

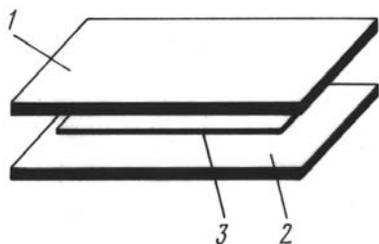
Е. В. Ш е в ц о в а

## ГАЗОВОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ В МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРИБОРАХ

*Рассмотрена методика расчета аэродинамических параметров микромеханических приборов с плоским газовым демпфером с учетом вязкости, сжимаемости и теплопроводности газа. Исследовано влияние сжимаемости газа на вибрационные погрешности таких приборов.*

В последнее десятилетие ведутся активные разработки и исследования микромеханических приборов. Особый интерес при проектировании таких приборов представляет вопрос расчета газового демпфирования. Как правило, аэродинамические параметры микромеханических приборов рассчитывают, используя формулы, полученные для вязкой несжимаемой среды. В случае больших скоростей перемещения чувствительного элемента приборов требуются уточнения, ввиду возникновения нелинейных эффектов, связанных со сжимаемостью газа. Попытки уточнить существующие на сегодняшний день аналитические зависимости предпринимаются рядом авторов. В большинстве случаев они сводятся к получению зависимостей для изотермического сжатия пленки газа в линейной постановке задачи. Использование численных методов не позволяет получать инженерные формулы для расчета аэродинамических параметров микромеханических приборов. В настоящей работе рассматривается методика расчета газодинамических сил в плоском газовом демпфере с учетом сжимаемости газа, а также влияние сжимаемости на вибрационные погрешности таких приборов.

**Математическая модель течения газа в плоском газовом демпфере.** Рассмотрим приборы с плоским газовым демпфером с плоскопараллельным перемещением чувствительного элемента. Модель такого демпфера показана на рис. 1.



**Рис. 1. Модель плоского газового демпфера:**  
1, 2 — неподвижные пластины; 3 — подвижная пластина

Работа плоского газового демпфера моделируется движением двух плоских параллельных пластин. Нижняя пластина 2 — неподвижна, а пластина 3 движется с постоянной скоростью. Учитывая, что расстояние между пластинами мало, длина плоского газового демпфера в 5 раз больше толщины воздушного

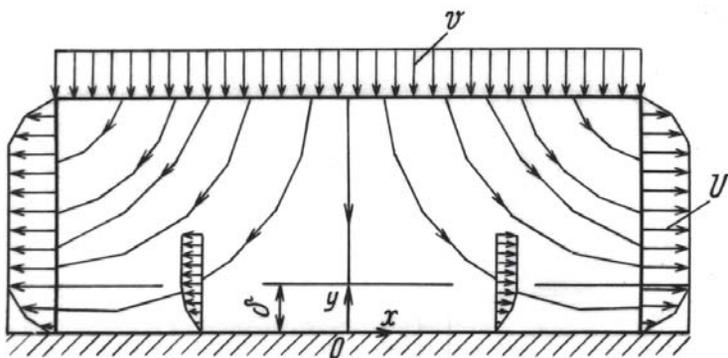


Рис. 2. Модель течения газа в рабочем зазоре плоского газового демпфера

зазора между пластинами, газ вязкий и сжимаемый, числа Рейнольдса велики, то движение газа в приборе можно рассматривать как набегание его на неподвижную пластину со скоростью, равной скорости подвижной пластины. Модель течения газа для этого случая показана на рис. 2.

В литературе [1, 2] такое течение газа называется течением в окрестности критической точки. Математической моделью рассматриваемого течения являются:

система уравнений Навье–Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа

$$\begin{cases} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right); \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right); \end{cases} \quad (1)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

уравнение баланса энергии

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi;$$

$$\Phi = 2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2;$$

уравнение состояния

$$p = \rho RT;$$

здесь  $u$  — составляющая скорости течения газа вдоль оси  $OX$ ;  $v$  — составляющая скорости течения газа вдоль оси  $OY$ ;  $x, y$  — координаты;

$\rho$  — плотность среды;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  $p$  — давление среды;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $T$  — температура;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $R$  — универсальная газовая постоянная, равная 8,314 Дж·г-моль/град.

