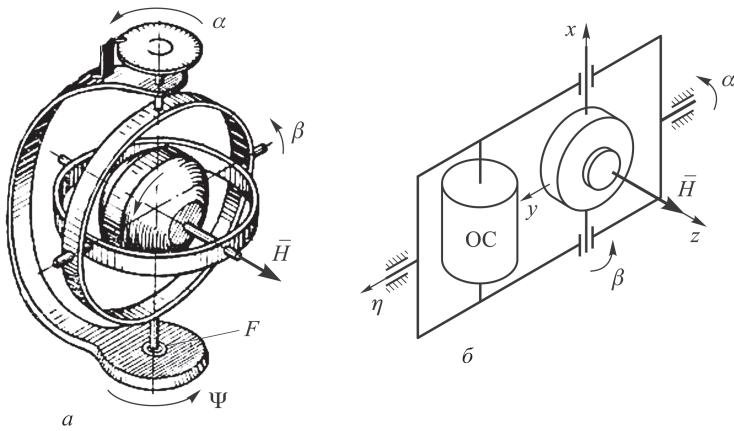


Рис. 1. Трехстепенный гироскоп (а) и гиросtabilизатор непосредственного типа (б) с сухим трением в оси наружной рамки на поворотном основании

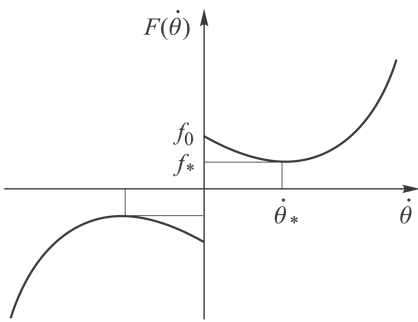


Рис. 2. Характеристика сухого (не-кулонова) трения

на рис. 2. При этом падающая характеристика сухого трения в диапазоне низких скоростей скольжения является достаточно типичной для режимов трения без смазки и с недостаточной смазкой, например для ГС, работающих в открытом космосе [3].

Аппроксимируя нелинейную функцию сухого трения рядом Тэйлора и ограничиваясь кубическим членом ряда, примем

$$F(\dot{\theta}) = F_0 \dot{\theta} - \frac{F_0''}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{F_0'''}{3!} \dot{\theta}^3.$$

В этом выражении F_0 — значение коэффициента сухого трения при стремлении скорости относительного проскальзывания ($\dot{\theta}$) $\rightarrow 0$.

Обычно [3, 4] нелинейную функцию сухого трения (рис. 2) представляют в виде

$$F(\dot{\theta}) = f_0 \left[\text{sign} \dot{\theta} - d_1 \dot{\theta} + d_3 \dot{\theta}^3 \right], \quad (2)$$

где коэффициенты d_1 и d_3 выражают через характерные значения функции трения (таблица):

$$d_1 = \frac{3(f_0 - f_*)}{2 f_0 \cdot \dot{\theta}_*}; \quad d_3 = \frac{1(f_0 - f_*)}{2 f_0 \cdot \dot{\theta}_*^3}. \quad (3)$$

В свою очередь характерные точки, соответствующие минимуму нелинейной функции трения, определяются условием

$$\frac{dF(\dot{\theta})}{d\dot{\theta}} = 0,$$

откуда следует

$$-d_1 + 3d_3 \dot{\theta}_*^2 = 0,$$

Коэффициенты функции сухого трения

$f_* = 0,6f_0$			$f_* = 0,8f_0$			$f_* = 0,9f_0$		
$\dot{\theta}$	d_1	d_3	$\dot{\theta}$	d_1	d_3	$\dot{\theta}$	d_1	d_3
10^{-3}	600	$2 \cdot 10^8$	10^{-3}	300	10^8	10^{-3}	150	$5 \cdot 10^7$
10^{-2}	60	$2 \cdot 10^5$	10^{-2}	30	10^5	10^{-2}	15	$5 \cdot 10^4$
10^{-1}	6,0	200	10^{-1}	3	10^2	10^{-1}	1,5	50
1	0,6	0,2	1	0,3	0,1	1	0,15	0,05

или

$$\dot{\theta}_* = \sqrt{\frac{d_1}{3d_3}}; \quad f_* = 1 - \frac{2}{3}d_1 \cdot \dot{\theta}_*.$$

Значения коэффициентов d_1 и d_3 , аппроксимирующих характеристику $F(\dot{\theta})$ для различных отношений $\frac{f_*}{f_0}$ в зависимости от $\dot{\theta}_*$, соответствующей минимуму характеристики $F(\dot{\theta}) = f_*$, приведены в таблице.

