

МОДЕЛЬ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ В ФОРМЕ РАСШИРЕННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Рассмотрена модель фазовой автоподстройки в форме расширенного фильтра Калмана. Проведено исследование точности сопровождения и выявления возможных срывов синхронизации в данной модели.

Исследованию систем фазовой автоподстройки (ФАП) посвящено много работ, в том числе и монографий [1–5]. Однако многие вопросы статистической динамики ФАП до сих пор остаются малоисследованными. В частности, недостаточно исследованы демоделирующие способности ФАП, точность воспроизведения модулирующего сигнала колебаний, а также влияние срывов синхронизации на процессы воспроизведения этого колебания.

В настоящей статье в целях решения этих вопросов рассмотрена модель ФАП в форме расширенного фильтра Калмана (РФК), действующего в качестве оптимального демодулятора. Приведены данные по точности сопровождения и параметрам системы, приводящим к эффективному функционированию ФАП.

Нелинейная ФАП, составляющая расширенный фильтр Калмана. Рассмотрим использование алгоритма нелинейной фильтрации при синтезе квазиоптимальной ФАП.

Будем считать, что модель сообщения описывается в векторно-матричной форме

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}w_t,$$

где \mathbf{x} — вектор сообщения размерностью 2, причем 1-я координата вектора \mathbf{x} имеет смысл фазы сигнала;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

w_t — ГБШ с нулевым средним значением при КФ $R_w(\tau) = q\delta(\tau)$.

Уравнение наблюдения имеет вид

$$y_t = A \sin(\omega_0 t + x_1) + n(t) = s(t, x_1) + n(t) = \mathbf{H}_0 \mathbf{s} + n(t);$$

$$\mathbf{s} = [s_1 \quad s_2]^T; \quad s_2 = 0; \quad s_1 = s(t, x_1); \quad \mathbf{H}_0 = [1 \quad 0],$$

где $A, \omega_0 = \text{const}$, $n(t)$ – ГБШ с нулевым средним значением при КФ $R_n(\tau) = N\delta(\tau)$.

Уравнения расширенного фильтра Калмана имеют вид

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, t) + D \frac{\partial \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial x} N^{-1} [y_t - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}, t)],$$

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{D} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{F}^T(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{G}q\mathbf{G}^T - \mathbf{D} \left(\frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right) \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{D}.$$

В данном случае

$$\mathbf{F}(x, t) = \mathbf{A}x; \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 s = A_0 \sin(\omega_0 t + x_1) \mathbf{H}_0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \hat{x}} = A_0 \cos(\omega_0 t + x_1) \mathbf{H}_0;$$

$$\mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \hat{x}} =$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + x_1) = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + x_1) = \\ = \boldsymbol{\delta} A_0 \cos(\omega_0 t + x_1);$$

$$\boldsymbol{\delta} = [d_{11} \quad d_{12}]^T.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \mathbf{A}\hat{x} + \left(\frac{A_0}{N} \right) \cos(\omega_0 t + x_1) [y_t - A_0 \sin(\omega_0 t + x_1)] = \\ &= \mathbf{A}\hat{x} + \left(\frac{A_0 y_t}{N} \right) \boldsymbol{\delta} \cos(\omega_0 t + x_1) + \left(\frac{A_0}{2N} \right) \boldsymbol{\delta} \sin[2(\omega_0 t + x_1)]. \end{aligned}$$

Пренебрегая второй гармоникой, получим систему ДУ для оценок \hat{x}_1 , \hat{x}_2 в скалярной форме:

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = x_2 + d_{11} \frac{A_0}{N} y_t \cos(\omega_0 t + x_1),$$

$$\frac{d\hat{x}_2}{dt} = -\gamma x_2 + d_{12} \frac{A_0}{N} y_t \cos(\omega_0 t + x_1).$$

Рассмотрим дисперсионное уравнение

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T + q\mathbf{G}\mathbf{G}^T - \frac{1}{N} \boldsymbol{\delta} A_0 \cos(\omega_0 t + x_1) \boldsymbol{\delta}_1 A_0 \cos(\omega_0 t + x_1),$$

где $\delta_1 = \mathbf{H}_0 \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \end{bmatrix}$;

$$\delta \delta_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & d_{11}d_{12} \\ d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G} \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} & d_{22} \\ -\gamma d_{12} & -\gamma d_{22} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} & -\gamma d_{12} \\ d_{22} & -\gamma d_{22} \end{bmatrix}.$$