Рассмотрим двумерное стационарное течение газа в случае отсутствия внешних массовых сил. Используя закон подобия Рейнольдса и учитывая, что для исследуемого течения вязкость среды мала, а числа Рейнольдса велики, запишем для плоского течения сжимаемого газа систему уравнений пограничного слоя:

система уравнений Навье–Стокса

$$\begin{cases} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \end{cases} \quad (3)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

уравнение баланса энергии для пограничного слоя

$$c_p \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + c_p \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \quad (5)$$

уравнение состояния

$$p = \rho RT. \quad (6)$$

В 1942 г. А.А. Дородницын предложил общее преобразование координат, придающее уравнениям пограничного слоя для газа форму, близкую к уравнениям пограничного слоя для несжимаемой жидкости [3].

При этом преобразовании вводятся две новые координаты  $\xi$ ,  $\zeta$ , которые определяются следующими соотношениями:

$$\xi = \int_0^x b \frac{a_\infty}{a_0} \frac{p_\infty}{p_0} dx; \quad \zeta = \frac{a_\infty}{a_0} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy, \quad (7)$$

где  $a$  — скорость звука; индекс  $\infty$  относится к параметрам внешнего течения, индекс 0 относится к адиабатически и изэнтропически заторможенному внешнему течению.

Введем функцию тока  $\psi(x, y)$ , у которой частные производные имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\rho_0} v; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} u,$$

безразмерную “температурную функцию” (безразмерную удельную полную энтальпию)

$$S = \frac{c_p T + \frac{u^2}{2}}{c_p T_0} - 1.$$

Учитывая преобразование координат, выражения для функции тока и безразмерной удельной полной энтальпии, уравнение движения (3) и уравнение баланса энергии (5) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} = (1 + S) \bar{U}_\infty \frac{d\bar{U}_\infty}{d\xi} + \vartheta_0 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \zeta^3}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial S}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial S}{\partial \zeta} = \vartheta_0 \frac{\partial^2 S}{\partial \zeta^2}, \quad (9)$$

где  $\vartheta_0$  — кинематический коэффициент вязкости при начальной абсолютной температуре  $T_0$ .

Решение записанных уравнений ищем в классе функций, описывающих локальное подобие профиля скоростей [2, 4]:

$$\psi = \sqrt{\vartheta_0 \bar{U}_\infty} \sqrt{\xi} \phi(\eta); \quad \zeta = \sqrt{\frac{\vartheta_0 \xi}{\bar{U}_\infty}} \eta; \\ S = S(\eta), \quad (10)$$

при этом

$$\bar{U}_\infty = \frac{V}{\delta} \xi.$$

После преобразований получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\phi'''(\eta) + \phi(\eta) \phi''(\eta) = \phi'^2(\eta) - 1 - S; \quad (11)$$

$$S''(\eta) + \phi(\eta) S'(\eta) = 0 \quad (12)$$

со следующими граничными условиями:

$$\phi = \phi' = 0, \quad S = S_w \quad \text{при} \quad \eta = 0;$$

$$\phi' = 1, \quad S = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \infty.$$

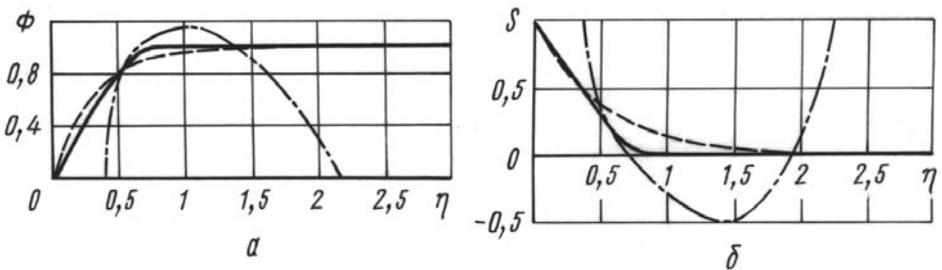
Первое дифференциальное уравнение системы (11) получено из уравнения движения (8), второе уравнение (12) — из уравнения баланса энергии (9). Первое дифференциальное уравнение системы, исходя из граничного условия при  $\eta = \infty$ , имеет иррегулярную особую точку, следуя классификации [5]. Для решения данной системы применим асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения в иррегулярной особой точке [5].