Подставляя в (1) $F(\dot{\theta})$ из (2) и исключая координату β при $M_1 = M_2 = 0$, получаем:

$$A\ddot{\alpha} + C\alpha + f_0 \left[\text{sign } \dot{\theta} - d_1\dot{\theta} + d_3\dot{\theta}^3 \right] = 0, \quad (4)$$

$$C = H^2/B.$$

Уравнение (4) описывает известную в теории колебаний систему под названием “осциллятор с сухим трением на бесконечной ленте, движущейся с постоянной скоростью” [4] (рис. 3). При этом сила (момент) сухого трения соответствует закону, изображенному на рис. 2. Это одна из первых механических моделей фрикционных автоколебаний, предложенная Ван-дер-Полем в 1930 г.

Таким образом, осциллятор с сухим трением на бесконечной ленте, движущейся с постоянной скоростью является аналогом динамических свойств ГС (1).

Другим аналогом динамических свойств ГС (1) является маятник Фруда [4] — маятник, подвешенный с трением на равномерно вращающемся валу.

Математические модели этих фрикционных систем достаточно глубоко проработаны в многочисленных публикациях [4] и включают в себя практически все значимые факторы, действующие в этих системах. Рассмотрим процесс возбуждения автоколебаний

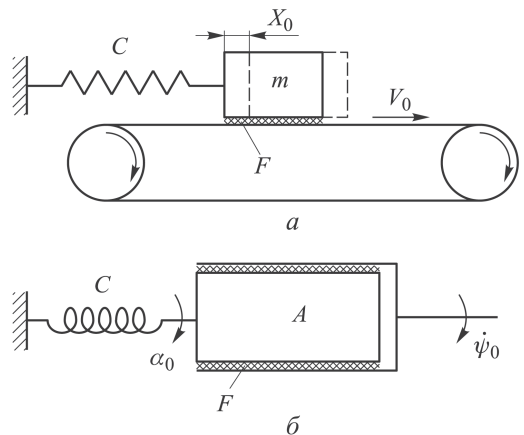


Рис. 3. Автоколебательные системы с сухим трением на подвижном основании:
a — осциллятор Ван-дер-Поля; *б* — осциллятор трехстепенного гироскопа

в системе с сухим трением, соответствующим характеристике, представленной на рис. 2 [5]. Пусть при скорости скольжения $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ ГС находится в покое ($\dot{\alpha} = 0$) и, следовательно, $\dot{\theta}_0 = \dot{\psi}_0$. Этой скорости соответствует момент сухого трения F_0 , при этом $\alpha = \alpha_0$. Из уравнения состояния равновесия $F_0 - C\alpha_0 = 0$ следует

$$\alpha_0 = F_0/C. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим движение ГС около положения равновесия. Пусть $\Delta\alpha$ — угловое отклонение ГС относительно положения равновесия, тогда $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$. При этом скорость скольжения перестает быть постоянной величиной и определяется разностью скоростей $\dot{\theta} = \dot{\psi}_0 - \Delta\dot{\alpha}$. Момент трения F отличается от номинального значения F_0 . При малых колебаниях, когда скорость $\Delta\dot{\alpha}$ мала по сравнению с $\dot{\psi}_0$, можно принять

$$F = F_0 + F'_0\Delta\dot{\alpha},$$

где $F'_0 = \left. \frac{dF}{d\dot{\theta}} \right|_{\dot{\theta}_0}$, тогда дифференциальное уравнение (4) запишется в виде

$$A\Delta\ddot{\alpha} + C(\alpha_0 + \Delta\alpha) = F_0 + F'_0\Delta\dot{\alpha},$$

