

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПЕРЕГРУЗОК ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЕГО СКОРОСТИ И УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

О.Н. Корсун
А.Ю. Королев
А.В. Стуловский

marmotto@rambler.ru
a.y.korolyov@yandex.ru
avstlv@gosniias.ru

ФАУ «ГосНИИАС», Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрено использование метода нелинейного программирования при решении задачи восстановления сигналов. Предполагается, что входной сигнал представлен в виде взвешенной суммы элементов заданного базиса, после чего коэффициенты разложения определены методами численной оптимизации из условия наилучшего соответствия выходам системы. Решена задача восстановления перегрузок летательного аппарата, для которого известны углы ориентации и проекции скорости в нормальной земной системе координат. Проведено сравнение полиномов Чебышева и эрмитовых кубических сплайнов в качестве базиса для представления сигналов, приведены их преимущества и недостатки при численном решении выбранной задачи. Применен модифицированный метод Ньютона для определения коэффициентов разложения. Оценено влияние различных видов погрешностей измерений на точность решения. Рассмотрены погрешности в оценках проекций скоростей, распределенные по нормальному закону, постоянные погрешности при определении скоростей и углов рыскания, граничных условий для перегрузок. Предлагаемый метод не подвержен влиянию постоянных погрешностей в проекциях скорости, а погрешности граничных условий перегрузок оказывают ограниченное влияние на точность решения, в основном сконцентрированное в начале и конце участка. Качество решения ухудшается при внесении случайных шумов в проекции скорости и постоянных погрешностей в угол рыскания, что

Ключевые слова

*Летательный аппарат,
восстановление сигналов,
нелинейное программирование,
эрмитовы сплайны,
полиномы Чебышева*

позволило сравнить выбранные способы аппроксимации сигналов. Численный эксперимент показал, что полиномы Чебышева в общем случае позволили добиться более точной аппроксимации сигнала, чем эрмитовы кубические сплайны, несмотря на меньшее число параметров

Поступила 24.01.2025

Принята 10.03.2025

© Автор(ы), 2025

Введение. Современный уровень развития авиационной техники предъявляет высокие требования к точности оценки ее параметров. Вместе с тем, не каждый летательный аппарат (ЛА) оснащен всеми желательными измерителями, что особенно критично для малоразмерных беспилотных аппаратов [1]. Записи, получаемые с помощью телеметрии, зачастую содержат в себе шумы различной природы и требуют коррекции и согласования между собой [2].

Для решения этой проблемы предлагается использовать комплексную обработку сигналов, которая привлекательна своей универсальностью, доступностью при современном уровне вычислительных мощностей и позволяет повысить точность определения фазовых координат ЛА на этапе послеполетной обработки при наличии шумов в измерениях [3].

В рамках предлагаемого метода можно поставить задачу восстановления сигналов. При этом предполагается, что некоторые сигналы, характеризующие объект, измеряются с очень большими погрешностями или вообще не измеряются. Поэтому рациональным оказывается восстановление сигналов по имеющимся измерениям других сигналов в рамках комплексной обработки. Возможны различные методы решения [4, 5] как основанные на знании математической модели системы [6, 7], так и без обращения к ней [8]. При решении анализируемой задачи восстановления сигналов перегрузок ЛА в связанной системе по измерениям скорости ранее использовали численное дифференцирование [9]. Показано, что требуется эмпирически подбирать длину скользящего окна под особенности конкретного обрабатываемого участка. Слишком малая длина окна приводит к разрывному виду сигнала и усугубляет влияние шумов, слишком большая длина — к потере значительного объема информации по краям участка. Кроме того, при высоких уровнях шумов применение численного дифференцирования дает неприемлемые погрешности.

Цель настоящей работы — получить искомые сигналы с помощью прямого метода теории оптимального управления [10] или в другой терминологии — путем решения задачи нелинейного программирования [11].

Общий подход. Сигналы восстанавливаются посредством метода, аналогичного прямому методу оптимального управления [10, 12, 13], т. е. частному случаю нелинейного программирования.

Рассматривается математическая модель объекта

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}, \vec{u}, t); \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (1)$$

где \vec{x} — вектор координат системы в фазовом пространстве; \vec{u} — вектор, который интерпретируется как допустимые управления; t — время; $\vec{x}(t_0)$ — значение вектора координат в начальный момент времени.

