

**СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ ДО СРЫВА СЛЕЖЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКЕ****Б.И. Шахтарин, Т.Г. Асланов**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: Tabasik@gmail.com

*Рассмотрены методы расчета среднего времени до срыва слежения в непрерывных и дискретных системах. Приведено уравнение, по которому определяется среднее время до срыва слежения для непрерывной фазовой автоподстройки, и его решение. При этих же условиях показано получение среднего времени до срыва слежения приближенным методом Галеркина в случае дискретной фазовой автоподстройки. Даны зависимости среднего времени до срыва слежения при различных значениях частотного рассогласования в случае дискретной и непрерывной фазовых автоподстроек, а также зависимости срывов слежения в дискретной фазовой автоподстройке от нормированного интервала дискретизации в сравнении с непрерывной фазовой автоподстройкой. В результате была показана зависимость разности среднего времени до срыва слежения в дискретной фазовой автоподстройке при различных значениях нормированного интервала дискретизации от частотного рассогласования.*

**Ключевые слова:** фазовая автоподстройка, дифференциальное уравнение, отношения сигнал/шум.

**MEAN TIME BEFORE TRACKING LOSS IN CONTINUOUS AND DISCRETE PHASE-LOCKED LOOPS****B.I. Shakhtarin, T.G. Aslanov**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: Tabasik@gmail.com

*Methods for calculating the mean time before tracking loss in continuous and discrete systems are considered. The equation, from which the mean time before tracking loss is determined for the continuous phase-locked loop, and its solution are given. It is shown that for the case of the discrete phase-locked loop under the same conditions, the mean time before tracking loss is obtained using the approximate Galerkin method. The values of the mean time before tracking loss at different values of the frequency error (for both continuous and discrete phase-locked loops), as well as the dependence of tracking losses in the discrete phase-locked loop on the normalized sampling interval in comparison to continuous phase-locked loop are given. As a result, the dependence of the difference in values of mean time before tracking loss in the discrete phase-locked loop with different normalized sampling intervals on the frequency error is shown.*

**Keywords:** phase-locked loop, differential equation, signal-to-noise ratio.

**Введение.** Внедрение спутниковых радионавигационных и радиосвязных систем привело к усилению интереса к системам синхронизации и к их точности [1–6]. В течение последних лет в связи с увеличением полосы рабочих частот и совершенствованием элементной

базы микроэлектроники интенсивно проводились исследования элементов дискретизации системы синхронизации. Вследствие повсеместного внедрения цифровых систем синхронизации, в устройствах расширились возможности систем, повысились эффективность устройств, их помехоустойчивость и быстродействие. В настоящей статье проведен анализ среднего времени до срыва слежения для непрерывных и дискретных схем фазовой автоподстройки (ФАП), а также результаты расчетов.

**Срыв слежения для дискретной системы синхронизации.** Для сравнительного анализа дискретной и непрерывной схем была выбрана модель фазовой автоподстройки с гауссовым белым шумом на входе, фильтром первого порядка и дискриминатором, имеющим синусоидальный вид нелинейности.

Для  $k$ -го шага можно записать интегральное уравнение для вероятности срыва слежения в дискретной схеме ФАП [7]:

$$d_k(x_0) = \int_{-a}^a q(x|x_0) d_{k-1} dx.$$

При  $k = 1$

$$d_1(x_0) = 1 - \int_{-a}^a q(x|x_0) dx. \quad (1)$$

Определим число шагов  $n$ -го начального момента до срыва синхронизации в интервале  $(-\pi; \pi)$ :

$$m_n(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n d_k(x_0) = d_1(x_0) + \int_{-a}^a q(x|x_0) \left[ \sum_{k=2}^{\infty} k^n d_k(x) \right] dx. \quad (2)$$

Подставляя в уравнение (2) выражение (1), получаем

$$m_n(x_0) = 1 + \int_{-a}^a q(x|x_0) \left( \sum_{k=2}^{\infty} [k^n d_{k-1}(x)] - 1 \right) dx. \quad (3)$$

Следует отметить, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^n d_{k-1}(x) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^n d_k(x) - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k m_{n-k}(x), \quad (4)$$

где  $C_n^k$  — биномиальный коэффициент.

Подставим выражение (4) в интегральное уравнение (3), тогда

$$\begin{aligned}
m_n(x_0) &= 1 + \int_{-a}^a q(x|x_0) \left[ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k m_{n-k}(x) \right] dx = \\
&= 1 + \int_{-a}^a m_n(x) q(x|x_0) dx + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \tilde{m}_{n-k}(x), \quad (5)
\end{aligned}$$

где  $\tilde{m}_{n-k}(x) = \int_{-a}^a m_{n-k}(z) q(z|x) dz$ ,  $i = \overline{1, k-1}$ .

