

УДК 681.518.52

А. А. И в а н о в

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИНТЕЗАТОРА ЧАСТОТ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИГМА-ДЕЛЬТА-МОДУЛЯТОРА

*Разработаны математические модели структурных элементов синтезатора частот с сигма-дельта-модулятором, создана общая функциональная схема. Различными методами моделирования исследованы спектральные характеристики выходного сигнала синтезатора, проведен сравнительный анализ результатов.*

Ivanov.MGTU@mail.ru

**Ключевые слова:** синтезатор частот, сигма-дельта-модулятор.

В настоящее время синтезаторы частот с петлей фазовой автоподстройки (ФАП) применяются практически во всех системах связи для формирования стабильных частот. Поскольку уровень подобных систем непрерывно растет, возникла задача построения дробного синтезатора. Наиболее простым и эффективным решением задачи стало применение сигма-дельта-модулятора ( $\Sigma\Delta M$ ), который управляет коэффициентом деления в обратной связи петли. Основными достоинствами такого синтезатора являются малый шаг перестройки по частоте, т.е. высокое разрешение, а также отсутствие побочных спектральных компонентов, т.е. хорошие шумовые характеристики. Несмотря на широкое практическое применение, доказательная сторона вопроса о шумовых характеристиках синтезатора частот с  $\Sigma\Delta M$  еще не достаточно исследована [1, 2]. Этим и обусловлена попытка автора получить достоверные аналитические выражения спектра шума.

**Структура синтезатора частот.** На рис. 1 приведена структурная схема синтезатора частот [3–5], которая состоит из опорного генератора (ОГ), импульсного частотно-фазового детектора (ИЧФД), фильтра низких частот (ФНЧ), управляемого генератора (УГ), делителя (Д).

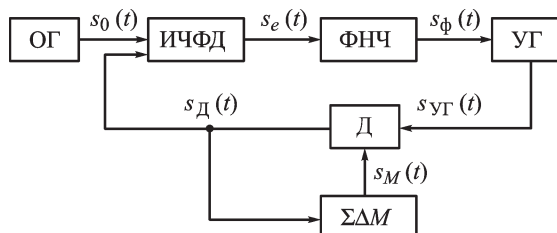


Рис. 1. Структурная схема синтезатора частот с  $\Sigma\Delta M$

Сигнал с выхода делителя  $s_{\text{д}}(t)$  является тактовым для  $\Sigma\Delta M$ , который, в свою очередь, управляет коэффициентом деления  $N$  делителя. Сигнал с опорного генератора  $s_0(t)$  сравнивается с сигналом  $s_{\text{д}}(t)$  в блоке ИЧФД и в результате формируется сигнал ошибки  $s_e(t)$ , который с помощью фильтра усредняется и затем сигнал  $s_{\text{ф}}(t)$  используется для управления циклической частотой УГ по следующему закону:

$$\omega_{\text{вых}}(t) = 2\pi K_{\text{УГ}} s_{\text{ф}}(t);$$

здесь  $K_{\text{УГ}}$  — коэффициент усиления, причем фаза УГ может быть записана в виде

$$\varphi_{\text{УГ}}(t) = \omega_{\text{ц}} t + \varphi_{\text{вых}}(t),$$

где  $\omega_{\text{ц}}$  — центральная частота УГ, а  $\varphi_{\text{вых}}(t) = \frac{d\varphi_{\text{вых}}(t)}{dt}$  — фаза, определяемая напряжением на фильтре.

Сигнал  $s_{\text{УГ}}(t)$  подается с УГ на вход делителя, и, как следствие, его частота уменьшается в  $N(t)$  раз, что определяется сигналом модулятора  $s_M(t)$ .

### Математическое описание работы структурных компонентов.

Обозначим через  $t_k$  момент переднего  $k$ -го фронта сигнала опорного генератора. Тогда момент переднего  $k$ -го фронта сигнала с выхода делителя составляет  $t_k + \Delta t_k$ , где  $\Delta t_k$  — время отклонения (рис. 2).

На рис. 3 изображена типовая структурная схема ИЧФД [1], построенная на двух D-триггерах с асинхронным сбросом. Выход каждого триггера управляет ключом, который при положительном напряжении открывает источник постоянного тока  $I$ , и на выход поступает ток  $I$  в случае открытия верхнего ключа и ток  $-I$ , когда открыт нижний ключ. Принцип работы ИЧФД показан на рис. 2.

