УДК 621.3(075)

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ ЦЕПЕЙ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В.Ф. Судаков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: vvffss.inbox.ru

Рассмотрены консервативные цепи общего вида с двумя степенями свободы, состоящие из двух параллельных контуров, связанных общим реактивным элементом. Они эквивалентны любым возможным консервативным цепям с двумя степенями свободы. В гамильтоновом формализме для описания таких цепей введены канонические переменные координата–импульс. Цель данной статьи — получить уравнения Гамильтона (канонические) для этих переменных применительно к цепям конкретного вида. Переходить к гамильтонову формализму естественно через лагранжев формализм. В качестве обобщенных координат и скоростей лагранжева подхода выбраны заряды и потокосцепления. Выбор неоднозначен и зависит от структуры цепи. В соответствии с этим от вида цепи зависит выбор обобщенных координат и импульсов. Уравнения Гамильтона получены в векторной форме. Показано, что матрица коэффициентов формально аналогична матрице коэффициентов уравнений Гамильтона для цепей с одной степенью свободы. Впервые для рассматриваемых цепей матричные элементы в явном виде выражены через физические параметры цепей. Этот результат является основным.

***Ключевые слова*:** степень свободы, консервативный, гамильтониан, гамильтоновы уравнения.

HAMILTONIAN EQUATIONS FOR CONSERVATIVE CIRCUITS WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

V.F. Soudakov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: vvffss.inbox.ru

Conservative circuits of general form with two degrees of freedom, consisting of two parallel paths coupled through a common reactive element, are considered. They are equivalent to any possible conservative circuits with two degrees of freedom. In Hamilton's formalism, the canonical variables "coordinate–momentum" are introduced for description of such circuits. In this work, the Hamiltonian (canonical) equations are derived for these variables as applied to the circuits of a specific type. It is natural to pass to Hamilton's formalism through the Lagrange's formalism. A charge and flux-linkage are chosen as generalized coordinates and velocities of the Lagrangian approach. The choice is ambiguous and depends on the circuit structure. In this connection, a choice of the generalized coordinates and momenta depends on the type of the circuit. Hamiltonian equations are obtained in vector form. It is shown that a matrix of coefficients is formally similar to the matrix of coefficients of Hamiltonian equations for the chains with a single degree of freedom. For the first time, the matrix elements are explicitly expressed through physical parameters of circuits (for the circuits under consideration), which is the main result of the work.

***Keywords*:** degree of freedom, conservative, Hamiltonian, Hamiltonian equations.

Введение. Консервативные электрические цепи (ЭЦ) с двумя степенями свободы при отсутствии взаимно индуктивной или взаимно емкостной связи можно представить как два параллельных контура с последовательной реактивной связью (трехконтурная ЭЦ) и как два последовательных контура с параллельной реактивной связью (двухконтурная ЭЦ). Исследование таких цепей сложно, но может быть проведено аналитическими методами. Покажем, что указанные ЭЦ анализируются идентично, поэтому для примера выберем только две из них — трехконтурные ЭЦ с последовательной связью между контурами (емкостной и индуктивной). Задача заключается в получении математической модели таких ЭЦ, т.е. соответствующих дифференциальных уравнений. Для этого выбран наиболее приемлемый с точки зрения автора метод — гамильтонов формализм.

Использовать методы лагранжевой механики для анализа консервативных ЭЦ предлагалось ранее (например, Л.И. Мандельштам [1], С.П. Стрелков [2]). Рассматривался лагранжиан достаточно общего вида (в частности, для электрической цепи с двумя степенями свободы), находились уравнения Лагранжа для ЭЦ, частоты мод (нормальных колебаний) и коэффициенты разложения колебаний по модам. В электротехнике для вывода динамических уравнений лагранжев подход применяется редко, поскольку эти уравнения гораздо легче получить другими методами (методом контурных токов или методом узловых потенциалов). Будем исходить из того, что уравнения Лагранжа известны (однако запишем их вновь из чисто методических соображений).