или с учетом (5)

$$A\Delta\ddot{\alpha} + C\Delta\alpha + F'_0\Delta\dot{\alpha} = 0. \quad (6)$$

При $F'_0 > 0$, что соответствует участку нелинейной характеристики, где $\dot{\theta} > \dot{\theta}_*$, колебания будут затухать, состояние равновесия устойчиво, если же $\dot{\theta} < \dot{\theta}_*$, то $F'_0 < 0$ и состояние равновесия неустойчиво и любое сколь угодно малое возмущение приводит к раскачке системы, но при этом все более заметную роль начинает играть кубическая составляющая сухого трения. Возрастание колебаний постепенно замедляется и движение стремится к некоторому стационарному режиму — режиму автоколебаний. Поскольку современная теория фрикционных автоколебаний не имеет достоверного, точного метода их расчета, то нелинейную задачу, как правило, решают приближенными методами, например методом осреднения [6] или, как в нашем случае, нелинейное уравнение (4) решается методом гармонической линеаризации [7].

В соответствии с методом гармонической линеаризации периодическое решение нелинейного уравнения будем искать в виде $\dot{\alpha} = a_0 \sin \omega t$, $a_0 = a\omega$, а угловую скорость скольжения $\dot{\theta}$ примем равной

$$\dot{\theta} = a\omega \sin \omega t - \dot{\psi}_0,$$

где $\dot{\psi}_0$ — угловая скорость движения основания.

Осуществляя гармоническую линеаризацию нелинейной функции сухого трения и учитывая аддитивные свойства коэффициентов гармонической линеаризации, можно записать

$$\begin{aligned} \text{sign}(\dot{\alpha} - \dot{\psi}_0) &= q_1(a_0, \dot{\psi}_0)(\dot{\alpha} - \dot{\psi}_0); \\ (\dot{\alpha} - \dot{\psi}_0)^3 &= q_3(a_0, \dot{\psi}_0)(\dot{\alpha} - \dot{\psi}_0). \end{aligned} \quad (7)$$

здесь $q_1(a_0, \dot{\psi}_0)$ и $q_3(a_0, \dot{\psi}_0)$ — коэффициенты гармонической линеаризации соответственно кулонова трения и кубической составляющей сухого трения,

определяемые первыми гармониками ряда Фурье

$$q_1(a_0, \dot{\psi}_0) = \frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} \text{sign}(a\omega \sin \omega t - \dot{\psi}_0) \sin \omega t \, d\omega t;$$

$$q_3(a_0, \dot{\psi}_0) = \frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} (a\omega \sin \omega t - \dot{\psi}_0)^3 \sin \omega t \, d\omega t.$$

В результате интегрирования получим

$$q_1(a_0, \dot{\psi}_0) = \frac{4}{\pi a \omega} \sqrt{1 - \frac{\dot{\psi}_0^2}{a^2 \omega^2}}; \quad q_3(a_0, \dot{\psi}_0) = 3 \left(\frac{(a\omega)^2}{4} + \dot{\psi}_0^2 \right). \quad (8)$$

Осуществляя замену в (4) нелинейных членов их линеаризованными значениями, получаем:

$$A\ddot{\alpha} + C\alpha + f_0 \left[-d_1 + q_1(a_0, \dot{\psi}_0) + d_3 q_3(a_0, \dot{\psi}_0) \right] (\dot{\alpha} - \dot{\psi}_0) = 0.$$

Разделяя движения на быстрые (по переменной ωt) и медленные (по $\dot{\psi}_0$), запишем характеристическое уравнение системы

$$p^2 + \frac{f_0}{A} \left[-d_1 + q_1(a_0, \dot{\psi}_0) + d_3 q_3(a_0, \dot{\psi}_0) \right] p + \omega_0^2 = 0; \quad p = \frac{d}{dt}. \quad (9)$$

Периодическому режиму с частотой ω соответствует корень $p = j\omega$ характеристического уравнения (9). Подставляя в (9) $p = j\omega$ и приравнивая нулю вещественную часть этого уравнения, получаем выражение для частоты автоколебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{A}} = \frac{H}{\sqrt{AB}} = \omega_0.$$