Согласно диаграмме на рис. 2 ток на выходе ИЧФД можно пред-

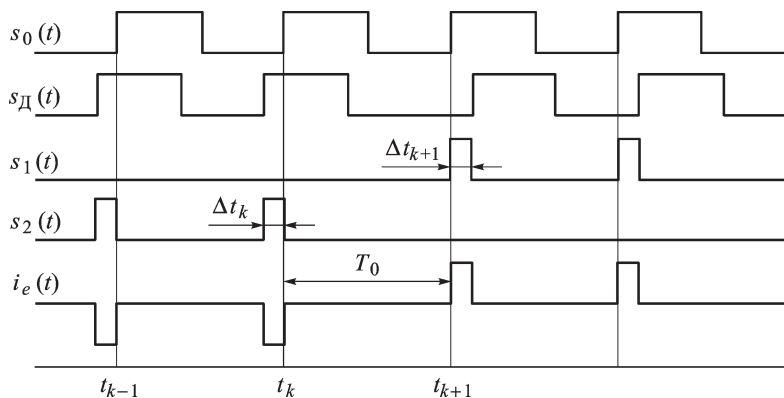


Рис. 2. Временная диаграмма работы ИЧФД

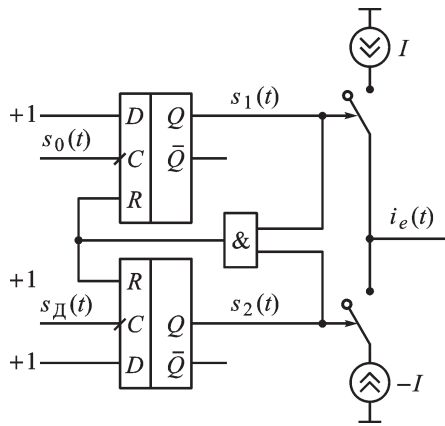


Рис. 3. Схема ИЧФД

ставить в виде последовательности  $k$  импульсов

$$i_e(t) = \sum_{n=1}^k [I\sigma(t - kT_0) - I\sigma(t - kT_0 - \Delta t_k)];$$

$$i_e(t) = I \sum_{n=1}^k [\sigma(t - kT_0) - \sigma(t - kT_0 - \Delta t_k)],$$

где  $\sigma(t)$  — функция включения,  $T_0$  — период опорного сигнала.

Причем  $\Delta t_k$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от фазового рассогласования  $s_0(t)$  и  $s_Д(t)$ . Поскольку полоса пропускания фильтра в несколько раз меньше частоты сравнения (в данном случае  $\omega_0$ ), а ширина полосы импульса тока превышает частоту сравнения, то последовательность прямоугольных импульсов тока может быть заменена на последовательность дельта-импульсов тока [1, 3]. Таким образом,

$$i_e(t) = I \sum_{n=1}^k \Delta t_k \delta(t - kT_0).$$

Такой переход приведен на рис. 4. Нетрудно убедиться, что уровень спектра любого импульса на нулевой частоте по модулю равен  $\Delta t_k$ . Аппроксимация при этом будет тем точнее, чем уже полоса фильтра. Применив преобразование Лапласа, получаем

$$i_e(s) = I \sum_{n=1}^k \Delta t_k e^{-skT_0}.$$

Применив преобразование временного сдвига в фазовый:

$$\varphi_0(kT) - \varphi_Д(kT) = 0 - \varphi_Д(kT) = \varphi_e(kT) = \varphi_e(k) = 2\pi \frac{\Delta t_k}{T_0},$$

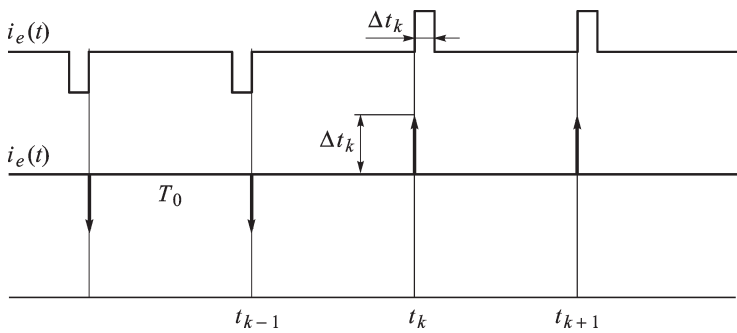


Рис. 4. Переход от прямоугольных импульсов тока к дельта-импульсам тока той же площади

получаем

$$i_e(s) = \frac{IT_0}{2\pi} \sum_{n=1}^k \varphi_e(k) e^{-skT_0}.$$

Формула представляет собой преобразование Лапласа. Поскольку сигнал фазовой ошибки дискретный, то спектр периодический, поэтому

$$i_e(s) = \frac{IT_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_e \left( s + k \frac{2\pi}{T_0} \right) \right];$$

$$i_e(s) = K_{\text{ИЧФД}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_e \left( s + k \frac{2\pi}{T_0} \right),$$

