

УДК 621.396

Б. И. Шахтарин, А. А. Самохвалов

**КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ
ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ**

Рассмотрен квазиоптимальный синтез систем фазовой автоподстройки частоты для оценки информационных параметров сигнала с частотной модуляцией. Представлены методики и результаты численных расчетов как для непрерывной, так и для цифровой системы фазовой синхронизации.

При проектировании систем синхронизации (или систем слежения) должны учитываться многие ключевые моменты, такие как способ оценки информационного параметра (фазы, частоты), критерий оптимальности системы слежения, в качестве которого может быть выбрано максимальное быстродействие, минимальная динамическая ошибка, минимальная дисперсия ошибки оценивания и т.д. Их совокупность, в конечном счете, определяет тип, структуру, а также основные рабочие параметры будущего устройства. Помимо этого вводятся ограничения по вычислительной сложности алгоритма фильтрации и по сложности его аппаратной реализации, так как в итоге это скажется на общей стоимости устройства. Поскольку модели сообщения и наблюдения в задачах слежения являются существенно нелинейными, то оптимальные алгоритмы фильтрации в большинстве случаев получаются чрезвычайно сложными, поэтому широко используются квазиоптимальные алгоритмы. Последние с большей или меньшей степенью точности аппроксимируют оптимальные алгоритмы и значительно проще реализуются на практике, немного уступая в качестве процесса слежения.

Идея квазиоптимального подхода состоит в том, что система фазовой автоподстройки частоты (ФАП) разбивается на линейную и нелинейную части и далее уже используется более простая и удобная в применении процедура линейного синтеза оптимального фильтра нижних частот (ФНЧ) системы ФАП (рис. 1). Такой подход позволяет избежать трудностей технического характера, связанных с применением теории нелинейной оптимальной фильтрации для синтеза оптимального приемного устройства целиком [1], заменив



Рис. 1. Функциональная схема обобщенной системы ФАП

его синтезом приемника с частично заданной структурой. Представленная методика основана на линейной оптимальной фильтрации Калмана (ее непрерывном и цифровом вариантах). Таким образом, полученный при решении задачи синтеза оптимальный фильтр (цифровой или непрерывный фильтр Калмана) есть фильтр нижних частот в прямой цепи ФАП, обеспечивающий несмещенную (с минимальной дисперсией) оценку информационного параметра сигнала. В настоящей статье использованы материалы работ [2, 3]. Показана общность подхода к синтезу как непрерывных ФАП, так и цифровых (ЦФАП), приведены графические результаты анализа синтезированных систем.

Синтез ФАП. Рассмотрим методику синтеза непрерывной системы фазовой синхронизации, в основе которой, как уже было сказано, лежит непрерывная оптимальная фильтрация Калмана.

Пусть на вход приемного устройства, оптимальную структуру которого необходимо определить, поступает аддитивная смесь

$$y(t) = s(t) + n(t) \quad (1)$$

полезного сигнала $s(t) = A \sin \varphi(t)$ и гауссова белого шума (ГБШ) $n(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$R_n(\tau) = \overline{n(t_1)n(t_2)} = N\delta(t_2 - t_1)$$

(черта сверху означает операцию статистического усреднения).

Если амплитуда сигнала постоянна — $A = \text{const}$, а фаза $\varphi(t)$ может быть представлена компонентой или суммой компонент некоторого марковского процесса (т.е. имеет дробно-рациональный спектр), то оптимальный приемник представляет собой ФАП (см. рис. 1), содержащую фазовый детектор ФД, ФНЧ и управляемый генератор УГ. Фильтр и генератор в совокупности образуют линейную часть системы (см. рис. 1, штриховая линия), однозначно определяемую динамикой фазы $\varphi(t)$ принимаемого сигнала $s(t)$ и спектральной плотностью N шума на входе ФАП. Для конкретизации ее структуры в каждом отдельном случае достаточно установить связь между параметрами сигналов на входе и выходе ФД, а затем воспользоваться непосредственно аппаратом линейной оптимальной фильтрации Калмана.

Фазу $\varphi(t)$ в совокупности с производными можно представить выходным сигналом некоторой линейной динамической системы, возбуждаемой белым гауссовым шумом, в виде априорного дифференциального уравнения (ДУ)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — вектор-столбец координат системы, или вектор состояния; $\mathbf{\Phi}(t)$ — матрица системы; $\mathbf{G}(t)$ — матрица возмущений; $\mathbf{u}(t)$ — вектор-столбец шума с нулевым средним и ковариационной матрицей $\mathbf{Q}(t)$.

На входе линейного оптимального фильтра в общем случае наблюдается сигнал $\mathbf{z}(t)$, являющийся линейной комбинацией компонент вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ и нормального белого шума $\mathbf{v}(t)$:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t). \quad (3)$$

Уравнение (3) называют уравнением наблюдения, а матрицу $\mathbf{H}(t)$ — матрицей наблюдений. Корреляционную функцию шума в канале связи можно представить как

$$\overline{\mathbf{v}(t) \mathbf{v}^T(\tau)} = \mathbf{R}(t) \delta(t - \tau).$$

Оптимальный приемник (фильтр), дающий несмещенную (с минимальной дисперсией) оценку $\hat{\mathbf{x}}(t)$ вектора $\mathbf{x}(t)$ при условии, что $\mathbf{v}(t)$ — ГБШ с нулевым средним, представляет собой динамическую систему, описываемую матричным ДУ [3] (ДУ оценки):

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t) [\mathbf{z}(t) - \mathbf{H}(t) \hat{\mathbf{x}}(t)], \quad (4)$$

где $\mathbf{K}(t)$ — матрица коэффициентов усиления в прямой цепи (в общем случае зависящих от времени), определяемая через матрицу наблюдения, ковариационную матрицу шума и матрицу ковариаций ошибок измерений $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}^{-1}(t), \quad (5)$$

которая, в свою очередь, определяется из матричного дифференциального уравнения Риккати:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{\Phi}^T(t) - \\ - \mathbf{P}(t) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{G}^T(t), \\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда принимаемый сигнал (1) модулирован по частоте нормальным случайным процессом с ограниченным спектром, а спектр частотной модуляции совпадает со спектром сигнала на выходе апериодического звена первого порядка с передаточной функцией $W(p) = 1/(1 + Tp)$, возбуждаемого нормальным белым шумом $u_1(t)$ с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\overline{u_1(t) u_1(\tau)} = q_1 \delta(t - \tau).$$

В этом случае текущая частота $\omega(t)$ передаваемого сигнала определяется соотношением

$$\omega(t) = \omega_c + \frac{u_1(t)}{1 + Tp}, \quad (6)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; ω_c – частота несущей; $u_1(t)/(1 + Tp)$ – сигнал формирующего фильтра (информационный параметр модулированного сигнала).