Иная ситуация с получением уравнений Гамильтона. В линейной электротехнике они встречаются в неявном виде, например при реализации метода переменных состояний [3]. Значительно важнее их роль в линеаризованных задачах нелинейной электротехники, которые допускают описание с помощью гамильтониана (консервативные цепи). Так, рассматриваемые в статье цепи могут быть линейным приближением к слабо нелинейным цепям. Например, кулон-вольтова характеристика (КВХ) емкостного элемента связи обычно монотонна и реально мало отличается от линейной, что дает возможность в первом приближении использовать линейное приближение КВХ. При необходимости описание линейного приближения (линейной цепи) будет наследовать описание исходной нелинейной цепи, которое часто будет гамильтоновым. Таким образом, возникает промежуточная (в литературе — порождающая [1]) система гамильтоновых линейных уравнений. Автору неизвестны работы, где такие уравнения были получены (или хотя бы приведены) для цепей выделенного класса, что и определило основную цель настоящей статьи.

Переходить к гамильтонову формализму естественно через лагранжев формализм, т.е. через преобразование Лежандра. В связи с этим рассмотрим приложение лагранжева и гамильтонова формализмов параллельно, причем лагранжев формализм будет вспомогательным. Цель — вывести для указанных выше конкретных ЭЦ уравнения Гамильтона.

Лагранжев формализм. Основа лагранжева формализма — функция Лагранжа (лагранжиан) L, зависящая от обобщенных координат u_1, u_2 и их производных (обобщенных скоростей) $\dot{u}_1, \dot{u}_2$, если рассматривается система (механическая или электрическая цепь) с двумя степенями свободы. Физическое содержание обобщенных координат и скоростей может быть различным. В механике в важном частном случае системы с голономными связями при действии потенциальных сил лагранжиан может быть представлен как разность $L = T - \mathit{\Pi}$, где T — кинетическая энергия (квадратичная форма по обобщенным скоростям, коэффициенты которой могут зависеть от обобщенных координат); $\mathit{\Pi}$ — потенциальная энергия, зависящая только от обобщенных координат (для консервативных систем зависимости от времени не существует). В электротехнике роль величин T и $\mathit{\Pi}$ выполняют электрическая ($W_{\text{э}}$) и магнитная ($W_{\text{м}}$) энергии, причем однозначно указать соответствующие аналоги нельзя [4]. Уравнения Лагранжа второго рода в терминах обобщенных координат и скоростей (конкретизация которых приведена ниже) при изложенных выше ограничениях имеют следующий общий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} - \frac{\partial L}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} - \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0.$$

Это система дифференциальных уравнений второго порядка. В настоящей статье уравнения Лагранжа не понадобятся, достаточно получить только лагранжиан. Однако исключительно для полноты изложения запишем и их. Перейдем к определению лагранжиана.

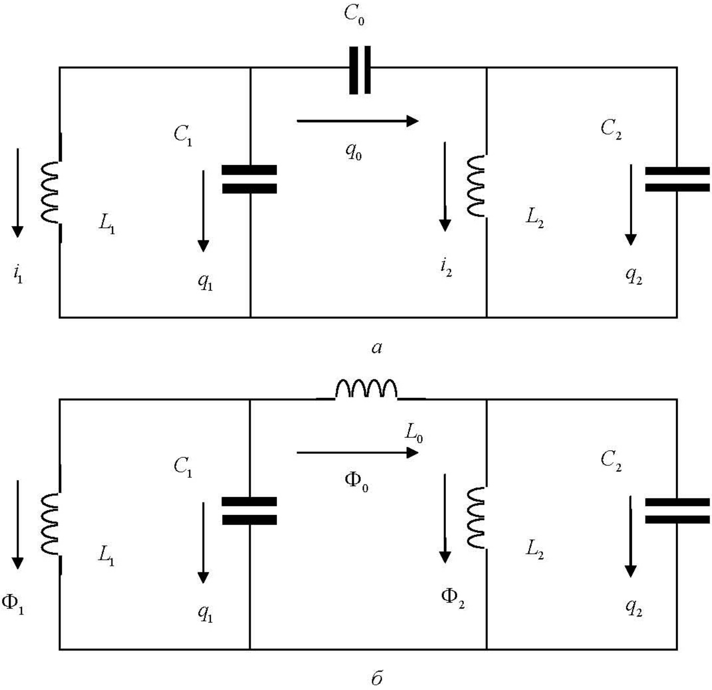
Запишем выражения для электрической и магнитной энергий рассматриваемых ЭЦ. Схема трехконтурной консервативной ЭЦ1, образованной двумя последовательно связанными через емкость C_0 параллельными контурами, приведена на части *а* рисунка. Согласно закону Кирхгофа для токов (ЗКТ), индуктивные токи могут быть выражены через емкостные токи:

$$i_1 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_0; \tag{1}$$

$$i_2 = -\dot{q}_2 + \dot{q}_0. \tag{2}$$

В соответствии с законом Кирхгофа для напряжений (ЗКН) заряды конденсаторов удовлетворяют уравнению голономной связи

$$C_0^{-1} q_0 = C_1^{-1} q_1 - C_2^{-1} q_2. \tag{3}$$



Схемы трехконтурной консервативной ЭЦ1 (*а*) и ЭЦ2 (*б*), образованных двумя последовательно связанными через емкость C_0 (*а*) и индуктивность L_0 (*б*) параллельными контурами

Аналогично уравнению (3) уравнение голономной связи для емкостных токов имеет вид

$$C_0^{-1}\dot{q}_0 = C_1^{-1}\dot{q}_1 - C_2^{-1}\dot{q}_2. \tag{4}$$

Из (1), (2), (4) получим

$$i_1 = -\left(1 + C_1^{-1}C_0\right)\dot{q}_1 + C_2^{-1}C_0\dot{q}_2; \tag{5}$$

$$i_2 = C_1^{-1}C_0\dot{q}_1 - \left(1 + C_2^{-1}C_0\right)\dot{q}_2. \tag{6}$$

Таким образом, переменные состояния ЭЦ выражены через обобщенные координаты (емкостные заряды) и обобщенные скорости (емкостные токи)

Магнитная энергия ЭЦ1 с учетом (5) и (6) определяется как

$$W_{\text{м}} = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} = \frac{L_1\left[-\left(1 + C_1^{-1}C_0\right)\dot{q}_1 + C_2^{-1}C_0\dot{q}_2\right]^2}{2} + \\ + \frac{L_2\left[-\left(1 + C_2^{-1}C_0\right)\dot{q}_2 + C_1^{-1}C_0\dot{q}_1\right]^2}{2}. \tag{7}$$

Электрическая энергия ЭЦ1 с учетом (3) составляет

$$W_{\text{э}} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_0^2}{2C_0} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + C_0\frac{\left(C_1^{-1}q_1 - C_2^{-1}q_2\right)^2}{2}. \tag{8}$$

Схема консервативной ЭЦ2, образованной двумя последовательно связанными через индуктивность L_0 параллельными контурами, приведена на части *б* рисунка.

Индуктивные напряжения $\dot{\Phi}_1$, $\dot{\Phi}_2$ могут быть определены через емкостные напряжения в соответствии с ЗКН (q_1, q_2 — заряды конденсаторов; C_1, C_2 — их емкости):

$$q_1 C_1^{-1} = \dot{\Phi}_1; \tag{9}$$

$$q_2 C_2^{-1} = \dot{\Phi}_2. \tag{10}$$

Индуктивные напряжения $\dot{\Phi}_1$, $\dot{\Phi}_2$, $\dot{\Phi}_0$ также связаны между собой ЗКН: $\dot{\Phi}_0 = \dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2$. Соответственно, для потокосцепления (с точностью до аддитивной постоянной) можно записать

$$\Phi_0 = \Phi_1 - \Phi_2. \tag{11}$$

Магнитная энергия ЭЦ2 с учетом (11) составляет

$$W_{\text{м}} = \frac{\Phi_1^2}{2L_1} + \frac{\Phi_2^2}{2L_2} + \frac{\Phi_0^2}{2L_0} = \frac{\Phi_1^2}{2L_1} + \frac{\Phi_2^2}{2L_2} + \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)^2}{2L_0},$$