где  $K_{\text{ИЧФД}} = \frac{I}{2\pi}$  — коэффициент усиления ИЧФД, а  $\varphi_e(s)$  — преобразование Лапласа непрерывного сигнала фазового рассогласования  $\varphi_e(t)$ . Поскольку полоса пропускания ФНЧ намного уже ширины спектра ошибки  $\varphi_e(j\omega)$ , составляющие с ненулевыми индексами ( $k \neq 0$  в формуле) будут отфильтрованы. Однако ранее упоминалось, что ширина спектра ошибки превышает частоту дискретизации, поэтому возникает эффект перекрытия спектров, причем не только соседних. Таким образом, “хвосты” от побочных спектров все равно проникают через ФНЧ. В появлении этого шума и состоит отличие ИЧФД от линейного фазового детектора. С учетом принятой аппроксимации

$$i_e(s) = K_{\text{ИЧФД}} \varphi_e(s),$$

т.е. ИЧФД представлен в виде квазилинейного устройства с передаточной функцией  $H_{\text{ИЧФД}}(s) = K_{\text{ИЧФД}} = \frac{I}{2\pi}$ .

Далее проанализируем работу делителя с переменным коэффициентом деления  $N(k)$ . Поскольку сигнал с выхода делителя появляется только при изменении фазы управляемого генератора на величину  $\Delta\varphi_{\text{УГ}}(k) = 2\pi N(k)$ , а переключение  $N$  происходит по фронту сигнала

с выхода делителя, то справедливо равенство

$$\varphi_{\text{УГ}}(t_k + \Delta t_k) - \varphi_{\text{УГ}}(t_{k-1} + \Delta t_{k-1}) = 2\pi N(k-1).$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \varphi_{\text{УГ}}(t_k + \Delta t_k) - \varphi_{\text{УГ}}(t_{k-1} + \Delta t_{k-1}) = \\ & = \omega_{\text{Ц}} [t_k + \Delta t_k - t_{k-1} - \Delta t_{k-1}] + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) - \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_{k-1} + \Delta t_{k-1}). \end{aligned}$$

Разность между передними фронтами соседних периодов  $t_k - t_{k-1} = T_0$ , при этом  $\omega_{\text{Ц}} T_0 = 2\pi N_{\text{Ц}}$ , тогда

$$\begin{aligned} & \varphi_{\text{УГ}}(t_k + \Delta t_k) - \varphi_{\text{УГ}}(t_{k-1} + \Delta t_{k-1}) = \\ & = 2\pi N_{\text{Ц}} + \omega_{\text{Ц}} [\Delta t_k - \Delta t_{k-1}] + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) - \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_{k-1} + \Delta t_{k-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем разностное уравнение

$$\begin{aligned} 2\pi N(k-1) = 2\pi N_{\text{Ц}} + \omega_{\text{Ц}} [\Delta t_k - \Delta t_{k-1}] + \\ + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) - \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_{k-1} + \Delta t_{k-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Ц}} [\Delta t_k - \Delta t_{k-1}] + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) - \\ - \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_{k-1} + \Delta t_{k-1}) = 2\pi [N(k-1) - N_{\text{Ц}}], \end{aligned}$$

проинтегрировав которое от начала работы до момента  $t_k$ , получаем выражение

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k \omega_{\text{Ц}} [\Delta t_m - \Delta t_{m-1}] + \sum_{m=1}^k [\varphi_{\text{ВЫХ}}(t_m + \Delta t_m) - \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_{m-1} + \Delta t_{m-1})] = \\ = 2\pi \sum_{m=1}^k [N(m-1) - N_{\text{Ц}}]. \end{aligned}$$

В результате суммирования имеем

$$\begin{aligned} \omega_{\text{Ц}} [\Delta t_k - \Delta t_0] + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) - \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_0 + \Delta t_0) = \\ = 2\pi \sum_{m=1}^k [N(m-1) - N_{\text{Ц}}]. \end{aligned}$$

При начальных условиях  $\varphi_{\text{ВЫХ}}(t_0 + \Delta t_0) = 0$ , а также при  $\Delta t_0 = 0$  получаем

$$\omega_{\text{Ц}} \Delta t_k + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) = 2\pi \sum_{m=1}^k [N(m-1) - N_{\text{Ц}}],$$

$n(k) = N(k) - N_{ц}$ , тогда, учитывая  $\omega_{ц} = \frac{2\pi}{T_0} N_{ц} = \omega_0 N_{ц}$ ,

$$\omega_0 N_{ц} \Delta t_k + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) = 2\pi \sum_{m=1}^k n(m-1).$$

После подстановки выражение преобразуется к виду

$$-\omega_0 N_{ц} \varphi_{\text{Д}}(k) \frac{T_0}{2\pi} + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) = 2\pi \sum_{m=1}^k n(m-1);$$

$$-N_{ц} \varphi_{\text{Д}}(k) + \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) = 2\pi \sum_{m=1}^k n(m-1).$$

