

## К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОМ ЦИКЛЕ ГЕНЕРАТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ В РЕЛАКСАЦИОННОМ РЕЖИМЕ

**В.Ф. Судаков**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

e-mail: vvfss@inbox.ru

*Приведено приближенное аналитическое описание предельного цикла генератора Ван-дер-Поля в релаксационном режиме. Предложенный метод описания менее точен, чем известные асимптотические приближения, но значительно проще в реализации. Получена временная зависимость автоколебаний в форме обратной функции.*

**Ключевые слова:** генератор, предельный цикл, период автоколебаний, релаксационный режим, асимптотика решения.

## TO THE PROBLEM ON LIMIT CYCLE OF THE VAN DER POL GENERATOR IN RELAXATION MODE

**V.F. Sudakov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow

e-mail: vvfss@inbox.ru

*An approximate analytical description of the limit cycle of the Van der Pol generator in relaxation mode is given. The proposed description approach is less accurate than the known asymptotic approximations but is substantially simpler in implementation. The time dependence of self-oscillations is derived in the form of inverse function.*

**Keywords:** generator, limit cycle, the period of self-oscillations, relaxation mode, asymptotics of the solution.

Уравнение Ван-дер-Поля в приведенной форме

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

описывает как автоколебания, так и процесс их установления. Возможные режимы определяются параметром  $\varepsilon$ : автоколебания существуют только при  $\varepsilon > 0$ , их форма близка к гармонической при  $\varepsilon \ll 1$  и имеет релаксационный вид при  $\varepsilon > 1$ . В настоящей работе остановимся на релаксационном режиме генерации, рассматривая только предельный цикл (автоколебания), не касаясь процесса его установления.

Уравнение (1), ввиду его типичного характера и важного прикладного значения, досконально изучалось на протяжении многих лет. При малых  $\varepsilon$  применялся оптимальный в этом случае метод усреднения [1]. При больших  $\varepsilon$  исчерпывающие результаты были получены графоаналитическим путем с помощью метода изоклин и метода Льенара [1]. Чисто аналитическим путем уравнение (1) исследовал А.А. Дородницын [2], разработавший для этого асимптотический метод. Полученная им зависимость для предельного цикла  $\left(\frac{dx}{dt} = y\right)$

имела вид асимптотических рядов для различных областей изменения  $x$ . Основная трудность, которая была преодолена Дородницыным, сводилась к необходимости сшивать различные асимптотические разложения в окрестностях точек перехода  $x = \pm 1$  и точек  $x = \pm a$ , где  $\frac{dy}{dx}(\mp a) = \pm \infty$  и нарушается однозначность зависимости  $y(x)$ . Малые окрестности этих точек рассматривались как переходные области между областями сравнительно простой асимптотики (основными областями). Согласно методу Дородницына переходные области выбираются таким образом, чтобы они частично перекрывались с прилегающими к ним основными областями. Кроме того, точки  $x = \pm a$  считаются неизвестными и определяются в процессе построения решения во всех основных и переходных областях. Асимптотические ряды, представляющие предельный цикл в различных областях, различны и имеют сложный характер.

Далее будет предложен другой подход к приближенному описанию предельного цикла для уравнения Ван-дер-Поля в релаксационном режиме (при больших  $\varepsilon$ ). Он проще метода Дородницына, хотя и менее точен. Критерием допустимости предлагаемого приближения является правильная (в первом приближении совпадающая с известными результатами) качественная зависимость от  $\varepsilon$  наиболее важных характеристик автоколебаний.

**Асимптотика предельного цикла в основных областях.** Из (1) следует уравнение, представляющее собой зависимость  $y(x)$  на фазовой плоскости  $\{x, y\}$ :

$$y \frac{dy}{dx} - \varepsilon (1 - x^2) y + x = 0. \quad (2)$$

Предельный цикл — это изолированная замкнутая устойчивая траектория на фазовой плоскости. Уравнение (2) сохраняет вид при замене  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ , т.е. его решение центрально симметрично. Это свойство позволяет ограничиться только верхней полуплоскостью  $y \geq 0$ . (В этом пункте приведены известные сведения об асимптотическом приближении решения уравнения (2) в основных областях.) Если амплитуда автоколебаний  $a$ , то они занимают область  $|x| \leq a$ , ограниченную точками, в которых меняет знак производная  $\frac{dx}{dy}$ , проходя через нулевое значение. Исключим из рассмотрения точки перехода  $x = \pm 1$  вместе с некоторой их окрестностью (переходной областью). К.Ф. Теодорчик [3] качественно установил, что в основной области  $-a < x < -1$  (область III) колебания медленно нарастают по приближенному закону

$$y_{\text{III}}(x) \approx \varepsilon^{-1} \frac{x}{1 - x^2}, \quad (3)$$

а в основной области  $-1 < x < a$  (область I) колебания нарастают очень быстро в силу приближенного уравнения

$$y_I \frac{dy}{dx} - \varepsilon (1 - x^2) y_I \approx 0.$$

Решение этого уравнения зависит от постоянной, связанной с амплитудным значением  $a$ :

$$y_I(x) = \varepsilon \left[ (x - a) - \frac{1}{3} (x^3 - a^3) \right]. \quad (4)$$