Пренебрегая второй гармоникой, получаем систему ДУ в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_{11} & \dot{d}_{12} \\ \dot{d}_{12} & \dot{d}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d_{12} & d_{22} - \gamma d_{12} \\ d_{22} - \gamma d_{12} & -2\gamma d_{22} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} - \frac{A_0^2}{2N} \begin{bmatrix} d_{11}^2 & d_{11}d_{12} \\ d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

Перепишем эту систему в скалярном виде

$$\frac{d(d_{11})}{dt} = 2d_{12} - \left(\frac{A_0^2}{2N} \right) d_{11}^2;$$

$$\frac{d(d_{12})}{dt} = d_{22} - \gamma d_{12} - \left(\frac{A_0^2}{2N} \right) d_{11}d_{12};$$

$$\frac{d(d_{22})}{dt} = q - 2\gamma d_{22} - \left(\frac{A_0^2}{2N} \right) d_{12}^2,$$

где $d_{11} = \sigma_1^2$, $d_{12} = k$, $d_{22} = \sigma_2^2$.

Модель ФАП второго порядка. Для получения такой модели ФАП приведенные уравнения представим в следующем виде:

$$dy = \sqrt{2} \cos(w_0 t + x_2) dt + q dv_t;$$

$$d\hat{x}_1 = -k\hat{x}_1 - \sqrt{2}A_0q^{-2}d_{12} \sin(w_0 t + \hat{x}_2)[\sqrt{2} \cos(w_0 t + x_2) dt + q dv_t];$$

$$d\hat{x}_2 = \hat{x}_1 - \sqrt{2}A_0q^{-2}d_{22} \sin(w_0 t + \hat{x}_2)[\sqrt{2} \cos(w_0 t + x_2) dt + q dv_t].$$

Пренебрегая членами с удвоенной частотой в правой части и считая, что $\sin(\omega_0 t + x_2) dv_t$ является дифференциалом винеровского процесса, получим:

$$d\hat{x}_1 = -k\hat{x}_1 dt - A_0^2 q^{-2} d_{12} \sin(\hat{x}_2 - x_2) dt + A_0 q^{-1} d_{12} d\xi_t;$$

$$d\hat{x}_2 = \hat{x}_1 dt - A_0^2 q^{-2} d_{22} \sin(\hat{x}_2 - x_2) dt + A_0 q^{-1} d_{22} d\xi_t.$$

На рис. 1 изображена структурная схема, соответствующая полученной модели ФАП. На этом рисунке $e(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ — сигнал рассогласования, где $d\xi_t$ — независимые белые шумы с единичной интенсивностью, $\rho = \frac{A_0^2}{q^2}$ — ОСШ в канале наблюдения.

Рассмотрим оцениваемые фильтром элементы матрицы дисперсий ошибок фильтрации, зависимость которых от времени описывается тремя уравнениями. В установившемся режиме при производных, равных нулю, получается система алгебраических уравнений.

Из последнего уравнения выразим d_{12} :

$$d_{12} = \rho \frac{d_{22}^2}{2};$$

из первого уравнения найдем коэффициент d_{11} :