или

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2L_1}\left(1 + L_1 L_0^{-1}\right)\Phi_1^2 + \frac{1}{2L_2}\left(1 + L_2 L_0^{-1}\right)\Phi_2^2 - L_0^{-1}\Phi_1\Phi_2. \tag{12}$$

Электрическая энергия ЭЦ2 с учетом (9) и (10) равна

$$W_{\text{э}} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{C_1}{2}\dot{\Phi}_1^2 + \frac{C_2}{2}\dot{\Phi}_2^2. \tag{13}$$

Следовательно, переменные состояния ЭЦ2 (емкостные заряды и потокосцепления) выражены через обобщенные координаты (потокосцепления) и обобщенные скорости (индуктивные напряжения).

Для электрической и магнитной энергий из выражений (8), (13) и (7), (12) следует, что обобщенные механические лагранжевы переменные в рассматриваемых случаях различны: для ЭЦ1 это заряды и емкостные токи, для ЭЦ2 — потокосцепления и индуктивные напряжения.

Электрическая энергия для ЭЦ1 зависит от зарядов q_1, q_2 конденсаторов, а для ЭЦ2 — от производных потокосцеплений $\dot{\Phi}_1, \dot{\Phi}_2$ (от индуктивных напряжений). Магнитная энергия для ЭЦ1 зависит от производных зарядов $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ конденсаторов, а в случае ЭЦ2 — от потокосцеплений Φ_1, Φ_2.

Учитывая, что для ЭЦ1 обобщенными координатами являются заряды q_1, q_2, а для ЭЦ2 — потокосцепления Φ_1, Φ_2, в терминах электромеханических аналогий можно сделать следующие выводы [4]:

1) для ЭЦ1 магнитная энергия — это кинетическая энергия $T = W_{\text{м}}$, а электрическая энергия — потенциальная энергия $\Pi = W_{\text{э}}$;

2) для ЭЦ2 магнитная энергия — это потенциальная энергия $\Pi = W_{\text{м}}$, а электрическая энергия — кинетическая энергия $T = W_{\text{э}}$.

Отметим, что в случае консервативных цепей (здесь речь идет о любых цепях с двумя степенями свободы) кинетическая энергия от обобщенных координат не зависит.

Применение лагранжева формализма к составлению уравнений ЭЦ зависит от вида цепи, так как величины T и Π различным образом выражены через магнитную и электрическую энергии. В связи с этим отдельно разберем уравнения Лагранжа для ЭЦ1 и ЭЦ2.

1. В случае ЭЦ1 лагранжиан получим из (7) и (8):

$$L = T - \Pi = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} - \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q_2^2}{2C_2} - C_0 \frac{\left(C_1^{-1} q_1 - C_2^{-1} q_2\right)^2}{2}. \quad (14)$$

Поскольку в этом случае кинетическая энергия зависит только от обобщенных скоростей, а потенциальная энергия — только от обобщенных координат, уравнения Лагранжа относительно обобщенных координат q_1, q_2 принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}. \quad (15)$$

Найдем левые части уравнений (15):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial \dot{q}_2}\right) = A_{22}\ddot{q}_2 - A\ddot{q}_1; \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial \dot{q}_1}\right) = A_{11}\ddot{q}_1 - A\ddot{q}_2. \quad (17)$$

В (16) и (17) введены обозначения ($k = 1, 2,\ k' \neq k$):

$$A_{kk} = L_k \left(1 + C_k^{-1} C_0\right)^2 + L_{k'} \left(C_0 C_k^{-1}\right)^2;$$
$$A = L_2 C_1^{-1} C_0 \left(1 + C_2^{-1} C_0\right) + (1 \leftrightarrow 2).$$

Квадраты парциальных частот связанных контуров составляют $\Omega_{k0}^2 = C_k^{-1} L_k^{-1}$.