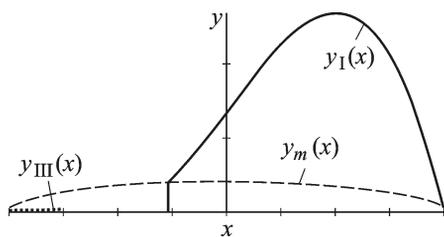
Следовательно, неизвестной в методе Дородницына фактически является амплитуда колебаний  $a$ , основные трудности возникают при ее определении. В частности, необходим переход в полуплоскость  $y < 0$ . Амплитуду колебаний  $a$  удастся определить только после полного обхода на фазовой плоскости всех основных и переходных областей:  $-a \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow a \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow -a$ .

При реализации этой программы необходимо решать полное уравнение (2) в переходных областях (решения представляются асимптотическими рядами по дробным степеням  $\varepsilon$ ). Границы основных и переходных областей определяются из условий асимптотической сходимости этих рядов, что также вызывает вычислительные трудности. Явного выражения для асимптотического представления в переходной области, содержащей точки  $x = \pm a$ , не получено.

На рис. 1 приведены графики, построенные по формулам (3), (4): первая кривая описывает график в основной области III, примыкающей к точке  $x = -a$ , а вторая — в основной области I около точки  $x = a$ . На этом же рисунке показан предельный цикл генератора Вандер-Поля при малом значении  $\varepsilon \ll 1$  (численный расчет).

Зависимости, представленные в виде графиков на рис. 1, известны. Основываясь на них, можно по-иному и значительно проще, чем в методе Дородницына, полностью найти предельный цикл при больших  $\varepsilon$ .

**Сращивание асимптотик  $y_{III}(x)$  и  $y_I(x)$  в переходных областях.** Предлагается следующее. Нетрудно установить (например, [3]), что при всех малых  $\varepsilon$  предельный цикл есть окружность радиуса 2. Через точку  $x = a$  проходит окружность, касательная к предельному циклу релаксационного режима (обе кривые имеют в этой точке общую вертикальную касательную). Поскольку эта окружность есть предельный цикл при малом  $\varepsilon$ , то можно утверждать, что  $a = 2$ . Таким образом,



**Рис. 1.** Часть предельного цикла при больших  $\varepsilon \gg 1$  (неизвестен в средней переходной области);  $y_m(x)$  — при малых  $\varepsilon \ll 1$ . При отрицательных  $y$  графики центрально симметричны приведенным

при любых  $\varepsilon$  амплитуда автоколебаний равна 2 (естественно, с некоторой точностью, как следует из работы [1]). В результате выражение (4) представляет собой полином вида

$$y_I(x) = \varepsilon \left( \frac{2}{3} + x - \frac{1}{3}x^3 \right). \quad (5)$$

Введем в рассмотрение точки  $x_L = -1 - \varepsilon^{-\frac{1}{3}}$  и  $x_R = -1 + \varepsilon^{-\frac{1}{3}}$ . Можно считать асимптотику (3) пригодной в основной области  $[-2, x_L]$ , а асимптотику (5) – пригодной в основной области  $[x_R, 2]$ . Сопряжем эти асимптотики в переходной области  $[x_L, x_R]$  простейшим полиномом  $y_{II}(x)$ , исходя из условий

$$y_{II}(x_L) = y_{III}(x_L), \quad \frac{dy_{II}}{dx}(x_L) = 0.$$

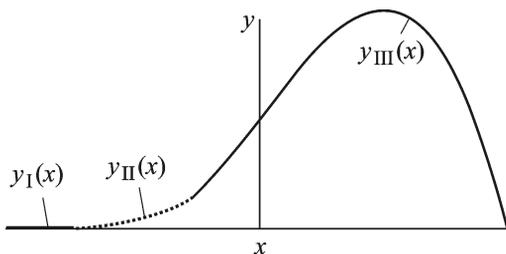
Такой полином должен иметь следующий вид (с точностью до постоянной  $A$ ):

$$y_{II}(x) = A(x - x_L)^2 + y_{III}(x_L). \quad (6)$$

Сращивание асимптотик на границах переходной области можно обеспечить выбором постоянной  $A$  из условия  $y_{II}(x_R) = y_I(x_R)$ . Это условие дает

$$A = [y_I(x_R) - y_{III}(x_L)] \left( 2\varepsilon^{-\frac{1}{3}} \right)^{-2}. \quad (7)$$