$$d_{11} = \frac{1}{2k} g^2 - \frac{1}{8k} \rho^3 d_{22}^4;$$

подставляя найденные значения d_{12} , d_{11} во второе уравнение, получим

$$(K d_{22} + \rho \frac{d_{22}^2}{2})^2 = \frac{g^2}{\rho}.$$

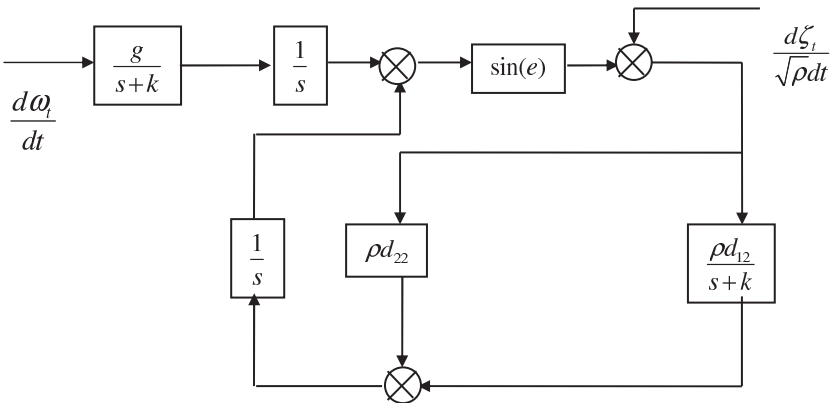


Рис. 1. Структурная схема модели ФАП

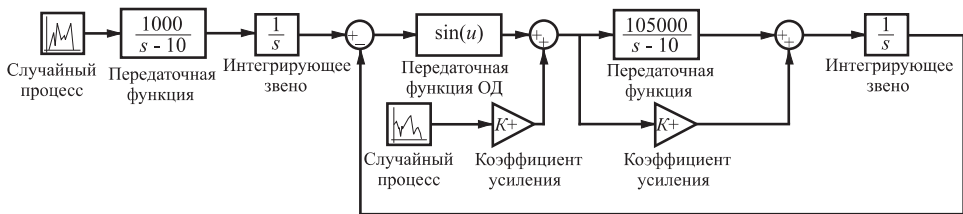


Рис. 2. Структурная схема системы синхронизации 2-го порядка

Решим это квадратное уравнение. Поскольку $d_{22} > 0$, то

$$\frac{1}{2}\rho d_{22} + K d_{22} = \frac{g}{\sqrt{\rho}};$$

$$d_{22} = -\frac{K}{\rho} + \sqrt{\frac{K^2}{\rho^2} + \frac{2g}{\rho^{\frac{3}{2}}}}.$$

Введем следующие обозначения: $\beta = \frac{\sqrt{D_\Omega}}{K}$ – индекс частотной модуляции; $r = \frac{\rho}{K}$ – ОСШ в полосе частот сообщения; $D_\Omega = \frac{g^2}{2K}$ – дисперсия частоты в установившемся режиме;

На рис. 2 представлена структурная схема полученной системы синхронизации 2-го порядка.

Анализ результатов. На рис. 3, а представлены графики слежения за сигналом по частоте для первого варианта моделирования. Штриховой линией изображен график наблюдения, а сплошной – сообщения.

На рис. 3, б представлены графики слежения за сигналам по фазе для первого варианта моделирования (таблица). Слежение за фазой сигнала достаточно качественное, о чем свидетельствуют невысокие амплитудные значения ошибок, приведенные в виде графиков на рис. 4 (отчетливо видны перескоки фазы). Штриховой линией обозначено сообщение, а сплошной – наблюдение.

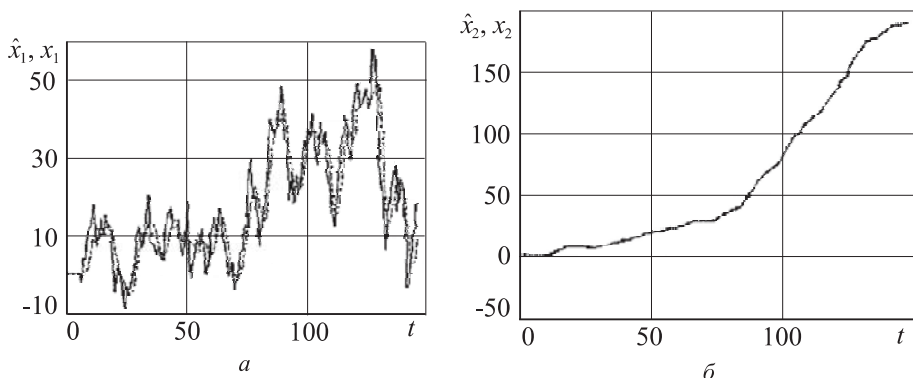


Рис. 3. Графики слежения за сигналом по частоте (а) и фазе (б) для первого варианта моделирования

№ рисунка	Вариант моделирования	K	g	q	d_{22}	d_{12}	A_0
3, а, б; 4	1	0,1	100	1	0,22	2,21	10
5, 6, 7	2	10	1000	1	0,18	4,46	50

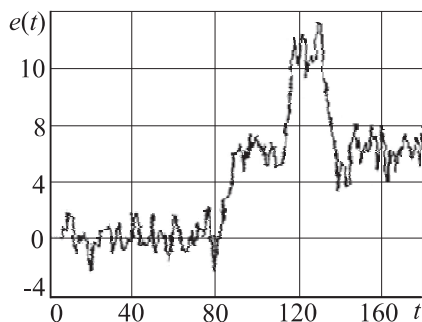


Рис. 4. График ошибок слежения за сигналом по фазе для первого варианта моделирования