При условии  $\varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k + \Delta t_k) \approx \varphi_{\text{ВЫХ}}(t_k) = \varphi_{\text{ВЫХ}}(k)$  имеем

$$\varphi_{\text{Д}}(k) = \frac{1}{N_{ц}} \left( \varphi_{\text{ВЫХ}}(k) - 2\pi \sum_{m=1}^k n(m-1) \right).$$

Поскольку уравнение получено для дискретной системы, то в  $z$ -области оно имеет вид

$$\varphi_{\text{Д}}(z) = \frac{1}{N_{ц}} \left( \varphi_{\text{ВЫХ}}(z) - 2\pi n(z) \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right).$$

Сумма  $\sum_{m=1}^k n(m-1)$  в  $z$ -области представляет собой последовательное соединение накапливающего сумматора  $\frac{1}{1 - z^{-1}}$  (интегратора) и элемента задержки  $z^{-1}$ .

**Математическая модель  $\Sigma\Delta M$ .** На рис. 5 приведена наиболее распространенная структурная схема  $\Sigma\Delta M$  с одним кольцом [6, 7].

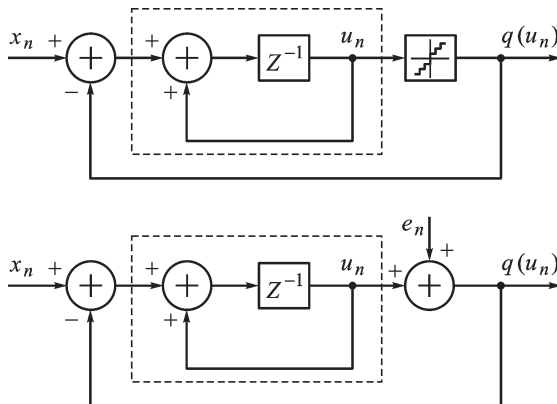


Рис. 5. Структурная схема  $\Sigma\Delta M$  с одним кольцом

На входе схемы расположен вычитатель квантованного сигнала  $q(u_n)$  из входного  $x_n$ . После вычитателя расположен цифровой интегратор, выделенный штриховой линией. После интегратора сигнал подвергается квантованию и затем через кольцо обратной связи поступает на вычитатель. В основе теории  $\Sigma\Delta M$  лежит теорема о независимости шума квантования  $e_n = q(u_n) - u_n$  от входного воздействия  $x_n$ . Таким образом, устройство квантования заменяется сумматором по схеме  $e_n + u_n = q(u_n)$  [5].

Такая замена позволяет исследовать  $\Sigma\Delta M$  методами теории автоматического управления. Из рис. 5 нетрудно найти передаточную функцию системы в  $z$ -области по отношению ко входу:

$$W_x(z) = \frac{Q(z)}{X(z)} = z^{-1}.$$

Она представляет собой элемент задержки на один такт, а передаточная функция системы по отношению к ошибке

$$W_e(z) = \frac{Q(z)}{E(z)} = 1 - z^{-1}$$

представляет собой дифференциатор.

Аналогичные свойства имеют  $\Sigma\Delta M$  с двумя и тремя петлями.

Нетрудно убедиться, что передаточная функция системы по отношению ко входу

$$W_x(z) = \frac{Q(z)}{X(z)} = z^{-p},$$

а по отношению к ошибке

$$W_e(z) = \frac{Q(z)}{E(z)} = (1 - z^{-1})^p,$$

где  $p$  — число петель.

Выходной спектр  $\Sigma\Delta M$  при этом состоит из низкочастотной составляющей (полезный сигнал) и спектра ошибки, повторяющего форму дифференциатора.

Согласно данным работы [7] для  $\Sigma\Delta M$  с двумя и более петлями при постоянном входном воздействии шум квантования является белым (БШ) и имеет равномерное распределение. В работе [6] доказано, что в  $\Sigma\Delta M$  с одной петлей ошибка квантования не является БШ, а представляет собой набор гармонических составляющих, положение которых определяется амплитудой входного сигнала, а именно гармоники находятся на частотах

$$f_k = \left\langle k \left( \frac{x}{\Delta} + \frac{1}{2} \right) \right\rangle \text{ при } k \neq 0,$$

где  $\Delta$  — расстояние между уровнями,  $\langle x \rangle$  — дробная часть  $x$ . При этом мощности составляющих

$$S_e(k) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi k)^2} & \text{при } k \neq 0, \\ 0 & \text{при } k = 0. \end{cases}$$

Таким образом, для формирования спектра ошибки целесообразно использовать  $\Sigma\Delta M$  с высокими порядками, однако при этом необходим анализ системы на устойчивость.