Решение будем искать в двух областях: снизу ( $\eta = 0$ ), где решение двух дифференциальных уравнений запишем в виде разложения в степенной ряд вида  $\phi(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \eta^k$ ,  $S(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \eta^k$ , и области решения сверху ( $\eta \rightarrow \infty$ ), где вначале уравнения линеаризуем, а затем запишем асимптотическое разложение решения в следующем виде, обозначив их знаком  $*$ :  $\phi^*(\eta) = e^{-\frac{\eta^2}{2}} \eta^{-2} h(\eta)$ ,  $S^*(\eta) = e^{-\frac{\eta^2}{2}} p(\eta)$ , где  $h(\eta)$ ,  $p(\eta)$  – асимптотические ряды [5]. Согласование двух решений проведем, используя четыре свободные постоянные, полученные в каждом разложении. Условиями согласования являются равенство скоростей, ускорений, а также самих функций для уравнения движения и равенство удельных полных безразмерных энтальпий, а также их производных для уравнения баланса энергии. Из полученных таким образом пяти уравнений определим четыре неизвестные постоянные, а также точку согласования. В результате получим следующие решения дифференциальных уравнений (11), (12):

$$\begin{aligned} \phi^*(\eta) &= \eta + e^{-\frac{\eta^2}{2}} (-0,32\eta^{-2} + 0,01\eta^{-4} + o(\eta^{-4})) - 0,006 \text{Ei}\left(-\frac{\eta^2}{2}\right); \\ \phi(\eta) &= 1,07\eta^2 - \frac{1}{3}\eta^3 + o(\eta^3); \\ S^*(\eta) &= -0,07e^{-\frac{\eta^2}{2}} (\eta^{-1} - \eta^{-3} + o(\eta^{-3})); \\ S(\eta) &= 1 - 1,4\eta + 0,125\eta^4 + o(\eta^4). \end{aligned} \tag{13}$$

Согласование решений (13), графики полученных решений, а также их сравнение с известными численными решениями показаны на рис. 3.

Отметим, что решение получено для частного случая удельной полной безразмерной энтальпии на стенке равно единице ( $S_w = 1$ )



**Рис. 3. Результаты решения:**

— — полученное решение; - - - - наложенные ограничения; - · - · - численные решения уравнений, полученные Коэном и Решотко [2]

для сравнения получаемого результата с известными численными результатами.

В случае теплоизолированной стенки  $S \equiv 0$ , чему в большинстве случаев соответствуют плоские газовые демпферы, решение системы уравнений пограничного слоя для вязкого сжимаемого теплопроводного газа (3)–(6) с учетом преобразования координат (7), преобразования подобия (10) и предположения о том, что процесс в рабочем зазоре плоского газового демпфера – адиабатический, запишется в виде

$$v = -b \frac{p_\infty}{p_0} \frac{a_\infty}{a_0} \sqrt{\frac{V \vartheta_0}{\delta}} \phi'(\eta); \quad u = b \frac{p_\infty}{p_0} \left(\frac{a_\infty}{a_0}\right)^2 \frac{V}{\delta} x \phi'(\eta);$$

$$T = T_0 (S(\eta) + 1) - \frac{u}{2C_p}; \quad (14)$$

$$p = p_\infty - \frac{\rho V^2}{2 \delta^2} x^2 - \frac{\rho b p_\infty}{2} \left(\frac{a_\infty}{a_0}\right)^2 \frac{V \vartheta_0}{\delta} \left(b \frac{p_\infty}{p_0} \phi^2(\eta) + 2\phi'(\eta)\right),$$

где  $\eta = -2,5 \frac{a_\infty}{a_0} \frac{\rho_\infty}{\rho_0} \sqrt{\frac{V}{\delta \vartheta_0}} \frac{\delta x}{y^{0,4}}$ ,  $\chi$  – показатель адиабаты;  $V$  – скорость перемещения пластины плоского газового демпфера;  $\delta$  – толщина воздушного зазора между пластинами;  $\vartheta$  – коэффициент кинематической вязкости.