Из соотношения (6) получим

$$\dot{\omega}(t) = \gamma(-\omega(t) + \omega_c) + \dot{\omega}_c + \gamma u_1(t), \quad \gamma = 1/T. \quad (7)$$

Обозначив $\varphi(t) = x_1(t)$, $\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = x_2(t)$, $\omega_c = x_3(t)$, из уравнения (7) получим систему ДУ параметров сигнала на входе ФАП:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) = -\gamma x_2(t) + \gamma x_3(t) + \gamma u_1(t) + u_2(t); \\ \dot{x}_3(t) = u_2(t). \end{cases} \quad (8)$$

Последнее из этих априорных уравнений описывает процесс блуждания частоты несущей (винеровский случайный процесс). Здесь $u_2(t)$ – ГБШ с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\overline{u_2(t) u_2(\tau)} = q_2 \delta(t - \tau).$$

Запишем систему ДУ (8) в матричной форме (2):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{u}(t),$$

где

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При этом корреляционная функция шума имеет вид

$$\overline{\mathbf{u}(t) \mathbf{u}^T(\tau)} = \mathbf{Q}(t) \delta(t - \tau),$$

матрица спектральных плотностей –

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку рассматриваемый оптимальный приемник содержит на входе ФД, то матрица наблюдений постоянна и имеет один ненулевой

элемент (т.е. изменяется только фаза входного сигнала):

$$\mathbf{H} = [k_d \ 0 \ 0],$$

где k_d – коэффициент передачи фазового детектора (крутизна рабочего участка его характеристики; при линеаризации уравнения наблюдения $k_d = dg(x)/dx|_{x=0}$, где $g(x)$ – нелинейность ФД).

Тогда

$$\mathbf{z}(t) = [z_1(t)], \quad \mathbf{v}(t) = [v_1(t)],$$

При этом

$$\overline{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)} = \overline{v_1(t)v_1(\tau)} = \mathbf{R}(t)\delta(t-\tau) = \rho \cdot \delta(t-\tau).$$

В нашем случае оптимальная система автоподстройки рассматривается как стационарная и матрицы Φ , \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} и \mathbf{R} не зависят от времени. Поэтому решение уравнения Риккати – матрица $\mathbf{P}(t)$ также постоянна и найти $\mathbf{P}(t)$ можно из так называемого условия стационарности $\dot{\mathbf{P}}(t) = 0$ (в этом случае говорят о вырождении уравнения Риккати в алгебраическое уравнение). Таким образом, это уравнение можно записать в виде

$$\Phi\mathbf{P} + \mathbf{P}\Phi^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T = 0. \quad (9)$$

Подставляя значения матриц Φ , \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} и \mathbf{R} в выражение (4), приходим к дифференциальным уравнениям оптимального приемника (уравнениям оценок):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\hat{x}_1(t) = \hat{x}_2(t) + k_1(z_1 - k_d\hat{x}_1); \\ \frac{d}{dt}\hat{x}_2(t) = -\gamma\hat{x}_2(t) + \gamma\hat{x}_3(t) + k_2(z_1 - k_d\hat{x}_1); \\ \frac{d}{dt}\hat{x}_3(t) = k_3(z_1 - k_d\hat{x}_1). \end{array} \right. \quad (10)$$

Этим уравнениям соответствует функциональная схема следящей системы с астатизмом второго порядка, показанная на рис. 2, б. Очевидно, что данную схему можно рассматривать как линейную модель системы фазовой синхронизации, изображенной на рис. 2, а с фильтром нижних частот, имеющим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{k_1p^2 + (\gamma k_1 + k_2)p + \gamma k_3}{S(\gamma + p)p};$$

здесь S – крутизна модуляционной характеристики УГ, передаточная функция которого $W(p) = S/p$.

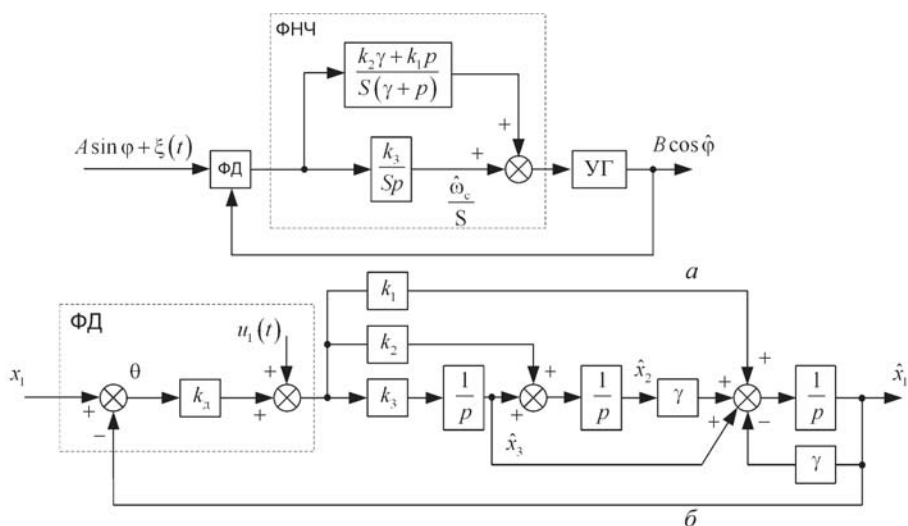


Рис. 2. Функциональная схема ФАП оценки ЧМ сигнала (а) и соответствующая ей линейная модель (б)