В соответствии с данными работы [1] для устойчивой работы  $\Sigma\Delta M$  порядка  $p$  при постоянном входном воздействии  $u$  достаточно выполнения неравенства

$$\sum |h_k| \leq v + 1 - (v - 1)|u|,$$

где  $h_k$  — импульсная характеристика  $W_e(z)$ ;  $v$  — число уровней квантования, а расстояние между уровнями равно единице. В случае  $W_e(z) = (1 - z^{-1})^p$  справедливо равенство  $\sum |h_k| = 2^p$ , тогда при условии  $v = 2^l$  получаем

$$|u| \leq \frac{2^l + 1 - 2^p}{2^l - 1}.$$

Поскольку для дробного синтезатора частот достаточно выполнения неравенства  $|u| \leq 0,5$ , то минимальная разрядность устройства квантования для  $\Sigma\Delta M$  с одной петлей составляет  $l = 1$ , с двумя петлями —  $l = 3$ , и, наконец, с тремя петлями —  $l = 4$ .

**Исследование характеристик синтезатора частот.** На данном этапе возможно построение полной математической модели синтезатора. На рис. 6 представлена структурная схема дробного синтезатора в частотной области, в которой операторы  $T_0$  и  $\frac{1}{T_0}$  соответствуют переходам от дискретного времени к непрерывному и наоборот.

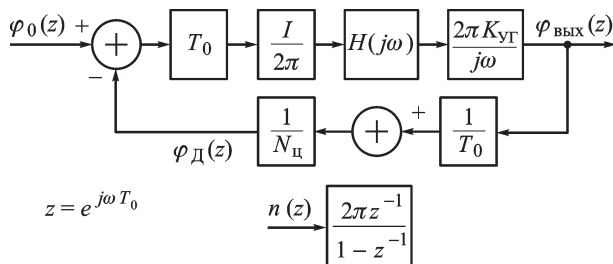


Рис. 6. Структурная схема дробного синтезатора в частотной области



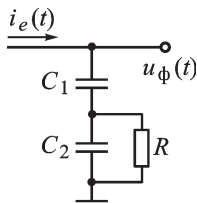


Рис. 7. Принципиальная схема ФНЧ второго порядка

Запишем частотную характеристику:

$$Y(j\omega) = \frac{I}{2\pi} H(j\omega) \frac{2\pi K_{y\Gamma}}{j\omega N_{\Gamma}},$$

тогда в соответствии с рис. 6

$$W_0(j\omega) = \frac{\varphi_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\varphi_0(j\omega)} = T_0 N_{\Gamma} \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega) + 1};$$

$$W_n(j\omega) = \frac{\varphi_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\varphi_n(j\omega)} = 2\pi T_0 \frac{e^{-j\omega T_0}}{1 - e^{-j\omega T_0}} \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega) + 1}.$$

На рис. 7 показана схема ФНЧ второго порядка, которая является типовой для такого рода синтезаторов [2, 8, 9].

Передающую функцию ФНЧ можно записать как

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega c_1} \frac{T_1 j\omega + 1}{T_2 j\omega + 1},$$

где  $T_1 = R(c_1 + c_2)$ , а  $T_2 = Rc_2$ .

*Устойчивость синтезатора.* Для определения запасов устойчивости удобно использовать показатель колебательности  $M$ , определяемый по формуле

$$M = \max |W(i\omega)|_{0 \leq \omega \leq \infty}.$$

Согласно данным работ [2, 9] рекомендуется выбирать  $M = [1, 1; \dots; 1, 7]$ , т.е. в данном случае получилось приемлемое значение. В работе [9] приведены выражения, позволяющие найти параметры синтезатора при заданных значениях  $M$  и  $\bar{\omega}_c$ :

$$\bar{T}_1 = \frac{M}{\bar{\omega}_c(M-1)}; \quad \bar{T}_2 = \frac{M}{\bar{\omega}_c(M+1)}; \quad K_0 = \bar{\omega}_c^2 \frac{M-1}{M},$$

где  $\bar{\omega}_c = \frac{\omega_c}{f_0}$  — нормированная частота среза;  $K_0$  — коэффициент усиления;  $\bar{T}_1 = \frac{T_1}{T_0}$ ;  $\bar{T}_2 = \frac{T_2}{T_0}$ . Система устойчива при  $K_0 \in (0 \dots 2)$ .