По уравнению (2) можно записать рекуррентное выражение для вычисления моментов  $m_n(x_0)$ :

$$\tilde{m}_n(x_0) = m_n(x) - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k m_{n-k}(x).$$

Так, для первых двух моментов  $m_1$  и  $m_2$  запишем

$$m_1(x_0) = 1 + \int_{-a}^a m_1(x) q(x|x_0) dx; \quad \tilde{m}_1(x_0) = m_1(x_0) - 1;$$

$$m_2(x_0) = 1 + \int_{-a}^a m_2(x) q(x|x_0) dx + 2\tilde{m}_1(x_0).$$

Среднее время до срыва слежения может быть определено по следующей зависимости:

$$\gamma_{\text{ср}} = m_1 T_0. \quad (6)$$

### Срыв слежения для непрерывной системы синхронизации.

В работе [6] среднее время до срыва слежения в непрерывной схеме ФАП находится исходя из уравнения Понтрягина:

$$\frac{d^2 \gamma_1(x)}{dx^2} - rh(x) \frac{d\gamma_1(x)}{dx} + r = 0; \quad (7)$$

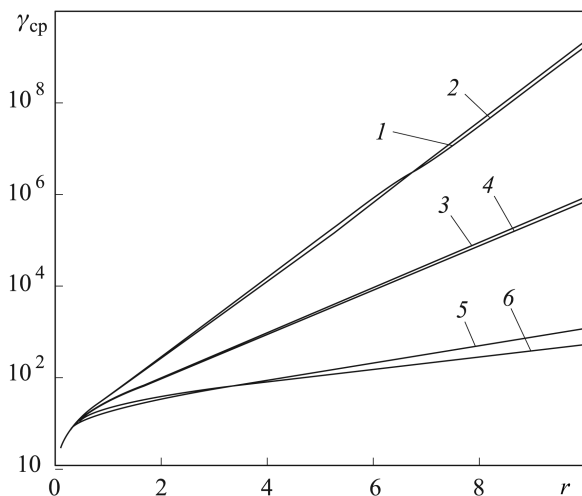
$$h(x) = \sin x - \beta,$$

где  $\gamma_1 = \gamma_{\text{ср}} = \Omega T_{\text{ср}}$  — среднее время до срыва слежения;  $r$  — отношение сигнал/шум;  $\beta$  — нормированное начальное рассогласование частот управляемого генератора и входного сигнала.

Среднее время до срыва слежения  $\gamma_{\text{ср}}$  получаем по формулам, приведенным в работе [8]:

$$\gamma_{\text{ср}} = \frac{2\pi \operatorname{th}(\pi\nu)}{\beta} R_{\Sigma}, \quad (8)$$

где  $R_{\Sigma} = \frac{\pi\nu}{\operatorname{sh}(\pi\nu)} |I_{i\nu}(r)|$ ;  $\nu = \beta r$ ;  $I_{i\nu}(r)$  — модифицированная функция



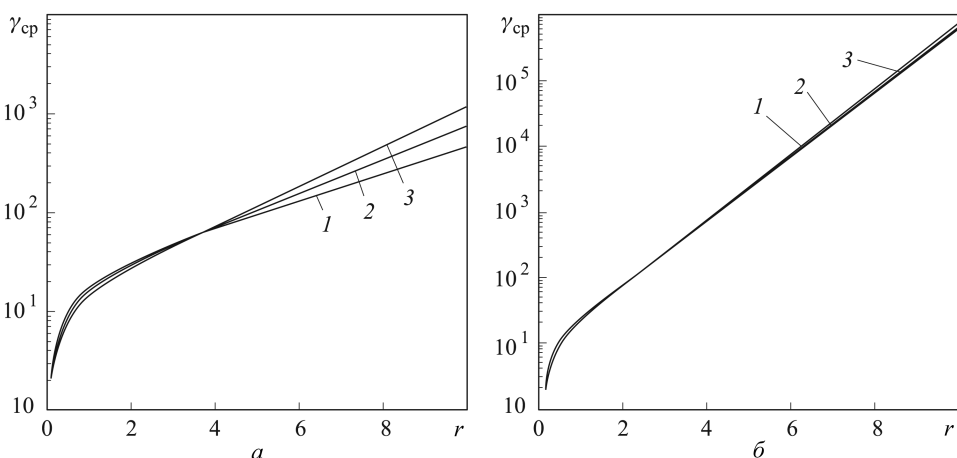
**Рис. 1.** Зависимость среднего времени до срыва слежения от величины  $r$  при значениях частотного рассогласования  $\beta = 0$  (1, 2), 0,3 (3, 4) и 0,6 (5, 6) при  $T = 1,0$

Бесселя мнимого порядка,

$$|I_{i\nu}(r)|^2 = \frac{\text{sh}(\pi\nu)}{\pi\nu} \left[ I_0^2(r) + 2\nu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n(r)}{n^2 + \nu^2} \right] = \frac{\text{sh}(\pi\nu)}{\pi\nu} R_{\Sigma}.$$

На рис. 1 приведены зависимости среднего времени до срыва слежения от величины  $r$ , рассчитанного по (6) и (8) при  $T = 1,0$  (кривые 1, 3, 5 получены по (7), кривые 2, 4, 6 — по (8)).