Таким образом, предельный цикл в переходной области описывается асимптотикой (6) с постоянной (7). При этом обеспечено сращивание по непрерывности выражений (3), (5), (6) на границах переходной области. Производные различных асимптотик в граничных точках испытывают разрыв, но нетрудно показать, что значения этих разрывов находятся в другом порядке малости, а не в том, где сами производные в этих же точках.



**Рис. 2.** Предельный цикл релаксационных автоколебаний при  $\varepsilon = 10$ , приближенно (с достаточной точностью) совпадающий с построенным по методу Дородницына [2] и с точным решением  $y(x)$ , полученным на ЭВМ [4]

На рис. 2 показан график предельного цикла в верхней полуплоскости, построенный с использованием выражений (3), (5), (6).

*Период автоколебаний.*

Важной характеристикой автоколебаний является их период. В режиме почти гармонических автоколебаний ( $\varepsilon < 1$ ) период равен  $1 + O(\varepsilon)$ . Известно, что период релаксационных

автоколебаний ( $\varepsilon > 1$ ) в основном пропорционален  $\varepsilon$  при асимптотически малых добавках: по методу Дородницына период  $T$  в первом приближении определяется следующим образом [1]:

$$T = 2\varepsilon \left( \frac{3}{2} - \ln 2 \right) + 7,01\varepsilon^{-\frac{1}{3}}. \quad (8)$$

Определим этот же период, исходя из зависимостей  $y(x)$ , полученных предлагаемым методом. Область  $[-2, x_L]$  изображающая точка проходит за время  $T_1 = \int_{-2}^{x_L} \frac{dx}{y_{III}(x)}$ . Используя (3), проведем интегрирование явно

$$T_1 = \varepsilon \left( \frac{3}{2} - \ln 2 \right). \quad (9)$$

Область  $[x_L, x_R]$  проходится за время

$$T_2 = \int_{x_L}^{x_R} \frac{dx}{y_{II}(x)} = \int_0^{x_R - x_L} \frac{ds}{As^2 + y_{II}(x_L)}.$$

Интегрирование можно провести явным образом:

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{Ay_{II}(x_L)}} \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{A}{y_{II}(x_L)}} (x_R - x_L) \right]. \quad (10)$$

Из (5), (6) и (7) следует, что  $y_{III}(x_L) = y_{II}(x_L) = \frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{2}{3}}$ ,  $A = 2^{-2}\varepsilon - \frac{1}{3}2^{-2}\varepsilon^{-\frac{2}{3}} - 2^{-3}$ ,  $x_R - x_L = 2\varepsilon^{-\frac{1}{3}}$ . Отсюда нетрудно получить, что

$$T_2 = 2^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{6}} \operatorname{arctg} \left( 2^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right). \quad (11)$$

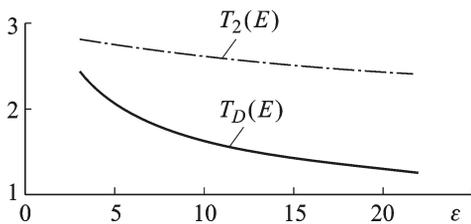
Область  $[x_R, 2]$  проходится за время

$$T_3 = \int_{x_R}^2 \frac{dx}{y_I(x)} = \varepsilon^{-1} \int_{x_R}^2 \frac{dx}{\frac{2}{3} + x - \frac{1}{3}x^3} = O(\varepsilon^{-1}).$$

Следовательно, эта область есть область быстрого движения (область “скачка”) и временем прохождения через нее можно пренебречь при расчете периода автоколебаний  $T$ :

$$T \approx 2(T_1 + T_2). \quad (12)$$

Сравним (8) и (12), полученные разными способами. Основные вклады, пропорциональные  $\varepsilon$ , в обоих выражениях одинаковы. Отличаются только асимптотически малые добавки. На рис. 3 показаны



**Рис. 3.** Асимптотически малые вклады в период автоколебаний, рассчитанные по методу Дородницына (8) и по формуле (11)

периоде  $0 \leq t \leq 0,5T$ . На полупериоде  $0,5T \leq t \leq T$  имеем  $t = \tau(x)$ , где функция  $\tau(x)$  — симметричное относительно точки  $(0, 0,5T)$  плоскости  $xt$  отображение функции  $f(x)$ . Последнее следует из свойства центральной симметрии цикла на фазовой плоскости. Чтобы получить зависимость  $t = f(x)$ , воспользуемся формулами (4), (5) и (6) на соответствующих им интервалах в пределах  $-2 \leq x \leq 2$ . Для  $-2 \leq x \leq x_L$