**Расчет аэродинамических параметров плоского газового демпфера.** С учетом уравнения неразрывности (2) и зависимостей для распределения скоростей и давлений в вязком потоке при набегании сжимаемого газа на неподвижную пластину [2]

$$u = x f'(y), \quad v = -f(y),$$

и в предположении, что процесс адиабатический, запишем систему уравнений Навье–Стокса для вязкого сжимаемого газа (1) в рабочем зазоре плоского газового демпфера в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2\rho f'^2(y) - \frac{\partial \rho}{\partial y} f(y) f'(y).$$

Используя полученное решение (14) системы уравнений (3)–(6), описывающих течение вязкого сжимаемого газа, осредненное по толщине пограничного слоя, запишем формулу для определения аэродинамических параметров приборов с учетом сжимаемости газа:

$$\nabla p = -b \left(\frac{p_\infty}{p_0}\right)^2 \left(\frac{a_\infty}{a_0}\right)^3 \left(\frac{12\mu V a_\infty}{\delta^3 a_0} + \frac{\rho_0}{\rho_\infty} \frac{8V^{\frac{3}{2}} \vartheta_0^{\frac{1}{2}}}{\delta^{\frac{5}{2}}} (\rho_\infty - \rho_{эф})\right)$$

или

$$\nabla p = -b \left( \frac{p_\infty}{p_0} \right)^2 \left( \frac{a_\infty}{a_0} \right)^4 \frac{12\mu V}{\delta^3} \left( 1 + \frac{2}{3} \sqrt{\text{Re}} \frac{a_0}{a_\infty} \frac{\mu_0}{\mu} \frac{(\rho_\infty - \rho_{\text{эф}})}{\rho_\infty} \right). \quad (15)$$

Правая часть полученного уравнения представляет собой расход газа под пластиной плоского газового демпфера. Она отличается от общеизвестной формулы, традиционно используемой при расчетах, наличием второго члена, обусловленного сжимаемостью газа и нелинейно зависящего от скорости движения пластины, а также от положения подвижной пластины относительно неподвижной. В случае небольших скоростей перемещения чувствительного элемента, а также в случае постоянной плотности, нелинейный член обращается в нуль, и данная формула переходит в известную формулу линейной теории.

График зависимости расхода газа под пластиной от частоты колебания чувствительного элемента представлен на рис. 4.

Рассмотрен следующий частный случай: рабочий зазор прибора равен 20 мкм, амплитуда колебаний чувствительного элемента составляет 5 мкм, давление воздуха в приборе внешнее, равное 101325 Па (1 атм.) и 60795 Па (0,6 атм.).

В случае использования зависимостей линейной теории расход газа линейно увеличивается с возрастанием частоты колебаний чувствительного элемента, коэффициент демпфирования остается постоянным. Учет в математической модели сжимаемости течения газа

приводит к снижению расхода газа под пластиной, вследствие чего происходит уменьшение демпфирующей силы. На основании анализа полученного решения можно заключить, что уменьшение расхода газа под пластиной происходит в силу того, что при высоких частотах колебаний чувствительного элемента растет позиционная составляющая, нелинейно зависящая от величины зазора, а также от частоты колебаний пластины.

Распределение давления в рабочем зазоре плоского газового демпфера находят путем интегрирования уравнения (15).

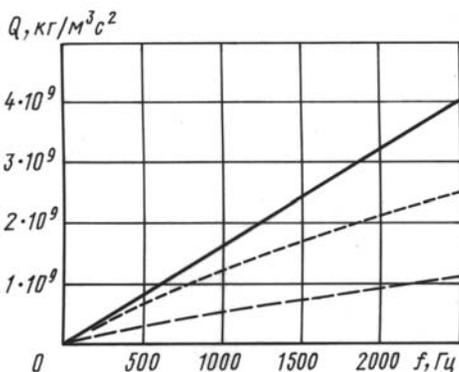


Рис. 4. Зависимость расхода газа под пластиной от частоты колебаний чувствительного элемента:

— — использование формул линейной теории; --- и ---- — сжимаемости газа в математической модели течения газа при внешнем давлении 101325 и 60795 Па

Демпфирующая сила и коэффициент демпфирования определяются следующими соотношениями:

$$F_d = \iint_S P dS; \quad K_d = \frac{F_d}{V}.$$

Для случая одномерной полосы и круга выражения для коэффициента демпфирования имеет вид:

для одномерной полосы —

$$K_d = \frac{16\mu}{\delta^3} cl^3 \left( 1 + \frac{2}{3} \sqrt{\text{Re}} \frac{(\rho_\infty - \rho_{\text{эф}})}{\rho_\infty} \right) + \frac{P_\infty 4cl}{V};$$