На рис. 2 представлены зависимости среднего времени до срыва слежения от величины  $r$ , рассчитанного по (6).



**Рис. 2.** Среднее время до срыва слежения при различных значениях нормированного времени дискретизации при  $\beta = 0,6$  (а) и 0,3 (б) для  $T = 1,0$  (1), 0,5 (2) и 0,001 (3)

**Заключение.** Результаты сравнительного анализа среднего времени до срыва слежения для непрерывных и дискретных схем ФАП показывают, что при нулевом начальном рассогласовании даже при нормированном интервале дискретизации  $T_0 = 1$  расхождения среднего времени до срыва слежения в указанных двух случаях несущественно. При том же интервале дискретизации, но при ненулевом начальном рассогласовании наблюдаются существенные расхождения, которые снижаются с уменьшением интервала дискретизации и накладываются друг на друга при  $T_0 > 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Власов И.Б. Глобальные навигационные спутниковые системы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 182 с.
2. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. М.: Радиотехник, 2005. 688 с.
3. Синхронизация в радиосвязи и радионавигации / Б.И. Шахтарин, В.В. Сизых, Ю.А. Сидоркина и др. М.: Горячая линия–Телеком, 2011. 278 с.
4. Meyr H., Ascheid G. Synchronization in digital communications. Vol. 1. Phase, frequency – locked loops and amplitude control. NY.: J. Wiley, 1990. 510 p.
5. Stephens D.R. Phase – locked loops for Wireless communications. Digital, analog and implementations. 2nd NY. Moscow. Kluwer Ac. publ. 2002. 421 p.
6. Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998. 488 с.
7. Первозванский А.А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М.: Наука, 1962. 352 с.
8. Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации при наличии помех. М.: ИПРЖР, 1996. 252 с.

## REFERENCES

- [1] Vlasov I.B. Global'nye navigatsionnye sputnikovye sistemy [Global navigation satellite systems]. Moscow, MGТУ im. N.E. Baumana Publ., 2008. 182 p.
- [2] Perov A.I., Kharisov V.N. GLONASS. Printsipy postroeniya i funktsionirovaniya [GLONASS. Principles of construction and operation]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2005. 688 p.
- [3] Shakhhtarina B.I., Sizykh V.V., Sidorkina Yu.A. Sinkhronizatsiya v radiosvyazi i radionavigatsii [Synchronization in radio communication and navigation]. Moscow, Goryachaya liniya-Telecom Publ., 2011. 278 p.
- [4] Meyr H., Ascheid G. Synchronization in digital communications. Vol. 1. Phase, frequency - locked loops and amplitude control. NY, J. Wiley Publ., 1990. 510 p.
- [5] Stephens D.R. Phase - locked loops for wireless communications. Digital, analog and implementations. Moscow, Kluwer Ac. Publ., 2002. 421 p.
- [6] Shakhhtarina B.I. Statisticheskaya dinamika sistem sinkhronizatsii [Statistical dynamics of synchronization systems]. Moscow, Radio i svyaz', 1998. 488 p.
- [7] Pervozvanskiy A.A. Sluchaynye protsessy v nelineynykh avtomaticheskikh sistemakh [Random processes in nonlinear automatic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 352 p.
- [8] Shakhhtarina B.I. Analiz sistem sinkhronizatsii pri nalichii pomekh [Analysis of synchronization systems in the presence of interference]. Moscow, IPRZHR Publ., 1996. 252 p.

Статья поступила в редакцию 03.04.2013

Борис Ильич Шахтарин — д-р техн. наук, профессор кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области радиотехники, статистического анализа, фазовой синхронизации, формирования и обнаружения сигналов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.I. Shakhhtarin — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of radio engineering, statistical analysis, phase synchronization, formation and detection of signals.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Тагирбек Гайдарбекович Асланов — аспирант кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 20 научных работ по сейсмологии, локации и синхронизации.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

T.G. Aslanov — post-graduate of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 20 publications in the field of seismology, radar and synchronization.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.