Известно, что для устойчивой системы автоматического регулирования асимптота частотной характеристики разомкнутой петли в точке пересечения с единичным усилением должна иметь наклон не более 20 дБ/дек [8]. Если приравнять полосу пропускания частоте среза  $\omega_c$ , то получаем соотношение

$$10^{\frac{\gamma_A}{20}} = \frac{\omega_0}{2\omega_c},$$

в котором  $\gamma_A$  — требуемый запас устойчивости по амплитуде, дБ. Запас по фазе можно найти из формулы

$$\cos \gamma_{\varphi} = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}. \quad (1)$$

В работах [2, 9] найдены оптимальные значения параметров системы для режима фазовой автоподстройки. Согласно исследованиям необходимо обеспечить

$$\gamma_A \geq 10 \text{ дБ} \text{ и } \gamma_\varphi \geq 30^\circ, \text{ а } M \leq \sqrt{2}.$$

Для расчета используем граничное значение  $M = \sqrt{2}$ , потому что при малых значениях колебательный процесс становится аperiodическим и быстродействие системы снижается.

По формуле (1) находим  $\cos \gamma_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , тогда  $\gamma_\varphi = 45^\circ$ . Поскольку  $\Sigma\Delta M$  создает дополнительные шумы, целесообразно увеличить запас устойчивости до  $\gamma_A = 20 \text{ дБ}$ , тогда  $\bar{\omega}_c = \pi 10^{-\frac{\gamma_A}{20}} = \frac{\pi}{10}$ . При этом

$$\bar{T}_1 = 10,87; \quad \bar{T}_2 = 1,87; \quad K_0 = 0,029.$$

Находим номиналы элементов по формулам из работы [9]:

$$C_1 = T_0^2 \frac{SI}{K_0 N} = 138 \text{ нФ}; \quad R = \frac{(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) T_0}{c_1} = 65 \text{ Ом}; \quad C_2 = \frac{\bar{T}_2 T_0}{R} = 29 \text{ нФ}.$$

*Шумовые характеристики синтезатора.* Для исследования шумовых характеристик необходимо определить спектральную плотность мощности шума (СПМ) на выходе УГ. Для этого запишем передаточную функцию фазы УГ по отношению к шуму квантования следующим образом:

$$\begin{aligned} H_n(j\omega) &= \frac{\varphi_{\text{вых}}(j\omega)}{E(j\omega)} = W_n(j\omega) W_e(z) = \\ &= 2\pi T_0 \frac{e^{-j\omega T_0}}{1 - e^{-j\omega T_0}} \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega) + 1} (1 - e^{-j\omega T_0})^p; \\ H_n(j\omega) &= 2\pi T_0 e^{-j\omega T_0} \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega) + 1} (1 - e^{-j\omega T_0})^{p-1}. \end{aligned}$$

Тогда выражение для СПМ фазового шума УГ, вызванного шумом  $\Sigma\Delta M$ , имеет вид

$$S_{\varphi_{\text{вых}}}(\omega) = S_E(\omega) |H_n(j\omega)|^2 = \frac{(2\pi T_0)^2}{12 T_0} \left| \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega) + 1} \right|^2 |1 - e^{-j\omega T_0}|^{2p-2},$$

где СПМ равномерно распределенного БШ  $S_E(\omega) = \frac{1}{12}$ , а оператор  $\frac{1}{T_0}$  соответствует переходу к аналоговому сигналу.

Поскольку

$$\begin{aligned} |1 - e^{-j\omega T_0}| &= |1 - \cos(\omega T_0) + j \sin(\omega T_0)| = \sqrt{2 - 2 \cos(\omega T_0)} = \\ &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{\omega T_0}{2}} = \left| 2 \sin \frac{\omega T_0}{2} \right|, \end{aligned}$$

получаем

$$S_{\varphi_{\text{вых}}}(\omega) = S_E(\omega) |H_n(j\omega)|^2 = \frac{\pi^2 T_0}{3} \left| \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega) + 1} \right|^2 \left| 2 \sin \frac{\omega T_0}{2} \right|^{2p-2}.$$

Найдем кусочно-линейную аппроксимацию функции  $f(\omega) = \sin \frac{\omega T_0}{2}$ . Заменяем ее в опорных точках  $\omega_i$  функцией  $f_i(\omega) = f(\omega_i) + f'(\omega_i)[\omega - \omega_i]$ .

Нетрудно убедиться, что

$$f'(\omega) = \frac{T_0}{2} \cos \frac{\omega T_0}{2}.$$

Тогда в точке  $\omega = 0$

$$f_1(\omega) = \frac{\pi}{\omega_0} \omega;$$

в точке  $\omega = \frac{\omega_0}{4}$

$$\begin{aligned} f_2(\omega) &= \sin \frac{\omega_0 T_0}{8} + \\ &+ \frac{T_0}{2} \cos \frac{\omega_0 T_0}{8} \left[ \omega - \frac{\omega_0}{4} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{T_0}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \omega - \frac{\omega_0}{4} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{T_0}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \omega - \frac{\omega_0}{4} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\pi}{8\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\omega_0} \frac{\omega}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{\omega_0} \omega \right]. \\ f_2(\omega) &\approx 0,15 + \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{2}} \omega; \end{aligned}$$

в точке  $\omega = \frac{\omega_0}{2}$

$$f_3(\omega) = 1.$$

Для  $\Sigma\Delta M$  второго порядка

$$S_{\varphi_{\text{вых}}}(\omega) = \frac{4\pi^2 T_0}{3} \left| \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega) + 1} \right|^2 \left| \sin \frac{\omega T_0}{2} \right|^2,$$

как показано на рис. 8 в логарифмическом масштабе.