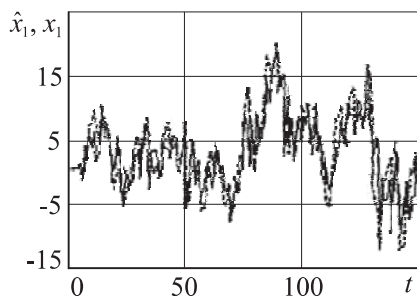


Рис. 5. Зависимости наблюдения и сообщения (частота сигнала)

Зависимости наблюдения и сообщения (частота сигнала) по аналогии с рис. 3, а приведены на рис. 5, однако, получены эти зависимости при втором моделировании (см. таблицу). В отличие от рис. 3, а слежение за частотой сигнала здесь проходит с большей ошибкой, чем в предыдущем случае.

На рис. 6 представлен график слежения за сигналом по фазе для второго варианта моделирования (см. таблицу). Однако вместо постоянного монотонного нарастания, как показано на рис. 3, б, появляются участки с перескоками фазы. Это свидетельствует о нестабильности сигнала, хотя, качество слежения за фазой сигнала достаточно высокое.

На рис. 7 представлен график ошибок слежения за сигналом по фазе. Как видно из рис. 7, амплитудные значения ошибок не изменились

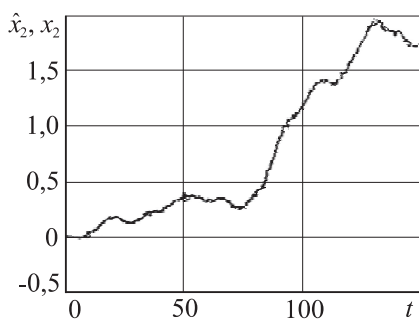


Рис. 6. График слежения за сигналом по фазе для второго варианта моделирования

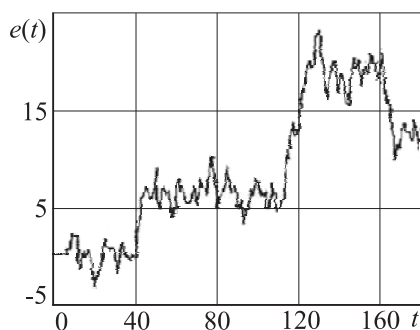


Рис. 7. График ошибок слежения за сигналом по фазе

по отношению к рис. 3, б, однако, появилось большее количество перескоков фазы. Это обусловлено увеличением уровня шума в сигнале (см. таблицу).

Полученные результаты ошибок слежения за сигналом по первому и второму вариантам моделирования системы свидетельствуют о том, что модель ФАП в форме расширенного фильтра Калмана незначительно меняет качество слежения за сигналом по фазе, даже при значительном изменении входных параметров сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л и н д с е й В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. – М.: Сов. Радио, 1978. – 599 с.
2. L i n d s e y W. C, S i m o n M. K. Telecommunication systemes engineering N.Y Prentice-Hall, 1972.
3. G a r d n e r F. M. Phase lock techniques 2nd ed. N.Y.Wley, 1979.
4. Ш а х т а р и н Б. И. Статистическая динамика систем синхронизации – М.: Радио и связь, 1998. – 488 с.
5. Т и х о н о в В. И., Х а р и с о в В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 2004. – 608 с.
6. Т и х о н о в В. И, Ш а х т а р и н Б. И, С и з ы х В. В. Случайные процессы. Примеры и задачи ТЗ. Оптимальная фильтрация, экстраполяция и моделирование. – М.: Радио и связь, 2004. – 407 с.

Статья поступила в редакцию 3.05.2005

Николай Михайлович Трифонов родился в 1979 г., окончил в 2000 г. Московский инженерно-физический институт, аспирант кафедры “Автономные информационные управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор нескольких научных работ в области оптимальных систем управления шагающими роботами.

N.M. Trifonov (b.1979) graduated from the Moscow Institute for Engineering and Physics in 2000. Post-graduate of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of optimal systems to control walking robots.

Андрей Александрович Быков родился в 1981 г. Студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области помехоустойчивости систем передачи информации, в том числе систем синхронизации.

A.A. Bykov (b. 1981) – student of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of noise immunity of data transfer systems including synchronization systems.