Для применения метода необходимо выбрать некоторый базис, задаваемый набором линейно независимых функций. Предполагается, что искомым сигналом можно с достаточной точностью заменить разложением в этом базисе:

$$u_j(t) \approx \hat{u}_j(t) = \sum_{i=1}^n c_{ij} \Phi_i(t),$$

где $u_j(t)$, $j = \overline{1, l}$ — j -я компонента сигнала управления \vec{u} ; $\Phi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ — набор базисных функций; $\vec{c}_j = (c_{1j}, \dots, c_{nj})^T$ — вектор, составленный из коэффициентов разложения для j -й компоненты сигнала управления.

Вектор управления \vec{u} в совокупности определяется вектором параметров $\vec{c} = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_l)$, составленным из коэффициентов разложения всех компонент управления. Для определения оценок \vec{c} необходимо решить соответствующую задачу нелинейного программирования — минимизировать целевой функционал по вектору параметров. Обычно в качестве целевого функционала выбирается некоторая квадратичная норма расхождений между измеренными значениями фазовых координат и выходами математической модели, зависящими от управления, например,

$$J(\vec{x}, \vec{u}(\vec{c})) = J(\vec{x}, \vec{\hat{x}}, \vec{u}(\vec{c})) = \int_{t_0}^T (\vec{x}(t) - \vec{\hat{x}}(\vec{c}, t))^T \mathbf{K} (\vec{x}(t) - \vec{\hat{x}}(\vec{c}, t)) dt, \quad (2)$$

где \vec{x} — вектор измеренных значений фазовых координат; $\vec{\hat{x}}$ — вектор выходных сигналов модели, зависящий от восстанавливаемых сигналов; \mathbf{K} — матрица весовых коэффициентов; t_0 , T — время начала и конца участка.

В результате из функций базиса $\Phi_i(t)$ формируется такой сигнал \vec{u} , который обеспечивает наилучшее совпадение выходов модели $\vec{\hat{x}}$ с измеренными значениями \vec{x} .

Необходимо отметить, что рассматриваемая задача восстановления сигналов с высокой точностью соответствует классической задаче теории оптимального управления, например, задаче Лагранжа. Роль управлений при этом выполняют восстанавливаемые сигналы, подаваемые на вход модели (1), а вместо желаемого выходного сигнала в целевой функционал (2) входят измеренные значения фазовых координат. Математическая модель объекта (1) оказывает регуляризирующее влияние, вследствие чего решение оказывается устойчивым к воздействию погрешностей эксперимента.

Рассмотрим конкретную постановку задачи. Предположим, что на исследуемом промежутке времени известны измерения углов ориентации ЛА и трех проекций его скорости на оси нормальной земной системы координат. Измерения могут содержать случайные погрешности, которые считаем независимыми для различных сигналов и для одного и того же сигнала в разные моменты времени.

В настоящей работе рассмотрены два варианта базисных функций: эрмитовы кубические сплайны [14] и полиномы Чебышева [15].

Целевой функционал (2) определен через рассогласования между известными оценками проекций скоростей и выходами модели по восстановленным сигналам перегрузок. Решение можно получить, воспользовавшись оптимизационным алгоритмом [15, 16].

Математическая модель. В этой задаче рассматривается достаточно простая математическая модель движения ЛА [17], которая выражает ускорения в связанной системе координат через перегрузки:

$$\begin{aligned} a_x &= g(n_x - \sin \vartheta); \\ a_y &= g(n_y - \cos \vartheta \cos \gamma); \\ a_z &= g(n_z + \cos \vartheta \sin \gamma), \end{aligned} \quad (3)$$

где n_x , n_y , n_z — проекции перегрузок на оси связанной системы координат; ϑ , γ — углы тангажа и крена.

Оценим с помощью выражений (3) ускорения и спроецируем их на оси нормальной системы координат, используя матрицы направляющих косинусов [17, 18]:

$$\begin{pmatrix} a_{xg} \\ a_{yg} \\ a_{zg} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \gamma \sin \psi - \sin \vartheta \cos \gamma \cos \psi & \cos \gamma \sin \psi + \sin \vartheta \sin \gamma \cos \psi \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \sin \gamma \cos \psi + \sin \vartheta \cos \gamma \sin \psi & \cos \gamma \cos \psi - \sin \vartheta \sin \gamma \sin \psi \end{pmatrix}$$

(ψ — угол рыскания).

Далее остается проинтегрировать ускорения, записанные в нормальной земной системе координат, чтобы получить проекции вектора скорости на оси нормальной системы координат:

$$\begin{aligned} V_{xg}(t) &= V_{xg}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{xg}(\tau) d\tau; \\ V_{yg}(t) &= V_{yg}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{yg}(\tau) d\tau; \\ V_{zg}(t) &= V_{zg}(t_0) + \int_{t_0}^t a_{zg}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Параметризация сигналов. Прямые методы оптимального управления требуют предварительной параметризации искомым сигналов. Учитывая предыдущий опыт работы авторов над решением задач сплайн-аппроксимации [13], для этих целей использованы эрмитовы кубические сплайны. Для большей общности полученных результатов рассматривался также поиск решения в пространстве полиномов Чебышева.