Для проверки результатов была построена имитационная модель синтезатора с  $\Sigma\Delta M$ . С ее помощью получен спектр  $S_{\varphi_{\text{вых}}}(\omega)$ , который представлен на рис. 9 в логарифмическом масштабе. Наиболее

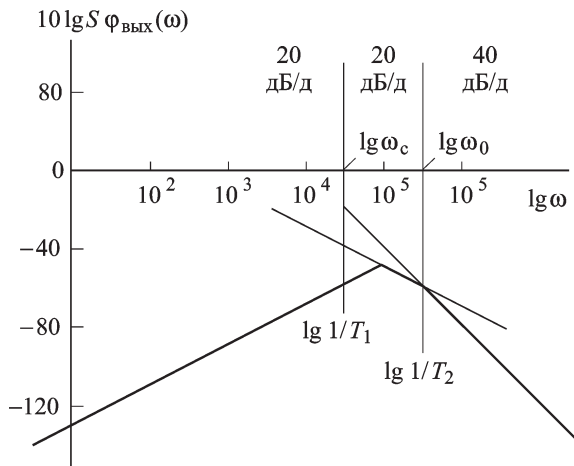


Рис. 8. Приближенный спектр  $S_{\varphi_{\text{вых}}}$ , вызванный шумом квантования  $\Sigma\Delta M$  второго порядка

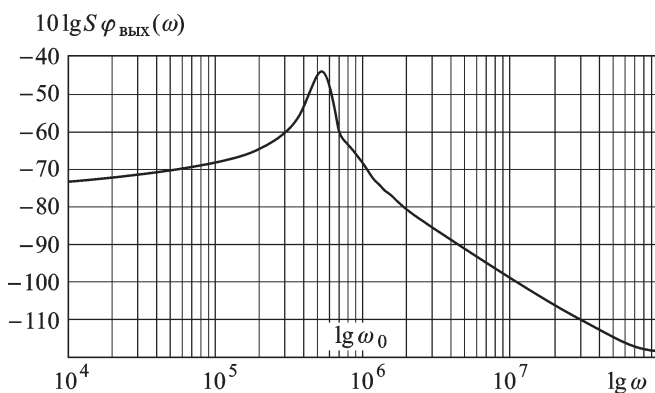


Рис. 9. Спектр  $S_{\varphi_{\text{вых}}}$ , вызванный шумом квантования  $\Sigma\Delta M$ . График получен обработкой результатов имитационной модели

простой способ поиска  $S_{\varphi_{\text{вых}}}(\omega)$ , вызванного шумом квантования, — это проведение двух экспериментов: для дробного синтезатора и целочисленного, при этом необходимо обеспечить малую дробную часть коэффициента  $N$ . Разность спектров и есть  $S_{\varphi_{\text{вых}}}(\omega)$ , вызванный шумом квантования.

Стоит отметить, что наиболее удобный экспериментальный метод определения статистик фазового шума — исследование спектра на выходе УГ. Представим сигнал на выходе УГ в виде

$$s_{\text{УГ}}(t) = e^{j\omega_{\text{ц}}t + j\varphi_{\text{вых}}(t)},$$

тогда автокорреляционная функция сигнала может быть рассчитана по формуле

$$R_{s_{\text{УГ}}}(\tau) = E[s_{\text{УГ}}^*(t) s_{\text{УГ}}(t + \tau)] = e^{j\omega_{\text{ц}}\tau} E\left[e^{j\varphi_{\text{вых}}(t+\tau)} \left\{e^{j\varphi_{\text{вых}}(t)}\right\}^*\right].$$