Приравнивая нулю мнимую часть характеристического уравнения, получаем уравнение для определения амплитуды периодического решения

$$d_1 = q_1(a_0, \dot{\psi}_0) + d_3 q_3(a_0, \dot{\psi}_0).$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$d_1 \left[1 - \frac{(a_0^2/4 + \dot{\psi}_0^2)}{\dot{\theta}^2} \right] = \frac{4}{\pi a_0} \sqrt{1 - \dot{\psi}_0^2/a_0^2}. \quad (10)$$

Анализируя выражение (10), выявили, что амплитуда возможных автоколебаний

$$a > \dot{\psi}_0^2/\omega_0.$$

Если коэффициент отрицательного трения d_1 отнести к линейной части системы, то условие амплитудно-фазового баланса можно записать в виде

$$W_{\Pi}(j\omega) = -\frac{1}{q_{\Sigma}(a_0, \dot{\psi}_0)}, \quad (11)$$

где

$$W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{j\omega}{A(\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega \cdot d_1/A)},$$

$$q_{\Sigma}(a_0, \dot{\psi}_0) = q_1(a_0, \dot{\psi}_0) + d_3 q_3(a_0, \dot{\psi}_0). \quad (12)$$

Подставляя в (12) значения коэффициентов $q_1(a_0, \dot{\psi}_0)$ и $q_3(a_0, \dot{\psi}_0)$, получаем выражение для демпфирующего коэффициента гармонической линеаризации:

$$q_{\Sigma}(a_0, \dot{\psi}_0) = \frac{4}{\pi a_0} \sqrt{1 - \frac{\dot{\psi}_0^2}{a^2 \omega^2}} + \frac{3}{2 \dot{\theta}_*^3} \left(\frac{a^2 \omega^2}{4} + \dot{\psi}_0^2 \right).$$

Решая уравнение (11), получаем $\omega = \omega_0$, а амплитуда периодического решения определяется равенством

$$\frac{3}{2} \frac{f_0 - f_*}{f_0 \dot{\theta}_*} = q_{\Sigma}(a, \omega, \dot{\psi}_0) \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (13)$$

Рассмотрим случай, когда колебания происходят на одной ветви нелинейной характеристики трения, т.е. в процессе колебаний фазовая траектория не пересекает характерную для закона сухого трения точку разрыва зависимости момента трения от скорости скольжения $\dot{\theta}$.

Поскольку в рассматриваемом случае “переключение” с одной ветви нелинейной характеристики на другую не происходит и нелинейное звено кулонова трения оказывается постоянно “включенным”, то можно считать, что нелинейная характеристика сухого трения содержит только одно нелинейное звено, а именно ее кубическую составляющую при постоянно действующем относительно наружной оси карданова подвеса моменте сухого трения, знак которого определяется знаком угловой скорости скольжения $\dot{\theta}$.

Уравнение ГС (4) для случая, когда колебания происходят на одной ветви нелинейной характеристики примут вид

$$A\ddot{\alpha} + C\alpha = f_0 \left[1 - d_1 \dot{\theta} + d_3 \dot{\theta}^3 \right],$$

а уравнение для амплитуды периодического решения при $q_1(a_0, \dot{\psi}_0) = 0$ получим в виде

$$d_1 = d_3 q_3(a_0, \dot{\psi}_0). \quad (14)$$

Подставляя в (14) значения коэффициентов d_1 , d_3 и $q_3(a_0, \dot{\psi}_0)$ из (3) и (8) и разрешая полученное уравнение относительно a , получаем

$$a = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\dot{\theta}_*^2 - \dot{\psi}_0^2},$$

где $\omega_0 = \frac{H}{\sqrt{AB}}$ — частота автоколебаний.

Как видно, периодическое решение возможно только в случае, если $\dot{\psi}_0 < \dot{\theta}_*$. Иными словами, для существования в системе автоколебаний необходимо, чтобы угловая скорость движения основания была меньше, чем скорость скольжения, при которой момент сухого трения достигает минимума.