В качестве моделей характеристик сигналов перегрузок использовались многочлены третьей степени и выше. В частности, выбраны эрмитовы кубические сплайны, которые являются сплайнами дефекта 2. Их особенность заключается в разрывности вторых производных. Это расширяет набор доступных сигналов, хотя и увеличивает число параметров, поскольку в узлах сплайна приходится задавать значение функции вместе с ее первой производной. Более полное описание эрмитовых кубических сплайнов дано в [14], пример их применения для задачи восстановления сигналов описан в [19], поэтому приведем только краткое пояснение.

На рассматриваемом интервале $t \in [t_0, T]$ выбираются M узлов сплайна в моменты времени $t_j, j = 1, 2, \dots, M$. Тогда в произвольный момент времени t из интервала $[t_i, t_{i+1}]$ значение сплайна определяется по формуле

$$S(t) = \varphi_1(y)f_i + \varphi_2(y)f_{i+1} + \varphi_3(y)h_i f_i' + \varphi_4(y)h_i f_{i+1}',$$

где f_i, f_i' — значение функции и ее производной в i -м узле;

$$\varphi_1(y) = (1-y)^2(1+2y); \quad \varphi_2(y) = y^2(3-2y);$$

$$\varphi_3(y) = y(1-y)^2; \quad \varphi_4(y) = -y^2(1-y);$$

$$h_i = t_{i+1} - t_i; \quad y = (t - t_i) / h_i.$$

В противоположность эрмитовым сплайнам полиномы Чебышева являются не только линейной независимой системой, но и имеют свойство ортогональности.

Еще одна особенность полиномов Чебышева заключается в том, что они обеспечивают минимум максимальной погрешности аппроксимации, которая равномерно распределена по оцениваемому интервалу [15]. При их применении необходимо помнить, что аппроксимируемая функция должна быть задана на интервале $[-1, 1]$. Поэтому для t , принадлежащего произвольному интервалу $[t_0, T]$, требуется перейти к новой переменной τ , определенной на интервале $[-1, 1]$, с помощью линейного преобразования:

$$\tau = \frac{2t - t_0 - T}{T - t_0}.$$

Полиномы Чебышева (первого рода) определяются следующим образом:

$$P_k(\tau) = \cos(k \arccos \tau) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Первые два полинома Чебышева $P_0(\tau) = 1, P_1(\tau) = \tau$ легко получить простой подстановкой. Для определения остальных используется тригонометрическая формула $\cos k\eta = 2 \cos \eta \cos(k-1)\eta - \cos(k-2)\eta$. Поэтому рекуррентное соотношение для полиномов Чебышева имеет вид

$$P_k(\tau) = 2\tau P_{k-1}(\tau) - P_{k-2}(\tau) \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Описание экспериментов. В рамках математического эксперимента предполагалось определить перегрузки в связанной системе координат, когда известны углы ориентации ЛА и его скорости в нормальной земной системе координат.

Для эксперимента выбирались входные сигналы, соответствующие участку полета современного ЛА. Сигналы задавались с помощью полиномов Чебышева шестой степени (рис. 1).