Учитывая связь между спектральными плотностями шумов $\xi(t)$ и $v(t)$ на входе и выходе $\Phi Д$, играющего роль идеального множителя принимаемого и опорного сигналов:

$$\rho = \left(\frac{k_d}{A} \right)^2 N, \quad (11)$$

из матрицы коэффициентов (5) получаем, что коэффициенты усиления фильтра Калмана оптимального приемника выражаются через элементы ковариационной матрицы \mathbf{P} формулами

$$k_1 = \frac{A^2}{k_d N} p_{11} = \frac{k_d p_{11}}{\rho}, \quad k_2 = \frac{A^2}{k_d N} p_{21} = \frac{k_d p_{21}}{\rho}, \quad k_3 = \frac{A^2}{k_d N} p_{31} = \frac{k_d p_{31}}{\rho}. \quad (12)$$

Элементы p_{ij} , в свою очередь, являются решением матричного уравнения (9). Подставляя в него соотношения для матриц Φ , \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} , а также учитывая уравнение (11), получим систему алгебраических уравнений относительно p_{ij} :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2p_{12} - \frac{A^2}{N} p_{11}^2 = 0; \\ -\gamma p_{12} + \gamma p_{13} + p_{22} - \frac{A^2}{N} p_{11} p_{12} = 0; \\ p_{23} - \frac{A^2}{N} p_{11} p_{13} = 0; \\ -2\gamma p_{22} + 2\gamma p_{23} - \frac{A^2}{N} p_{12}^2 + \gamma^2 q_1 + q_2 = 0; \\ -\gamma p_{23} + \gamma p_{23} - \frac{A^2}{N} p_{12} p_{13} + q_2 = 0; \\ -\frac{A^2}{N} p_{13}^2 + q_2 = 0; \quad p_{21} = p_{12}; \quad p_{31} = p_{13}; \quad p_{32} = p_{23}. \end{array} \right.$$

При практических расчетах удобно ввести в рассмотрение следующие безразмерные величины:

$$a = \frac{A^2}{N\gamma}, \quad a_1 = \frac{q_1}{\gamma}, \quad a_2 = \frac{q_2}{\gamma^3},$$

где параметр a характеризует отношение сигнал/шум (ОСШ) на входе ФАП; a_1 — глубина частотной модуляции; a_2 — нестабильность несущей частоты.

Процедуру решения системы (11) можно упростить, последовательно исключив из нее величины p_{12} , p_{13} , p_{22} , p_{23} , p_{33} , и получив одно нелинейное уравнение относительно p_{11} :

$$8\sqrt{\frac{a_2}{a}} (1 + ap_{11}) - ap_{11}^2 (2 + ap_{11})^2 + 4(a_1 + a_2) = 0.$$

Остальные элементы матрицы \mathbf{P} последовательно вычисляются по формулам:

$$p_{12} = \frac{\gamma}{2}ap_{11}^2; \quad p_{13} = \gamma\sqrt{\frac{a_2}{a}}; \quad p_{23} = \gamma^2p_{11}\sqrt{aa_2};$$

$$p_{22} = \frac{\gamma^2}{2}ap_{11}^2 (1 + ap_{11}) - \gamma^2\sqrt{\frac{a_2}{a}};$$

$$p_{33} = \frac{\gamma^2}{2}p_{11}\sqrt{aa_2} (2 + ap_{11}) - \gamma^2a_2.$$

Известно, что ковариационная матрица симметрична относительно главной диагонали $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, т.е.

$$p_{21} = p_{12}, \quad p_{31} = p_{13}, \quad p_{32} = p_{23}.$$

Результаты синтеза ФАП по приведенному алгоритму показаны на рис. 3. Расчетные параметры составили: $k_d = 0,9$, $\gamma = 1/0,5$, $q_1 = 5$, $q_2 = 1$, ОСШ = $r = 1/(pt\gamma) = 0,5$. При синусоидальном входном сигнале $x(t) = \sin \varphi(t) = \sin[\omega t + \varphi_0]$, $\omega_c = 1$, $\varphi_0 = 5$. Значения оптимальных коэффициентов усиления в прямой цепи составили $k_1^* = 2,1$, $k_2^* = 1,98$, $k_3^* = 1$. При решении системы (10) использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка точности с шагом интегрирования $h_{\text{инт}} = 0,001$ и начальными условиями $x_{1,0} = \pi/2$, $x_{2,0} = 0$, $x_{3,0} = 0$.

Из рис. 3 следует, что длительность процесса входа в синхронизм составляет приблизительно 5 с, после чего отклонение наблюдаемых значений фазы и несущей частоты от эталонных составляет не более 5%, что можно считать удовлетворительным результатом.