Рассмотрим теперь случай, когда скорость движения основания $\dot{\psi}_0$ велика, так что в процессе автоколебаний оказывается возможным переход через точку разрыва в законе сухого трения. Поскольку относительное скольжение $\dot{\theta} = \dot{\alpha} - \dot{\psi}_0$ в этом режиме предполагается малым, то кубическим членом в (4) можно пренебречь, а уравнение (4) ГС записать в следующем виде

$$A\ddot{\alpha} + C\alpha = f_0 \left[\text{sign}(\dot{\psi}_0 - \dot{\alpha}) - d_1 (\dot{\psi}_0 - \dot{\alpha}) \right].$$

Осуществляя гармоническую линеаризацию нелинейной функции и подставляя в характеристическое уравнение линеаризованной системы $p = j\omega$, получаем выражение для частоты периодического решения $\omega = \omega_0 = \frac{H}{\sqrt{AB}}$ и уравнение для его амплитуды

$$\frac{3 f_0 - f_*}{2 f_0 \dot{\theta}_*} = \frac{4}{\pi a \omega_0} \sqrt{1 - \frac{\dot{\psi}_0^2}{a^2 \omega_0^2}}. \quad (15)$$

Преобразуем уравнение (15) к виду биквадратного относительно a :

$$(a\omega_0)^4 - \left(\frac{4}{\pi d_1}\right)^2 (a\omega_0)^2 + \left(\frac{4}{\pi d_1}\right)^2 \dot{\psi}_0^2 = 0.$$

Откуда следует

$$2(a\omega_0)^2 = \left(\frac{4}{\pi d_1}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{\pi d_1}\right)^4 - 4\left(\frac{4}{\pi d_1}\right)^2 \dot{\psi}_0^2}. \quad (16)$$

И, наконец, извлекая из (16) корень квадратный, получаем

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{\pi d_1 \omega_0} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - (\pi d_1)^2 \cdot \dot{\psi}_0^2 / 4}}. \quad (17)$$

Из этого уравнения следует, что автоколебания с переходом через точку разрыва нелинейной характеристики сухого трения могут быть только при условии

$$\dot{\psi}_0 < \frac{2}{\pi d_1}.$$

Коэффициент “отрицательного” трения d_1 , представленный формулой (3), в рассматриваемом случае может быть определен наклоном нелинейной характеристики трения в нуле $d_1 = \left. \frac{dF}{f_0 d\dot{\theta}} \right|_{\dot{\theta}=0}$.

Графическое решение уравнения амплитудного баланса (15) приведено на рис. 4. Из этого рисунка следует, что условие $d_1 = q_1(a_0, \dot{\psi}_0)$ может выполняться только при $d_1 < q_{1\max}$. Критическое значение коэффициента отрицательного трения d_{1*} , при котором колебания проис-

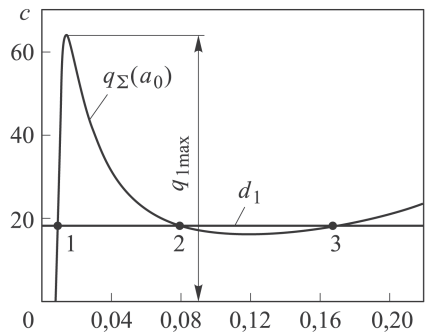


Рис. 4. Графическое решение уравнения амплитудного баланса

ходят с переходом фазовой траектории через точку разрыва нелинейной функции, определяется максимальным значением коэффициента $q_1(a_0, \dot{\psi}_0)$: $d_{1*} = q_{1 \max}(a_0, \dot{\psi}_0)$.

В свою очередь $q_{1 \max}(a_0, \dot{\psi}_0)$ определяется условием

$$\frac{dq_1(a_0, \dot{\psi}_0)}{da_0} = 0. \quad (18)$$

Осуществляя дифференцирование, получаем

$$\frac{dq_1(a_0, \dot{\psi}_0)}{da_0} = -\frac{4}{\pi a_0^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{2\dot{\psi}_0}{a_0^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\psi}_0^2}{a_0^2}}}.$$