из (4) следует, что  $t = t_{III}(x) = \int_{-2}^x \frac{dx}{y_{III}(x)}$ . После интегрирования получим

$$t_{III}(x) = \varepsilon \left[ \ln \left( \frac{-x}{2} \right) - \frac{1}{2} (-x)^2 + \frac{1}{2} 2^2 \right]. \quad (13)$$

На интервале  $x_L \leq x \leq x_R$  аналогичным образом, используя  $y_{II}(x)$  из (5), получаем  $t = t_{II}(x)$ , где

$$t_{II}(x) = t_{III}(x_L) + \frac{1}{\sqrt{A y_{III}(x_L)}} \arctg \left[ \sqrt{\frac{A}{y_{III}(x_L)}} (x - x_L) \right]. \quad (14)$$

Для интервала  $x_R \leq x \leq 2$ , используя (6), получаем  $t = t_I(x)$ , где

$$t_I(x) = \frac{1}{9} \varepsilon^{-1} \left( \ln((-x+2)(-x_R+2)) + \frac{1}{(-x-1)^2} \left( -4x - \frac{x^2}{2} \right) + \left[ \frac{1}{(-x_R-1)^2} \left( -4x_R - \frac{x_R^2}{2} \right) \right] \right).$$

Очевидно,

$$f(x) = t_{III}(x) [\Phi(x+2) - \Phi(x-x_L)] + t_{II}(x) [\Phi(x-x_L) - \Phi(x-x_R)] + t_I(x) [\Phi(x-x_R) - \Phi(x-2)].$$

Здесь  $\Phi(x)$  — единичная функция Хевисайда. Графики  $t = f(x)$  и  $t = \tau(x)$  представлены на рис. 4

**Выводы.** Предложенное упрощенное аналитическое описание предельного цикла генератора Ван-дер-Поля позволяет качественно

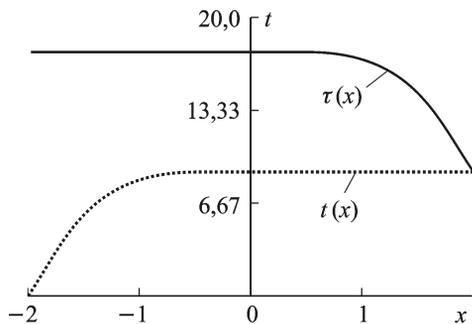
зависимости

$$T_D(\varepsilon) = \frac{T - 2\varepsilon \left( \frac{3}{2} - \ln 2 \right)}{2},$$

где  $T$  — из (8), и  $T_2(\varepsilon)$  — рассчитанная по формуле (11).

**Форма автоколебаний.** Временную зависимость автоколебаний можно получить в виде обратной функции  $t = f(x)$  на полу-

правильно представить временную зависимость автоколебаний в релаксационном режиме. Достаточно сравнить график, приведенный на рис. 4, с точными зависимостями, полученными с использованием аналоговых и цифровых ЭВМ [4]. В количественном отношении совпадение также вполне достаточно для тех приложений, в которых обычно допустимо использование модели



**Рис. 4. Временная зависимость автоколебаний в виде обратной функции  $t(x)$ ; параметр  $\varepsilon = 10$**

Ван-дер-Поля. То же справедливо и по отношению к расчету периода автоколебаний (см. формулы (9), (11), (12)), несмотря на некоторое количественное различие времен прохождения переходной области, рассчитанных упрощенным методом и по методу Дородницына (см. рис. 3). В то же время предложенная процедура значительно проще метода Дородницына и, что не менее важно, допускает обобщение в случае анализа аналогичных динамических систем более высокого порядка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. И. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. Дородницын А. А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля // Прикладная математика и механика. – 1947. – Т. XI. Вып. 3. – С. 313–328.
3. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. – М.: Гостехиздат, 1952. – 272 с.
4. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию нелинейных колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

Статья поступила в редакцию 17.09.2012

Владимир Федорович Судаков — д-р техн. наук, профессор кафедры “Теоретические основы электротехники” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 140 научных работ в области теории кольцевых лазеров, радиолокации и радионавигации.

V.F. Sudakov — D. Sc. (Eng.), professor of “Theoretical Bases of Electrical Engineering” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 140 publications in the field of theory of ring lasers, radar and radio navigation.