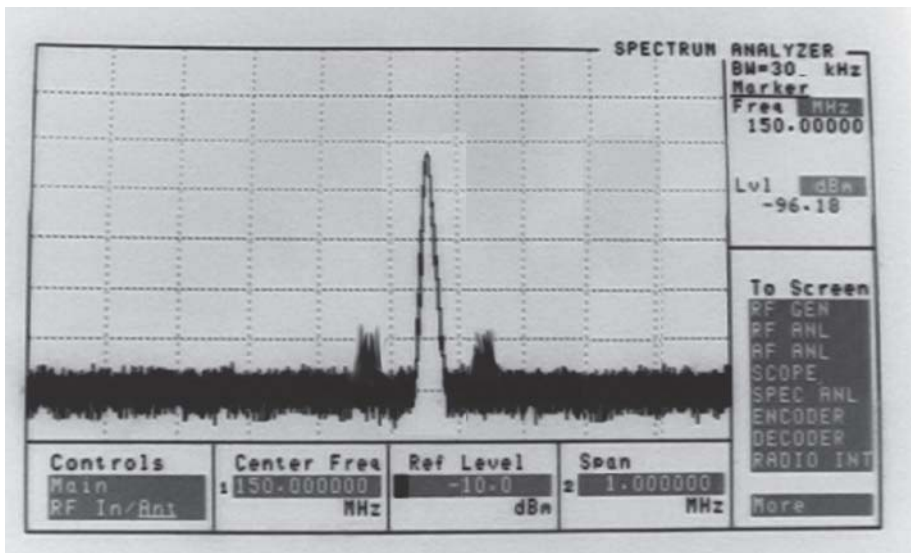


Рис. 10. Спектр  $S_{S_{YГ}}$  сигнала  $\cos(\omega_{ц}t + \varphi_{вых}(t))$  в логарифмическом масштабе по оси ординат, полученный с помощью полунатурной модели

Согласно данным работы [10] при условии  $|R_{\varphi_{вых}}(\tau)| \leq |R_{\varphi_{вых}}(0)| \leq 1$  получаем

$$R_{S_{YГ}}(\tau) = e^{j\omega_{ц}\tau} e^{-R_{\varphi_{вых}}(0)} e^{R_{\varphi_{вых}}(\tau)} \approx e^{j\omega_{ц}\tau} e^{-R_{\varphi_{вых}}(0)} (1 + R_{\varphi_{вых}}(\tau)).$$

По теории Винера–Хинчина спектр сигнала имеет вид

$$S_{S_{YГ}}(\omega) = \delta(\omega - \omega_{ц}) + S_{\varphi_{вых}}(\omega - \omega_{ц}).$$

С помощью спектроанализатора можно измерить спектр сигнала  $S_{S_{YГ}}(\omega)$ , а значит, и найти  $S_{\varphi_{вых}}(\omega)$ .

На рис. 10 приведены показания спектроанализатора, полученные с помощью полунатурной модели, которые подтверждают существование и характер побочных спектральных составляющих, вызванных шумом  $\Sigma\Delta M$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Advanced phase-lock techniques / Crawford J.A. – Norwood: Artech house, 2008. – 510 с.
2. Синтезаторы частот: Учебное пособие / Б.И. Шахтарин, Г.Н. Прохладин, А.А. Иванов и др. – М.: Горячая линия–Телеком, 2007. – 128 с.
3. Perrott M., Trott M. and Sordini C. A modeling approach for  $\Sigma\Delta M$  fractional-N frequency synthesizers allowing straightforward noise analysis. IEEE Journal of Solid State Circuits, 37(8):1028-1038. – Aug. 2002.
4. Perrott M. H. Fast and accurate behavioral simulation of fractional-N frequency synthesizers and other PLL/DLL circuits // Proc. Design Automation Conf. (DAC), June 2002. – P. 498–503.
5. Bornoosh B., Afzali-Kusha A., Dehghani R., Mehra M., Atarodi S. M. and Noorani M. Reduced complexity 1-bit high-order digital delta-sigma modulator for low-voltage fractional-N frequency synthesis applications // IEE Proc.-Circuits Devices Syst. – Vol. 152. No. 5. – October 2005.

6. Шахтарин Б. И., Иванов А. А. Анализ сигма-дельта модулятора с одной петлей // Научный вестник МГТУ ГА. Сер. Радиофизика и радиотехника. – 2008. – № 126. – С. 74–86.
7. G r e y R. M. Quantization noise spectra // IEEE Trans. Commun. – Vol. 36. – № 6. – November 1990.
8. Левин В. А., Малиновский В. Н., Романов С. К. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. – М.: Радио и связь, 1989.
9. Шахтарин Б. И., Прохладин Г. Н., Иванов А. А. Нелинейная динамика синтезатора частот с петлей ФАП // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – № 9. Т. 12 – С. 39–47.
10. Синхронизация в радиосвязи и радионавигации: Учебное пособие / Б.И. Шахтарин, А.А. Иванов, М.А. Рязанова и др. – М.: Гелиос АРВ, 2007. – 256 с.

Статья поступила в редакцию 23.09.2008

Андрей Андреевич Иванов родился в 1985 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2008 г. Канд. техн. наук, преподаватель кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области систем синхронизации и статистического моделирования нелинейных систем управления.

A.A. Ivanov (b. 1985) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2008. Ph. D. (Eng.), the teacher of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Researcher of the Research Institute for Information Technology and Control Systems of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of systems of synchronization and statistical simulation of nonlinear control systems.