Условию (18) соответствует

$$a_{0*} = \sqrt{2}\dot{\psi}_0. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (8), получаем

$$q_{1 \max}(a, \dot{\psi}_0) = \frac{2}{\pi\dot{\psi}_0}. \quad (20)$$

Точки пересечения характеристик d_1 и $q_1(a_0, \dot{\psi}_0)$, отмеченные на рис. 4 цифрами 1, 2, 3, определяют три положения равновесия системы. Первое положение равновесия (для меньшего значения a , соответствующего знаку “-” перед корнем в формуле (7)) является устойчивым и определяет амплитуду автоколебаний с мягким возбуждением. Второе положение равновесия (для большего значения a , соответствующего знаку “+” перед корнем в той же формуле) неустойчиво. Третье положение равновесия, соответствующее пересечению характеристик в точке 3, определяет устойчивый фокус. При увеличении $\dot{\psi}_0$ кривая $q_1(a_0, \dot{\psi}_0)$ смещается вниз и положения равновесия, отмеченные точками 1 и 2, сближаются. Далее они сливаются в одно, а потом совсем исчезают. Таким образом, переход от устойчивых автоколебаний к неустойчивому движению происходит при $d_{1*} = \frac{2}{\pi\dot{\psi}_0}$, $a_* = \sqrt{2}\frac{\dot{\psi}_0}{\omega_0}$.

В заключение приведем результаты компьютерного моделирования в пакете Matlab динамики ГС (1) с параметрами $A = B = 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $H = 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$ и сухим трением в оси карданова подвеса для различных характеристик сухого трения, определяемых характерными точками f_0, f_*, θ_* (см. рис. 2) в соответствии с таблицей. На рис. 5, а, б приведены фазовые траектории движения ГС со следующими параметрами характеристики сухого трения: $f_0 = 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}$, $\frac{f_*}{f_0} = 0,6$, $\theta_* = 0,1 \text{ с}^{-1}$, $d_1 = 6 \text{ с}$, $d_3 = 200 \text{ с}^3$. При этом фазовый портрет на рис. 5, а соответствует угловой скорости основания $\dot{\psi}_0 = 0,05 \text{ с}^{-1}$, а на рис. 5, б соответствует $\dot{\psi}_0 = 0,07 \text{ с}^{-1}$. В том и в другом случае имеют место автоколебания при относительной скорости скольжения, соответствующей падающему участку характеристики сухого трения. Фазовый портрет движения ГС с теми же параметрами, что

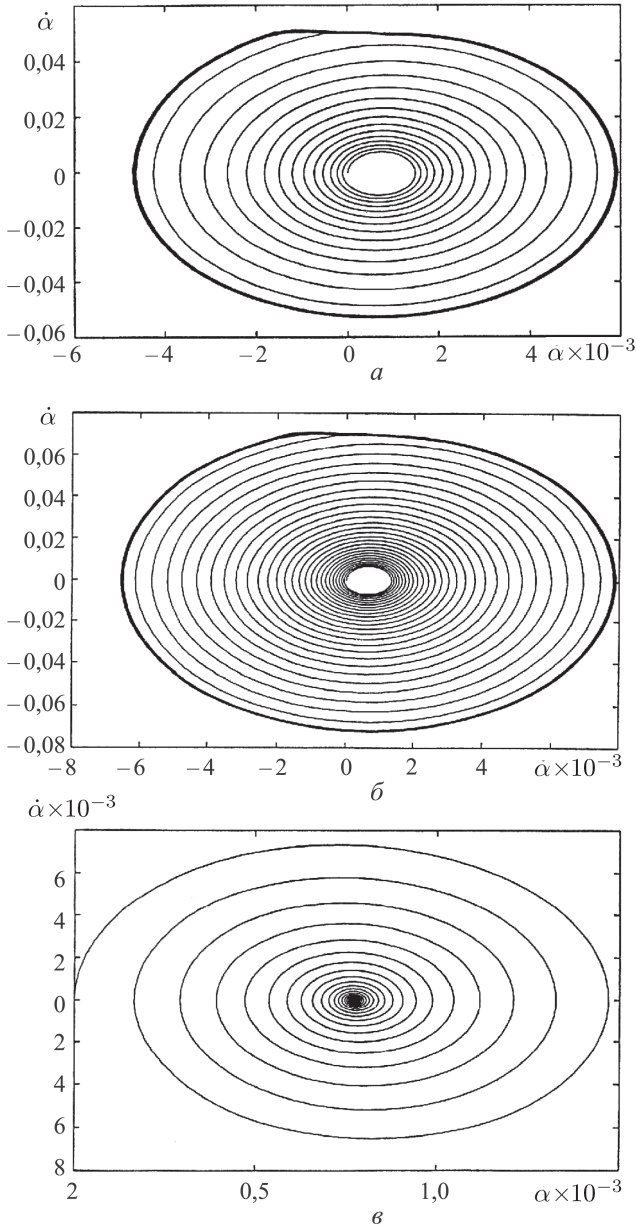


Рис. 5. Фазовые траектории гиросистемы в режиме автоколебаний (*а*, *б*) и соответствующие устойчивому фокусу (*в*)