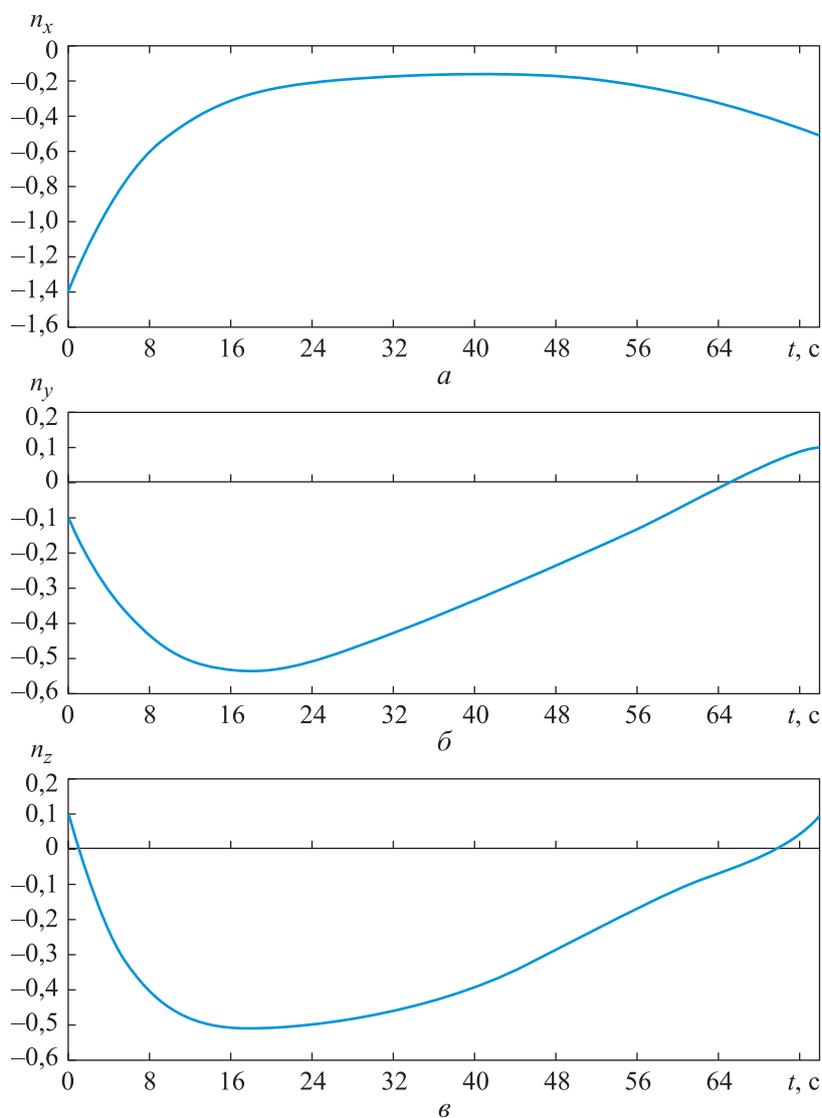


Рис. 1. Сигналы перегрузок n_x (а), n_y (б), n_z (в), заданные в эксперименте

На их основе вычислены проекции скорости в нормальной земной системе координат по формулам (3)–(5). Решение задачи состояло в восстановлении входных сигналов, от которых требовалось обеспечить минимум целевого функционала, являющегося частным случаем функционала (2), в котором число восстанавливаемых сигналов $l = 3$, а в качестве матрицы весов выбрана единичная матрица

$$F = \sum_{i=0}^N \left(\vec{V}_g(t_i) - \vec{V}(t_i) \right)^T \left(\vec{V}_g(t_i) - \vec{V}(t_i) \right),$$

где $\vec{V}_g = V_{gx}V_{gy}V_{gz}$ — известный вектор скорости в нормальной земной системе координат; \hat{V} — оценка вектора скорости; N — число отсчетов на интервале.

Оценки значений параметров проводились с помощью модифицированного метода Ньютона, более подробное описание приведено в [20, 21]. Несмотря на то, что метод Ньютона имеет только локальную сходимость, на практике зачастую удается получить решение даже при относительных погрешностях начальных оценок параметров порядка 50...70 % [3, 13].

Для незашумленных сигналов задача решается с хорошей точностью. Восстановленные значения скоростей визуально неотличимы от заданных. Среднеквадратическое отклонение (СКО) рассогласований по перегрузкам составляет не более 1,5 % сигнала для полинома Чебышева седьмой степени и эрмитова кубического сплайна, заданного в пяти равномерно расположенных узлах.

В связи с этим дальнейшая работа сосредоточена на исследовании влияния различных погрешностей на решение. Рассматривались несколько видов погрешностей:

- нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и СКО = 1 м/с, добавленная к каждой проекции скорости; предполагалось, что значения случайной величины в различные моменты времени являются независимыми;
- постоянные аддитивные погрешности в проекциях скорости;
- постоянная аддитивная погрешность в угле рыскания;
- погрешность начальных условий по перегрузкам.

Преимуществом метода является то, что он не требует предварительной информации о виде перегрузки, что особенно важно, когда сигнал содержит большие погрешности. Это может произойти, например, при слишком малой разрешающей способности цифрового регистратора вследствие ограничения разрядной сетки, которая приводит к погрешностям дискретизации, подобным той, которая показана на рис. 2.

Результаты. Результаты восстановления перегрузок при наличии нормальных погрешностей в проекциях скорости и без них приведены в табл. 1.

Согласно данным табл. 1, полином Чебышева приближает перегрузки при использовании скоростей без шумов с заметно большей точностью, что и неудивительно, учитывая, что сигнал задавался с помощью полинома данного типа. Для него погрешности составляют менее сотых процента, в то время как для эрмитова сплайна — примерно десятые доли, достигая 1,5 % для поперечной перегрузки.