На рис. 4 и 5 показаны зависимости коэффициентов усиления фильтра Калмана и элементов ковариационной матрицы $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j=1,3}$ от ОСШ r на входе ФАП. Из рисунков видно, что с ростом ОСШ дисперсии оценок текущей фазы входного сигнала, фазы и частоты несущей

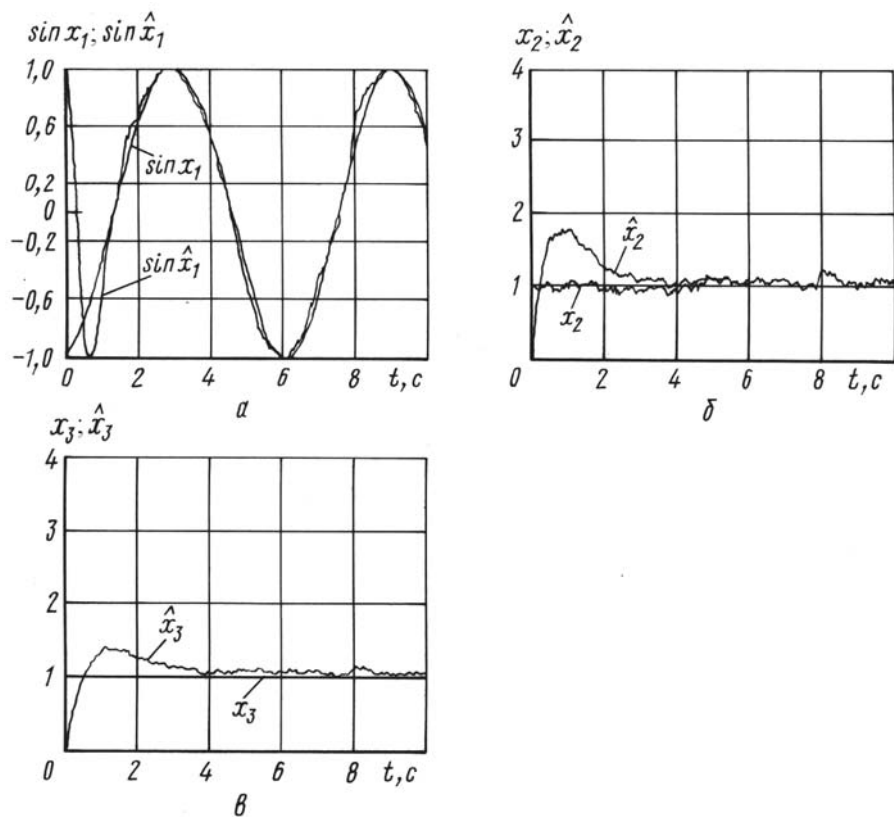


Рис. 3. Результаты численного моделирования синтезированной ФАП:
 а, б — фаза и частота входного сигнала ($x_1 = \varphi$, $x_2 = \omega$); в — частота несущей ($x_3 = \omega_c$)

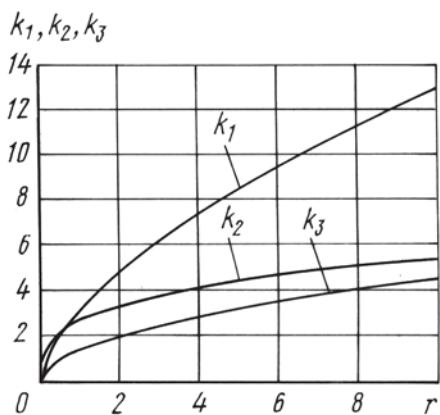


Рис. 4. Зависимость коэффициентов усиления в прямой цепи от ОСШ r на входе ФАП

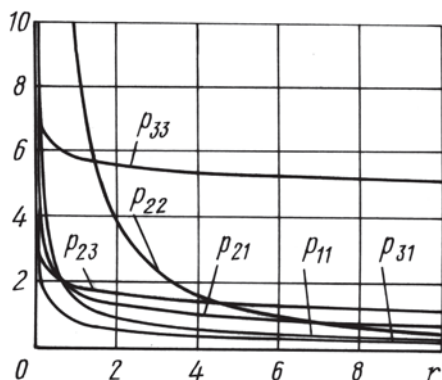


Рис. 5. Зависимость элементов матрицы ковариаций ошибок измерений p_{ij} от ОСШ r на входе ФАП

непрерывно уменьшаются, приближаясь к своим асимптотическим значениям. При этом $\lim_{r \rightarrow \infty} p_{11} \approx 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} p_{22} \approx 0$, т.е. точности оценки текущей частоты и фазы входного сигнала с ростом ОСШ неограниченно возрастают, в то время как дисперсия оценки несущей частоты стремится к конечному пределу $\lim_{r \rightarrow \infty} p_{33} \approx (q_2/\gamma) \left(\sqrt{(q_1/q_2)\gamma^2 + 1} - 1 \right) \approx 4,46$ [2]. Оптимальные значения коэффициентов усиления, в свою очередь, непрерывно возрастают с увеличением ОСШ, что также видно из уравнения (12).

Синтез ЦФАП. Рассмотрим алгоритм синтеза цифровой системы слежения.

Пусть по каналу связи передается непрерывный сигнал (1), амплитуда A которого постоянна, а текущая фаза $\varphi(t)$ модулируется по линейному закону сообщения с дробно-рациональным спектром. Тогда $\varphi(t)$ в совокупности со своими производными можно представить, как и ранее, выходным сигналом некоторой линейной динамической системы, возбуждаемой ГБШ, в виде решения ДУ

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\boldsymbol{\xi}(t), \quad (13)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — вектор-столбец координат системы; $\mathbf{F}(t)$ — матрица системы; $\mathbf{G}(t)$ — матрица возмущений; $\boldsymbol{\xi}(t)$ — вектор-столбец шума.

Переходя к дискретному времени, заменим уравнение (13) соответствующим ему разностным уравнением [4]

$$\mathbf{x}_n = \Phi_n \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{G}_n u_n,$$

где n — порядковый номер выборки; Φ_n — переходная матрица системы; u_n — гауссова случайная последовательность с нулевым средним и ковариационной матрицей \mathbf{Q}_n .

В приемнике в дискретные моменты времени t_n наблюдается линейная комбинация \mathbf{z}_n компонент вектора состояния \mathbf{x}_n в смеси с выборками шума \mathbf{v}_n в канале связи:

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n, \quad \overline{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)} = \mathbf{R}(t) \cdot \delta(t - \tau), \quad (14)$$

где \mathbf{H}_n — матрица наблюдений; \mathbf{R}_n — ковариационная матрица дискретного белого шума.