Правые части уравнений (15) имеют вид

$$\frac{d\Pi}{dq_1} = B_{11} q_1 - B q_2; \quad (18)$$

$$\frac{d\Pi}{dq_2} = B_{22} q_2 - B q_1. \quad (19)$$

В (18) и (19) использованы обозначения

$$B_{kk} = C_k^{-1}\left(1 + C_0 C_k^{-1}\right); \quad B = C_0 C_1^{-1} C_2^{-1}.$$

Подставим (16), (17), (18) и (19) в уравнения Лагранжа и запишем два связанных уравнения:

$$A_{11}\ddot{q}_1 - A\ddot{q}_2 + B_{11}q_1 - Bq_2 = 0; \tag{20}$$

$$A_{22}\ddot{q}_2 - A\ddot{q}_1 + B_{22}q_2 - Bq_1 = 0. \tag{21}$$

Согласно (20) и (21), в отсутствие связи ($C_0 = 0$) ЭЦ имеет в качестве нормальных частот парциальные, а уравнения Лагранжа переходят в систему несвязанных уравнений, описывающих нормальные колебания емкостных зарядов каждого контура на парциальных частотах. При $C_0 \neq 0$ появляется связь уравнений. В результате нормальные частоты цепи отличаются от парциальных (имеет место "расталкивание парциальных частот"). Колебания зарядов становятся двухчастотными.

2. В случае ЭЦ2 лагранжиан получим из (12) и (13):

$$L = T - \varPi = \frac{C_1}{2}\dot{\Phi}_1^2 + \frac{C_2}{2}\dot{\Phi}_2^2 - \\ - \frac{L_1^{-1}}{2}\left(1 + L_1 L_0^{-1}\right)^2 \Phi_1^2 - \frac{L_2^{-1}}{2}\left(1 + L_2 L_0^{-1}\right)\Phi_2^2 + L_0^{-1}\Phi_1\Phi_2.$$

Уравнения Лагранжа записываются относительно обобщенных координат Φ_1, Φ_2 в следующем виде (если учесть, что магнитная энергия ЭЦ не зависит от скоростей, а ее электрическая энергия — от координат):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_1} = -\frac{\partial \varPi}{\partial \Phi_1}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_2} = -\frac{\partial}{\partial \Phi_2}. \tag{22}$$

Найдем левые части уравнений (22):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_1} = C_1\ddot{\Phi}_1; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_2} = C_2\ddot{\Phi}_2, \tag{23}$$

а также правые части этих уравнений:

$$\frac{\partial \varPi}{\partial \Phi_1} = L_1^{-1}\left(1 + L_1 L_0^{-1}\right)\Phi_1 - L_0^{-1}\Phi_2; \tag{24}$$

$$\frac{\partial \varPi}{\partial \Phi_2} = L_2^{-1}\left(1 + L_2 L_0^{-1}\right)\Phi_2 - L_0^{-1}\Phi_1. \tag{25}$$

Подставим (23)–(25) в уравнения Лагранжа и запишем два уравнения:

$$A_{11}\ddot{\Phi}_1 + B_{11}\Phi_1 - B\Phi_2 = 0; \tag{26}$$

$$A_{22}\ddot{\Phi}_2 + B_{22}\Phi_2 - B\Phi_1 = 0, \tag{27}$$

где

$$A_{11} = C_1; \quad A_{22} = C_2;$$

$$B_{11} = L_1^{-1}\left(1 + L_1 L_0^{-1}\right); \quad B_{22} = L_2^{-1}\left(1 + L_2 L_0^{-1}\right); \quad B = L_0^{-1}.$$

Квадраты парциальных частот связанных контуров составляют $\Omega_{10}^2 = C_1^{-1}L_1^{-1}$, $\Omega_{20}^2 = C_2^{-1}L_2^{-1}$.