для круга —

$$K_d = \frac{3\pi \mu r^4}{2 \delta^3} \left( 1 + \frac{2}{3} \sqrt{\text{Re}} \frac{(\rho_\infty - \rho_{\text{эф}})}{\rho_\infty} \right) + \frac{2\pi P_\infty}{V},$$

где  $\rho_{\text{эф}}$  — плотность газа в некоторой характерной точке, определяемая соотношением

$$\rho_{\text{эф}} = \frac{p_\infty}{RT} \left( \frac{\delta}{y} \right)^x;$$

$l$ ,  $c$  — длина и ширина полосы;  $r$  — радиус круга.

**Влияние сжимаемости газа на динамические характеристики приборов с плоским газовым демпфером.** При работе акселерометров с плоским газовым демпфером в условиях больших вибрационных возмущений в контуре электрической пружины могут возникать явления захвата, заключающиеся в возникновении колебаний, амплитуды которых значительно превышают зону линейности прибора [6]. Большие амплитуды колебаний подвижного узла акселерометра приводят к возникновению значительных вибрационных погрешностей [6], поэтому работа контура акселерометра в режиме захвата должна быть исключена. Главной причиной возникновения явления захвата в контуре электрической пружины является пропадание электрического демпфирования при насыщении контура прибора, в результате чего жесткость электрической пружины становится равной нулю. При этом амплитуда колебаний подвижного узла прибора резко возрастает, и возрастает кинетическая энергия, запасаемая подвижным узлом к моменту его возвращения в зону линейности.

Если уровень вибрационного воздействия соответствует частоте и амплитуде точки  $B$  (рис. 5), то прибор работает в линейной зоне, и амплитуда колебаний возрастает линейно (рис. 6).

При увеличении вибрационного возмущения, при переходе границы области захвата, амплитуда колебаний возрастает скачком (см. рис. 6). Большие амплитуды колебаний сопровождаются значительными вибрационными погрешностями.

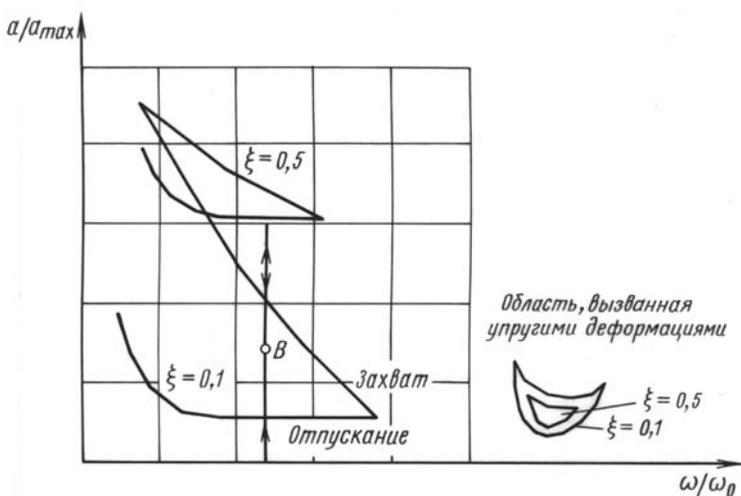


Рис. 5. Зона захвата прибора с плоским газовым демпфером при гармонической вибрации

При последовательном уменьшении вибрационного воздействия эти колебания сохраняются вплоть до уровня вибрации, соответствующего отпусканью (см. рис. 6).

Поэтому в приборах с плоским газовым демпфером желательно комбинировать электрическое и механическое демпфирование.

В работе [6] показано, что при правильном выборе параметров корректирующей цепи и наличии механического демпфирования, можно полностью устранить возникновение режимов захвата в контуре акселерометра.

При проектировании приборов с плоским газовым демпфером рассчитывают величину электрического и воздушного демпфирования в зазоре приборов.