При условии, что последовательность \mathbf{v}_n — гауссова с нулевым средним, оптимальная, несмещенная, с минимальной дисперсией, оценка $\hat{\mathbf{x}}_n$ вектора \mathbf{x}_n дается динамической системой, описываемой разностным уравнением [4]

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{K}_n [\mathbf{z}_n - \mathbf{H}\Phi \hat{\mathbf{x}}_{n-1}], \quad \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0, \quad (15)$$

где \mathbf{x}_0 — начальная априорная оценка вектора состояния; \mathbf{K}_n — матрица

коэффициентов усиления в прямой цепи, выражаемая формулами [4]

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n^* \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P}_n^* \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1}; \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_n^* = \Phi \mathbf{P}_{n-1} \Phi^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T; \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_n = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{H}] \mathbf{P}_n^*. \quad (18)$$

Здесь матрица \mathbf{P}_{n-1} образована ковариациями ошибок оценки $\hat{\mathbf{x}}_{n-1}$, а матрица \mathbf{P}_n^* — ковариациями ошибок оценки $\hat{\mathbf{x}}_n^* = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{n-1}$, получаемой путем экстраполяции оценки $\hat{\mathbf{x}}_{n-1}$ на один шаг вперед; \mathbf{I} — единичная матрица.

Соотношения (16)–(18) являются рекуррентными. Чтобы начать по ним вычисления, необходима ковариационная матрица \mathbf{P}_0 ошибок начальной оценки $\hat{\mathbf{x}}_0$ вектора состояния, определяемая статистикой принимаемого сигнала.

Решим задачу синтеза цифровой системы слежения на примере ФАП для оценки фазы и частоты сигнала, модулируемого по частоте нормальным случайным процессом с ограниченным спектром.

Системе ДУ (8), описывающей изменение информационных параметров входного сигнала, при переходе к дискретному времени соответствует система следующих разностных априорных уравнений:

$$\begin{cases} x_{1,n} = x_{1,n-1} + hx_{2,n-1}; \\ x_{2,n} = x_{2,n-1} + h[\gamma(x_{3,n-1} - x_{2,n-1} + u_{1,n}) + u_{2,n}]; \\ x_{3,n} = x_{3,n-1} + hu_{2,n}, \end{cases} \quad (19)$$

где $h = t_n - t_{n-1} = \text{const}$ — фиксированный интервал выборок (период дискретизации). Из уравнений (19) следует, что

$$\mathbf{x}_n = \Phi \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{G} \mathbf{u}_n;$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & (1 - h\gamma) & h\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h\gamma & h & 0 \\ 0 & h & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Уравнение наблюдений будет иметь вид

$$\mathbf{z}_n = k_d \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n;$$

здесь $k_d = \text{const}$ — коэффициент передачи фазового детектора, а ковариационная матрица $\mathbf{R}(t)$ белого шума \mathbf{v}_n стационарна и содержит только один элемент

$$\mathbf{R} = [\rho],$$

где ρ — дисперсия случайной последовательности v_n , связанная с дис-

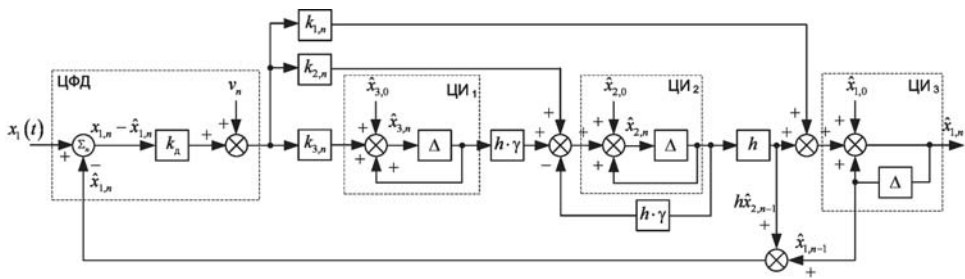


Рис. 6. Функциональная схема ЦФАП оценки частотно-модулированного сигнала (линейная модель)

персией σ^2 гауссова шума $\xi(t)$ на входе детектора соотношением

$$\rho = \left(\frac{k_d}{A} \right)^2 \sigma^2.$$

Из выражения (14) определяем матрицу наблюдений

$$\mathbf{H} = [k_d \ 0 \ 0]. \quad (21)$$

Подставляя уравнения (20) и (21) в разностное уравнение (15), получим

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1,n} \\ \hat{x}_{2,n} \\ \hat{x}_{3,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & (1-h\gamma) & h\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,n-1} \\ \hat{x}_{2,n-1} \\ \hat{x}_{3,n-1} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} k_{1,n} \\ k_{2,n} \\ k_{3,n} \end{bmatrix} \times \left([z_{1,n}] - [k_d \ 0 \ 0] \times \begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & (1-h\gamma) & h\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,n-1} \\ \hat{x}_{2,n-1} \\ \hat{x}_{3,n-1} \end{bmatrix} \right).$$

Приходим к разностным уравнениям линейной модели оптимального цифрового приемника — уравнениям оценок:

$$\begin{cases} \hat{x}_{1,n} = \hat{x}_{1,n-1} + h\hat{x}_{2,n-1} + k_{1,n}(z_{1,n} - k_d\hat{x}_{1,n-1} - hk_d\hat{x}_{2,n-1}); \\ \hat{x}_{2,n} = \hat{x}_{2,n-1} - h\gamma\hat{x}_{2,n-1} + h\gamma\hat{x}_{3,n-1} + \\ \quad + k_{2,n}(z_{1,n} - k_d\hat{x}_{1,n-1} - hk_d\hat{x}_{2,n-1}); \\ \hat{x}_{3,n} = \hat{x}_{3,n-1} + k_{3,n}(z_{1,n} - k_d\hat{x}_{1,n-1} - hk_d\hat{x}_{2,n-1}); \\ \hat{x}_{1,0} = x_{1,0}, \quad \hat{x}_{2,0} = x_{2,0}. \end{cases} \quad (22)$$

Соответствующая им функциональная схема приведена на рис. 6. Штриховыми прямоугольниками на ней выделены линейная модель цифрового ФД (индекс n у знака суммы Σ указывает на работу сумматора с выборочными значениями сигналов) и цифровые интеграторы (через Δ обозначен элемент задержки на один такт).