Характер связи уравнений (29), (30) отличается от характера связи уравнений (20), (21).

В соответствии с (26) и (27), в отсутствие связи ($L_0 = \infty$) уравнения Лагранжа переходят в систему несвязанных уравнений. При этом каждая координата (потокосцепление) совершает гармоническое колебание (нормальное колебание) на одной из парциальных частот. При наличии связи ($L_0 \neq \infty$) нормальные частоты цепи отличаются от парциальных. Каждое из потокосцеплений контуров участвует в двухчастотных колебаниях на нормальных частотах.

Системы связанных уравнений (26), (27) и (20), (21) имеют вид, который неоднократно изучался различными методами. Как уже было отмечено, лагранжев подход к выводу уравнений модельных ЭЦ приведен лишь для проверки корректности использования магнитной и электрической энергий в качестве кинетической и потенциальной, т.е. в методическом плане, и необходим для реализации гамильтонова формализма. С учетом изложенного выше отождествлять магнитную энергию ЭЦ с кинетической энергией, а электрическую — с потенциальной, как принято полагать, в общем случае нельзя. Может быть и наоборот.

Гамильтонов формализм. Для систем с голономными связями и при потенциальном характере действующих сил можно использовать уравнения Гамильтона (канонические) как альтернативу уравнениям Лагранжа второго рода. Уравнения Гамильтона обладают следующими важными достоинствами:

— для их полной интегрируемости достаточно знать только N независимых первых интегралов (N — число степеней свободы, порядок системы уравнений $2N$), которые в ряде случаев можно получить из уравнения Гамильтона–Якоби [5];

— в этих уравнениях, не меняя их вида, с помощью канонических преобразований можно переходить к другим искомым функциям.

Для линейных уравнений эти свойства не так важны, как для нелинейных.

Гамильтонов подход предполагает, что лагранжиан L известен. Поэтому в рассмотрение вместо обобщенных скоростей $\dot{u}_1, \dot{u}_2$ могут быть введены другие переменные — обобщенные импульсы

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1}; \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2}.$$

Координаты u_1, u_2 и координаты p_1, p_2 образуют канонически сопряженные (гамильтоновы) переменные.

Вместо лагранжиана в гамильтоновом формализме используют гамильтониан H, полученный с помощью преобразования Лежандра (предполагающего переход от скоростей к импульсам):

$$H\left(u_1, u_2, p_1, p_2\right) = \sum_{i=1}^{2} \dot{u}_i p_i - L.$$

При указанных выше ограничениях на систему, выполняющихся для консервативных ЭЦ, можно показать, что гамильтониан имеет вид [6]

$$H\left(u_1, u_2, p_1, p_2\right) = T + \mathit{\Pi}.$$

Здесь зависимость от скоростей заменена зависимостью от импульсов. В результате получают уравнения Гамильтона:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2.$$

Запишем уравнения Гамильтона для рассматриваемых консервативных ЭЦ.

1. Для ЭЦ1 введем импульсы

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{L_1}{2}\left(\frac{di_1^2}{d\dot{q}_1}\right) = L_1 i_1 \frac{di_1}{d\dot{q}_1} = -L_1\left(1 + C_1^{-1}C_0\right) i_1;$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{L_2}{2}\left(\frac{di_2^2}{d\dot{q}_2}\right) = L_2 i_2 \frac{di_2}{d\dot{q}_2} = -L_2\left(1 + C_2 C_0^{-1}\right) i_2.$$

Отсюда энергия T (7) находится как функция импульсов:

$$T = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} = \sum_{k=1}^{2} \frac{p_k^2}{2L_k\left(1 + C_k^{-1}C_0\right)}.$$