Если расчет механического демпфирования вести без учета сжимаемости газа, но с учетом известных формул для модели вязкого несжимаемого газа, то при расчетной оценке динамики акселерометра

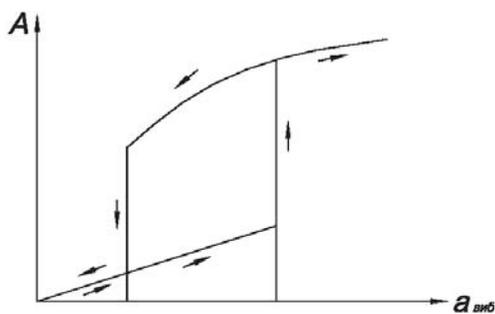


Рис. 6. Область захвата

можно установить отсутствие явления захвата. Однако из-за уменьшения демпфирования вследствие сжимаемости газа такая оценка может оказаться неверной.

Этот факт был экспериментально обнаружен при вибрационных испытаниях акселерометров КИ67-3, КА-400N [6], проведенных на вибростендах.

В ходе эксперимента акселерометр КИ67-3 устанавливали таким образом, чтобы его ось совпадала с осью вибрационных возмущений, и плавно изменяли вибрационное воздействие по частоте. В области частот 1500...1800 Гц уровень вибрационных погрешностей, регистрируемых при испытаниях, составлял 0,6 g при давлении в приборе, равном 60795 Па (0,6 атм.)

При увеличении давления газа до 1 атм. эффект захвата пропал, что хорошо объясняется полученными в работе соотношениями (20), а именно: при увеличении давления газа в приборе влияние сжимаемости среды уменьшается.

При испытаниях акселерометра, конструкция которого показана на рис. 7, разработанного на кафедре ИУ-2 [7], на вибростенде фирмы Link при различной ориентации измерительной оси прибора относительно оси вибрации наибольшие погрешности имели место при вибрации, ориентированной по измерительной оси прибора (рис. 8).

Следует отметить, что прибор имеет три механических резонанса на частотах 420, 670 и 1529 Гц. При вибрационных воздействиях по измерительной оси акселерометра эти резонансы вводят контур акселерометра в режим захвата, сопровождающегося вибрационными погрешностями порядка  $10^{-2}g$ , и сохраняются до частот 2000 Гц (см. рис. 8, в).

Уменьшение уровня вибрационных воздействий приводит к резко уменьшению погрешностей, как и следует из теории.

Изменение параметра компенсационного контура с учетом сжимаемости газа позволяет устранить явление захвата в указанной области частот.

**Заключение.** Проанализирована структура течения газа и предложена математическая модель течения вязкого сжимаемого газа в рабочем зазоре плоского газового демпфера. Получено аналитическое решение системы уравнений, описывающих течение газа в рабочем зазоре плоского газового демпфера, учитывающее сжимаемость и температурные процессы в газе. Получены формулы для инженерных расчетов аэродинамических сил в рабочем зазоре плоского газового демпфера, уточняющие существующие зависимости. Экспериментально под-