Переменные коэффициенты усиления $k_{1,n}$, $k_{2,n}$ и $k_{3,n}$ определяются путем подстановки выражений для матриц \mathbf{H} и \mathbf{R} в уравнение (16). В результате получим

$$k_{1,n} = \frac{k_d^2 p_{11,n}^*}{k_d (\rho + k_d^2 p_{11,n}^*)}; \quad k_{2,n} = \frac{k_d^2 p_{21,n}^*}{k_d (\rho + k_d^2 p_{11,n}^*)}; \quad k_{3,n} = \frac{k_d^2 p_{31,n}^*}{k_d (\rho + k_d^2 p_{11,n}^*)}. \quad (23)$$

В соответствии с формулой (17) элементы матрицы ковариаций ошибок экстраполяционной оценки

$$\mathbf{P}_n^* = \begin{bmatrix} p_{11,n}^* & p_{12,n}^* & p_{13,n}^* \\ p_{21,n}^* & p_{22,n}^* & p_{23,n}^* \\ p_{31,n}^* & p_{32,n}^* & p_{33,n}^* \end{bmatrix}$$

определяем через элементы матрицы \mathbf{P}_n выражениями:

$$\begin{aligned} p_{11,n}^* &= p_{11,n-1} + hp_{21,n-1} + h(p_{12,n-1} + hp_{22,n-1}); \\ p_{12,n}^* &= (1 - h\gamma)(p_{12,n-1} + hp_{22,n-1}) + h\gamma(p_{13,n-1} + hp_{23,n-1}); \\ p_{13,n}^* &= p_{13,n-1} + hp_{23,n-1}; \\ p_{21,n}^* &= (1 - h\gamma)p_{21,n-1} + h\gamma p_{23,n-1} + h((1 - h\gamma)p_{22,n-1} + h\gamma p_{32,n-1}); \\ p_{22,n}^* &= (1 - h\gamma)((1 - h\gamma)p_{22,n-1} + h\gamma p_{32,n-1}) + \\ &+ h\gamma((1 - h\gamma)p_{23,n-1} + h\gamma p_{33,n-1}) + h^2\gamma^2 q_1 + h^2 q_2; \quad (24) \\ p_{23,n}^* &= (1 - h\gamma)p_{23,n-1} + h\gamma p_{33,n-1} + h^2 q_2; \\ p_{31,n}^* &= p_{31,n-1} + hp_{32,n-1}; \\ p_{32,n}^* &= (1 - h\gamma)p_{32,n-1} + h\gamma p_{33,n-1} + h^2 q_2; \\ p_{33,n}^* &= p_{33,n-1} + h^2 q_2. \end{aligned}$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n &= \begin{bmatrix} p_{11,n} & p_{12,n} & p_{13,n} \\ p_{21,n} & p_{22,n} & p_{23,n} \\ p_{13,n} & p_{32,n} & p_{33,n} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (1 - k_d k_{1,n}) p_{11,n}^* & (1 - k_d k_{1,n}) p_{12,n}^* & (1 - k_d k_{1,n}) p_{13,n}^* \\ p_{21,n}^* - k_d k_{2,n} p_{11,n}^* & p_{22,n}^* - k_d k_{2,n} p_{12,n}^* & p_{23,n}^* - k_d k_{2,n} p_{13,n}^* \\ p_{31,n}^* - k_d k_{3,n} p_{11,n}^* & p_{32,n}^* - k_d k_{3,n} p_{12,n}^* & p_{33,n}^* - k_d k_{3,n} p_{13,n}^* \end{bmatrix}. \quad (25) \end{aligned}$$

Из выражений (24) и (25) с учетом соотношений (23) следует, что $p_{21} = p_{12}$, $p_{21}^* = p_{12}^*$, $p_{31} = p_{13}$, $p_{31}^* = p_{13}^*$. Подставляя выражения (23) в уравнения (25), приходим к тождествам:

$$\frac{k_{\text{д}}^2 p_{11,n}}{\rho} = \frac{k_{\text{д}}^2 p_{11,n}^*}{\rho + k_{\text{д}}^2 p_{11,n}^*}; \quad \frac{k_{\text{д}}^2 p_{12,n}}{\rho} = \frac{k_{\text{д}}^2 p_{12,n}^*}{\rho + k_{\text{д}}^2 p_{11,n}^*}; \quad \frac{k_{\text{д}}^2 p_{13,n}}{\rho} = \frac{k_{\text{д}}^2 p_{13,n}^*}{\rho + k_{\text{д}}^2 p_{11,n}^*}.$$

Сравнивая эти выражения с соотношениями (23), видим, что закон изменения коэффициента усиления $k_{1,n}$ в кольце синтезированной ЦФАП тождественно совпадает с законом изменения относительной дисперсии фазовой ошибки, а законы изменения $k_{2,n}$ и $k_{3,n}$ — с законами изменения относительной ковариации ошибок в оценках фазы и частоты принимаемого сигнала.