Следовательно,

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial T}{\partial p_1} \to \dot{q}_1 = \frac{p_1}{L_1\left(1 + C_1^{-1}C_0\right)}; \tag{28}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial T}{\partial p_2} \to \dot{q}_2 = \frac{p_2}{L_2\left(1 + C_2^{-1}C_0\right)}. \tag{29}$$

Энергия $\mathit{\Pi}$ определяется по (8), тогда

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial \mathit{\Pi}}{\partial q_1} \to \dot{p}_1 = -C_1^{-1} q_1\left(1 + C_1^{-1}C_0\right) + C_0 C_1^{-1} C_2^{-1} q_2; \tag{30}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial \mathit{\Pi}}{\partial q_2} \to \dot{p}_2 = -C_2^{-1} q_2\left(1 + C_2^{-1}C_0\right) + C_0 C_1^{-1} C_2^{-1} q_1. \tag{31}$$

Дифференциальные уравнения (28)–(31) образуют гамильтонову систему четвертого порядка. Если ввести в рассмотрение вектора $q = (q_1, q_2)^{\text{т}}$ и $p = (p_1, p_2)^{\text{т}}$, то гамильтонову систему можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \hat{a} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \tag{32}$$

где $\hat{a} = \begin{pmatrix} O_2 & \hat{L}^{-1} \\ \hat{C}^{-1} & O_2 \end{pmatrix}$, O_2 — нулевая матрица размерностью 2×2; $\hat{L}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{13} & 0 \\ 0 & a_{24} \end{pmatrix}$; $\hat{C}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$;

$$a_{13} = L_1^{-1} \left(1 + C_1^{-1} C_0\right)^{-1}; \quad a_{24} = L_2^{-1} \left(1 + C_2^{-1} C_0\right)^{-1}; \tag{33}$$

$$a_{31} = -a_{13} L_1 C_1^{-1}; \quad a_{42} = -L_2 C_2^{-1} a_{24}; \quad a_{32} = a_{41} = C_0 C_1^{-1} C_2^{-1}. \tag{34}$$

Нетрудно проверить, что матрица $\hat{a}$ является симплектической [7], т.е. ее можно представить в специальном виде: $\hat{a} = \hat{I}\,\hat{H}$, где $\hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}$ — кососимметрическая матрица (E_2 — единичная матрица размерностью 2×2); $\hat{H} = \begin{pmatrix} -\hat{C}^{-1} & O_2 \\ O_2 & \hat{L}^{-1} \end{pmatrix}$ — вещественная симметрическая матрица. В результате (32) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \hat{I}\,\hat{H} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

2. Для ЭЦ2 выражения для импульсов имеют вид

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_1} = C_1 \dot{\Phi}_1;$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_2} = C_2 \dot{\Phi}_2.$$

Отсюда энергия T (13) находится как функция импульсов:

$$T = \frac{C_1}{2}\dot{\Phi}_1^2 + \frac{C_2}{2}\dot{\Phi}_2^2 = \frac{p_1^2}{2C_1} + \frac{p_2^2}{2C_2}.$$

Следовательно,

$$\dot{\Phi}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial T}{\partial p_1} \to \dot{\Phi}_1 = C_1^{-1} p_1; \tag{35}$$

$$\dot{\Phi}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial T}{\partial p_2} \to \dot{\Phi}_2 = C_2^{-1} p_2. \tag{36}$$

Энергия Π определяется по (12), тогда

$$\dot p_1 = -\frac{\partial H}{\partial \Phi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \Phi_1} \to \dot p_1 = -L_1^{-1}\left(1 + L_1 L_0^{-1}\right)\Phi_1 + L_0^{-1}\Phi_2; \quad (37)$$

$$\dot p_2 = -\frac{\partial H}{\partial \Phi_2} = -\frac{\partial}{\partial \Phi_2} \to \dot p_2 = -L_2^{-1}\left(1 + L_2 L_0^{-1}\right)\Phi_2 + L_0^{-1}\Phi_1. \quad (38)$$