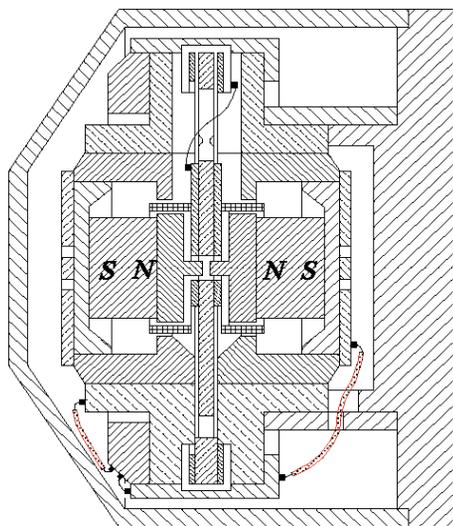


Рис. 7. Конструкция маятникового компенсационного акселерометра

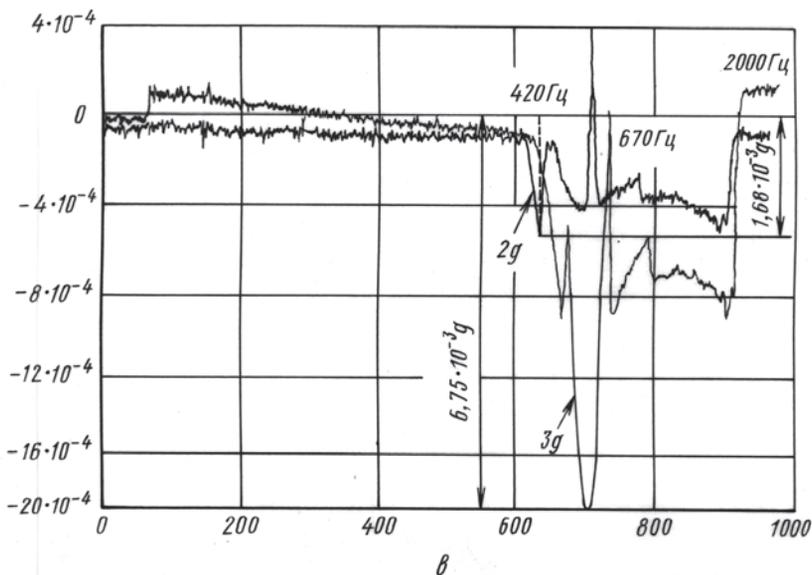
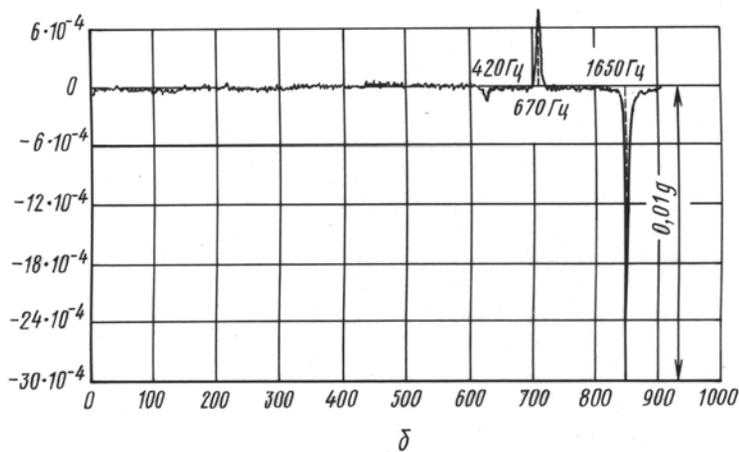
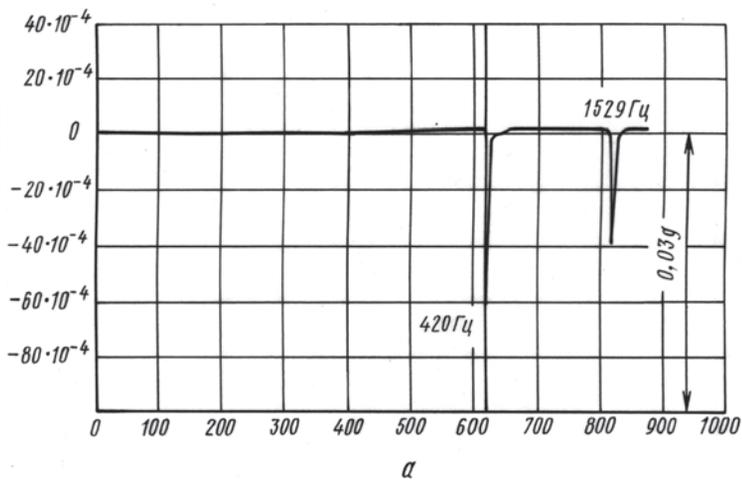


Рис. 8. Вибрационные погрешности акселерометра

тверждено влияние сжимаемости газа на динамические характеристики акселерометра с плоским газовым демпфером. Определены уровни вибрационных погрешностей акселерометров, вызванных сжимаемостью газа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л о й ц я н с к и й Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
2. Ш л и х т и н г Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
3. Д о р о д н и ц ы н А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе // Прикладная математика и механика. – 1942. – Т. 6. – С. 449–486.
4. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1987. – 400 с.
5. В а з о в В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
6. К о н о в а л о в С. Ф. Теория виброустойчивости акселерометров. – М.: Машиностроение, 1992. – 271 с.
7. А.С. 99113694 (РФ). Маятниковый компенсационный акселерометр / С.Ф. Коновалов, А.А. Коновченко, А.С. Ларшин // Б.И. – 2001. – № 17.

Статья поступила в редакцию 7.06.2005

Екатерина Викторовна Шевцова родилась в 1977 г., окончила в 2002 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 3 научных работ в области приборостроения и навигации.

Ye.V. Shevtsova (b. 1977) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2002. Author of 3 publications in the field of instruments and navigation.