На рис. 7 приведены результаты численных расчетов с использованием вышеизложенного алгоритма. При этом были использованы следующие числовые значения параметров моделирования: $h = 0,001$; $k_{\text{д}} = 0,9$; $q_1 = 5$; $q_2 = 1$; $x_{1,0} = \pi/2$; $x_{2,0} = 0$; $x_{3,0} = 0$;

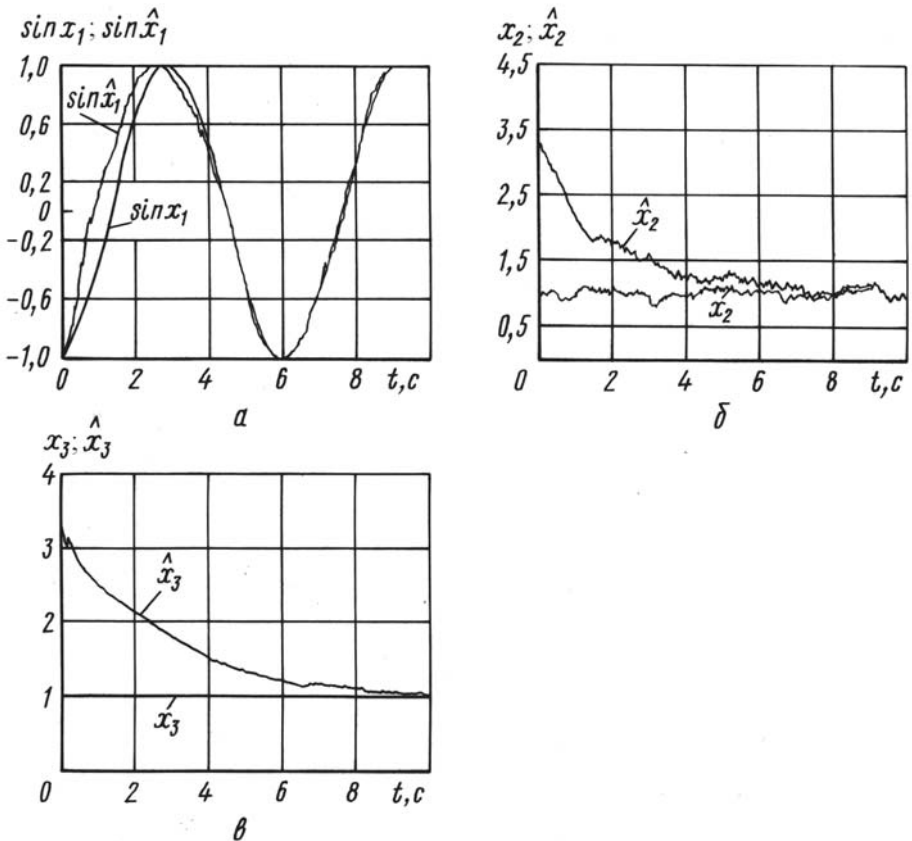


Рис. 7. Результаты численного моделирования синтезированной ЦФАП: $a, б$ — фаза и частота входного сигнала ($x_1 = \varphi$, $x_2 = \omega$); $в$ — частота несущей ($x_3 = \omega_c$)

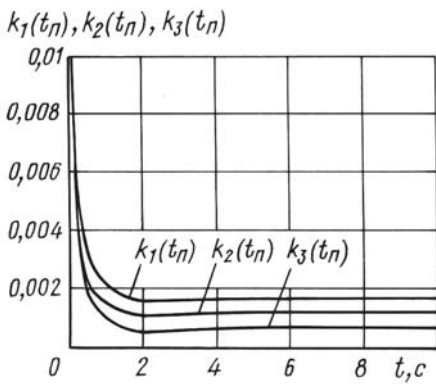


Рис. 8. Зависимость коэффициентов усиления в прямой цепи k_i от времени (индекса выборки)

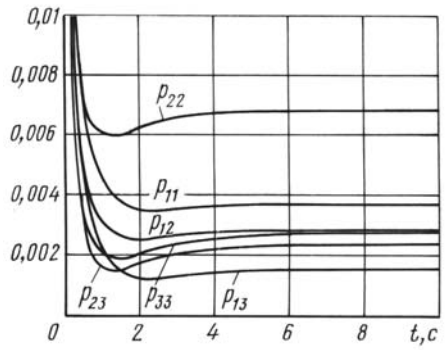


Рис. 9. Зависимость элементов матрицы ковариаций ошибок измерений p_{ij} от времени (индекса выборки)

$\gamma = 1/0,5$; $\mathbf{P}_0 = 10 \times \mathbf{1}_{3 \times 3}$, где $\mathbf{1}$ — матрица заполненная единицами, ОСШ = $r = 1/(\rho\gamma) = 0,5$. В качестве входного сигнала, как и в случае непрерывной системы, был взят синусоидальный сигнал $x(t) = \sin \varphi(t) = \sin[\omega t + \varphi_0]$, $\omega_c = 1$, $\varphi_0 = 5$.

Время синхронизации около 9 с, что почти в 2 раза больше времени синхронизации непрерывной системы. Это объясняется несколькими причинами. Во-первых, качество слежения цифровой системы напрямую связано с шагом дискретизации h , а именно: чем меньше шаг, тем выше точность слежения. Во-вторых, в вычислительной схеме (22) используются фактически конечные разности первого порядка, что говорит о низком порядке точности алгоритма и о его слабой вычислительной устойчивости.

На рис. 8, 9 показаны зависимости коэффициентов усиления k_i и элементов ковариационной матрицы $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,3}}$ от времени (фактически от числа обработанных результатов наблюдений). В идеале с течением времени влияние новых наблюдений на оценки параметров входного сигнала должно уменьшаться, p_{ij} должны стремиться к нулю, также как и коэффициенты усиления в прямой цепи (в этом случае можно говорить об отключении фильтра Калмана от источника сообщения). Однако в данном случае ошибки слежения не столь малы и k_i , также как и p_{ij} , стремятся к асимптотическим значениям (т.е. фильтр Калмана продолжает работать). На рис. 10 изображены графики k_i и p_{ii} при различных значениях ОСШ. Как и в случае непрерывной системы, большему значению r соответствует большее значение коэффициента усиления и меньшее значение коэффициента ковариационной матрицы.