Дифференциальные уравнения (35)–(38) также образуют гамильтонову систему четвертого порядка. Если ввести в рассмотрение вектора $q = (q_1, q_2)^{\text{т}}$ и $p = (p_1, p_2)^{\text{т}}$, то гамильтонову систему можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot q \\ \dot p \end{pmatrix} = \hat a \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где $\hat a = \begin{pmatrix} O_2 & \hat C^{-1} \\ \hat L^{-1} & O_2 \end{pmatrix}$; $\hat C^{-1} = \begin{pmatrix} a_{13} & 0 \\ 0 & a_{24} \end{pmatrix}$; $\hat L^{-1} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$;

$$a_{13} = C_1^{-1}; \quad a_{24} = C_2^{-1}; \quad (40)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= -L_1^{-1}\left(1 + L_1 L_0^{-1}\right); \\ a_{42} &= -L_2^{-1}\left(1 + L_2 L_0^{-1}\right); \quad a_{32} = a_{41} = L_0^{-1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Матрица $\hat a$ является симплектической с $\hat H = \begin{pmatrix} -\hat L^{-1} & O_2 \\ O_2 & \hat C^{-1} \end{pmatrix}$. В результате (39) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot q \\ \dot p \end{pmatrix} = \hat I\,\hat H \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

Заключение. Для рассмотренных ЭЦ получены уравнения Гамильтона, исследована их структура: матрица гамильтоновой системы $\hat a$ формально такая же, как и матрица для консервативных ЭЦ с одной степенью свободы, но ее элементы — тоже матрицы вдвое меньшей размерности. Проверено, что матрица гамильтоновой системы уравнений — симплектическая. Впервые для указанных цепей найдены в явном виде матричные элементы (33), (34) и (40), (41), выраженные через параметры ЭЦ. Для данной работы этот результат является основным. На примерах показано, что механические аналоги, кинетическая и потенциальная энергии, которые определяются только выбором обобщенных координат и скоростей, в общем случае могут не иметь однозначного соответствия с магнитной и электрической энергией ЭЦ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. С. 204–229.
2. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 438 с.
3. *Матханов П.Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. М.: Высшая школа, 1981. 333 с.

4. *Ольсон Г.* Динамические аналогии. М.: Иностранная литература, 1947. 222 с.
5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2005. 264 с.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 281 с.

REFERENCES

[1] Mandel'shtam L.I. Lektsii po teorii kolebaniy [Lectures on the theory of oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 471 p.
[2] Strelkov S.P. Vvedeniyu v teoriyu kolebaniy [Introduction to the theory of oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 438 p.
[3] Matkhanov P.N. Osnovy analiza elektricheskikh tsepey. Lineynye tsepi [Principles of analysis of electric circuits. Linear circuits]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1981. 333 p.
[4] Olson H.F. Dynamical analogies. Van Nostrand, 1943. 196 p. (Russ. ed.: Ol'son G. Dinamicheskie analogii. Moscow, Inostrannaya Lit. Publ., 1947. 222 p.).
[5] Arnol'd V.I. Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki [Mathematical methods of classical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 432 p.
[6] Gantmakher F.R. Lektsii po analiticheskoy mekhanike [Lectures on analytical mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 264 p.
[7] Gantmakher F.R. Teoriya matrits [Theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 281 p.

Статья поступила в редакцию 09.01.2013

Владимир Федорович Судаков — д-р техн. наук, профессор кафедры “Теоретические основы электротехники” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 140 научных работ в области теоретической электротехники, квантовой электроники, радиолокации и радионавигации.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.F. Soudakov — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Theoretical Fundamentals of Electrical Engineering” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 140 publications in the field of theoretical electrical engineering, quantum electronics, radar and radio navigation.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.