и в предыдущем случае, но при $\dot{\psi}_0 = 0,15 \text{ с}^{-1}$ представлен на рис. 5, *в*. Как видно, в установившемся режиме ($\alpha_0 = F_0/C$, $\alpha_0 = 0$), $\dot{\theta}_0 = \dot{\psi}_0 > \dot{\theta}_*$. Положительная производная $\left. \frac{dF}{d\dot{\theta}} \right|_{\dot{\theta}_0}$ на этом участке нелинейной характеристики обеспечивает устойчивое состояние равновесия, определяемое особой точкой — устойчивым фокусом.

Выводы. 1. Найдены условия возникновения, области существования и параметры автоколебаний гиросистемы с сухим трением в оси кардано-

ва подвеса при угловом движении основания, как источника энергии автоколебаний.

2. Установлена механическая аналогия трехстепенного гироскопа с сухим (некулоновым) трением в оси карданова подвеса при угловом движении основания с известной в теории колебаний системой под названием “осциллятор с сухим трением на бесконечной ленте, движущейся с постоянной скоростью”, что позволяет распространить результаты и методику многочисленных исследований этого осциллятора на гироскопическую систему с сухим трением.

3. Результаты исследования нелинейной системы на основе метода гармонической линеаризации подтверждены компьютерным моделированием исходной нелинейной гиросистемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А.Ю.* Механика специальных гироскопических систем. Киев, Изд-во АН УССР, 1952. 432 с.
2. *Черников С.А.* Симметричные автоколебания гиросtabilизатора // Изв. АН СССР, ОТН. Энергетика и автоматика. 1960. № 6. С. 133–142.
3. *Броновец М.А., Журавлев В.Ф.* Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Изв. РАН МТТ. 2012. № 3. С. 3–11.
4. *Крагельский И.В., Гитис Н.В.* Фрикционные автоколебания. М.: Наука, 1987. 181 с.
5. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1971. 240 с.
6. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 325 с.
7. *Попов Е.П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973. 583 с.

REFERENCES

- [1] Ishlinskiy A.Yu. Mekhanika spetsial'nykh giroskopicheskikh sistem [Mechanics of special gyroscopic systems]. Kiev, AN USSR Publ., 1952. 432 p.
- [2] Chernikov S.A. Symmetrical self-oscillations of a gyroscopic stabilizer. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk, Energ. Avtom.* [Bull. Acad. Sci. USSR, Tech. Sci. Sec., Power Eng. Autom.], 1960, no. 6, pp. 133–142 (in Russ.).
- [3] Bronovets M.A., Zhuravlev V.F. On self-excited vibrations in friction force measurement systems. *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 261–268. doi: 10.3103/S0025654412030016.
- [4] Kragel'skiy I.V., Gitis N.V. Friktzionnye avtokolebaniya [The friction oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 181 p.
- [5] Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy [Introduction to mechanical vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 240 p.
- [6] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. Prikladnye metody v teorii kolebaniy [Applied methods in the theory of oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 325 p.
- [7] Popov E.P. Prikladnaya teoriya protsessov upravleniya v nelineynykh sistemakh [Applied theory of control processes in nonlinear systems]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 583 p.

Статья поступила в редакцию 25.03.2013

Сергей Акимович Черников — д-р техн. наук, профессор кафедры “Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Академик Российской Академии навигации и управления движением. Автор более 160 научных работ в области гироскопической техники.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5.

S.A. Chernikov — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Instruments and Systems of Orientation, Stabilization and Navigation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Navigation and Motion Control. Author of more than 160 publications in the field of gyroscopic technology.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.