Выводы. Представленная методика синтеза базируется на алгоритмах непрерывной и дискретной линейной оптимальной фильтрации

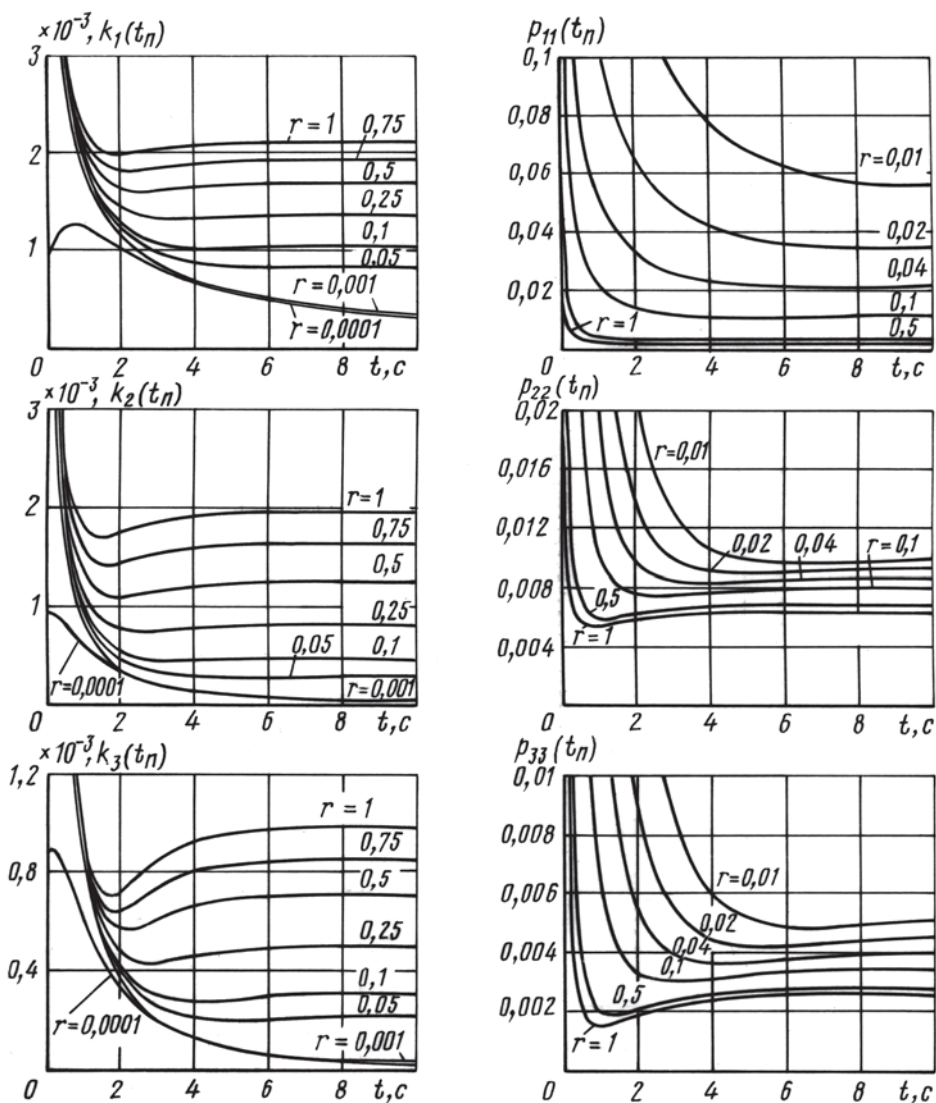


Рис. 10. Зависимость коэффициентов усиления k_i и элементов матрицы ковариаций ошибок измерений p_{ij} от ОСШ r

Калмана и применима как для непрерывных, так и дискретных систем слежения. При этом порядок синтезированной ФАП полностью определяется порядком модели сообщения. В случае цифровой системы синхронизации качество процесса слежения находится в сильной зависимости от шага дискретизации входного сигнала.

Переход к задаче синтеза приемника с частично заданной структурой позволяет использовать более простые алгоритмы, чем при использовании теории нелинейной оптимальной фильтрации синтеза оптимального приемного устройства целиком [1]. Полученный при решении задачи синтеза квазиоптимальный фильтр (ФНЧ) в прямой

цепи ФАП обеспечивает несмещенную (с минимальной дисперсией) оценку информационного параметра сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ш а х т а р и н Б. И. Случайные процессы в радиотехнике: В 2-х т. Т. 2. Нелинейные преобразования. – М.: Гелиос АРВ, 2006. – 448 с.
2. С и з о в В. П. Синтез оптимальных линейных моделей фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника и электроника. – 1973. – № 12. – С. 2529–2536.
3. С и з о в В. П. Синтез оптимальных линейных моделей цифровых систем фазовой автоподстройки // Радиотехника и электроника. – 1974. – № 19. – С. 1886–1893.
4. Ш а х т а р и н Б. И. Случайные процессы в радиотехнике: В 2-х т. – 3-е изд. перераб. Т. 1. Линейные преобразования, – М.: Гелиос АРВ, 2006. – 464 с.

Статья поступила в редакцию 20.02.2007



Борис Ильич Шахтарин родился в 1933 г., окончил в 1958 г. Ленинградскую Военно-воздушную инженерную академию им. А.Ф. Можайского и в 1968 г. ЛГУ. Д-р техн. наук, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лауреат Государственной премии СССР, заслуженный деятель науки и техники РФ. Автор более 200 научных работ, в том числе 4 книг, в области анализа и синтеза систем обработки сигналов.

B.I. Shakhhtarin (b. 1933) graduated from the Leningrad Air Force Engineering Academy n.a. A. F. Mozhaysky in 1958, and from Leningrad State University in 1968. D. Sc. (Eng.), professor of the Bauman Moscow State Technical University. USSR State Prize winner, RF Honoured Worker of science and technology. Author of more than 200 publications, among them 4 books, in the field of analysis and synthesis of signal processing systems.



Андрей Александрович Самохвалов родился в 1981 г., аспирант кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области математического моделирования цифровых систем связи.

A.A. Samokhvalov (b. 1981), post-graduate of “Autonomous Information and Controlled Systems” of Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of mathematical modeling of digital communication systems.