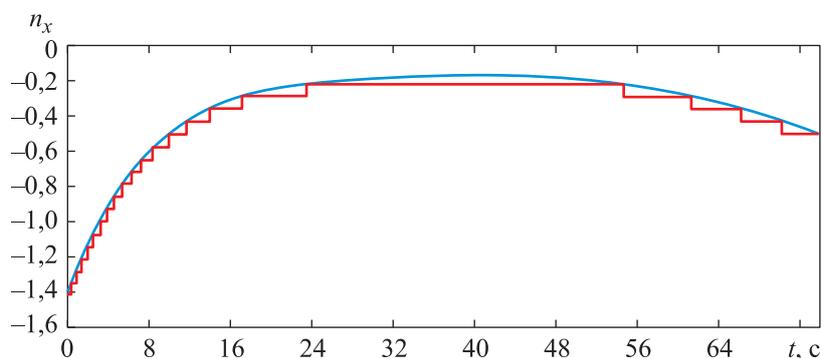


Рис. 2. Погрешности дискретизации (на известный сигнал продольной перегрузки (синяя кривая) наложено дискретное представление (красная ломаная))

Таблица 1

Результаты восстановления перегрузок при наличии нормальных погрешностей в проекциях скорости

Модель восстанавливаемого сигнала	Доля n_x в СКО сигнала, %		Доля n_y в СКО сигнала, %		Доля n_z в СКО сигнала, %	
	без шума	с шумом	без шума	с шумом	без шума	с шумом
Полином Чебышева седьмой степени	10^{-4}	0,07	$2 \cdot 10^{-5}$	3,4	$4 \cdot 10^{-4}$	1,8
Эрмитов кубический сплайн (пять узлов)	0,7	0,8	0,3	3,7	1,5	2,8

При добавлении к скоростям шумов обе модели демонстрируют сходный результат. Для нормальной и поперечной перегрузок точности оценок полиномов Чебышева и эрмитовых сплайнов становятся сопоставимы, хотя несколько меньше для полинома. Полином Чебышева достаточно точно восстанавливает продольную перегрузку (ее доля в СКО исходного сигнала не более 0,1 %), тогда как сплайну это удастся явно хуже (0,8 %).

Выявлено, что добавление постоянных погрешностей к проекциям скорости не влияет на точность восстановления сигнала. В этом случае справедливы результаты, приведенные в табл. 1 для случая отсутствия шумов. Объяснение состоит в том, что фактически искомые перегрузки зависят от производных скоростей, поэтому добавление к скоростям констант никак на них не влияет.

Постоянные погрешности в угле рыскания заметно влияют на оценки перегрузок. Результаты эксперимента по добавлению постоянных погрешностей в углы рыскания приведены в табл. 2.

Результаты эксперимента по добавлению постоянных погрешностей в угол рыскания

Модель восстанавливаемого сигнала	Доля n_x в СКО сигнала, %			Доля n_y в СКО сигнала, %			Доля n_z в СКО сигнала, %		
	Погрешность в угле рыскания, град								
	0,5	1	2	0,5	1	2	0,5	1	2
Полином Чебышева седьмой степени	0,1	0,2	0,4	0,5	1	2,2	0,6	1,1	2,3
Эрмитов кубический сплайн (пять узлов)	0,8	0,7	0,9	0,7	1,2	2,4	1,4	2,3	2,4

Полином Чебышева обеспечивает более качественную аппроксимацию перегрузок, но с ростом погрешности он выравнивается с эрмитовым кубическим сплайном. Отличие наблюдается лишь в продольной перегрузке, которая, как и в случае нормально распределенной погрешности, даже при росте погрешности лучше приближается полиномом.

Отметим, что заметные погрешности в восстановленном сигнале наблюдаются уже при погрешностях в угле рыскания порядка градуса, тогда как этот угол сложно определить в точности. Другое наблюдение заключается в том, что погрешности восстановления перегрузок с помощью полинома Чебышева демонстрируют линейную зависимость от погрешности в угле рыскания. Это, скорее всего, связано с особенностями проведения математического эксперимента, например, использованием полиномов Чебышева для изначального вычисления скоростей.

В рассмотренных случаях граничные значения перегрузок задавались точно. Теперь предположим, что начальные и конечные значения сигналов перегрузок неизвестны. Найти их можно, вводя дополнительные параметры. В этом эксперименте использовался исключительно полином Чебышева седьмой степени, а проекции скорости содержали нормальные шумы аналогично первому эксперименту. Полученные результаты приведены в табл. 3.

Видно, что при отсутствии информации о граничных значениях перегрузок погрешность восстановленного сигнала заметно возрастает (более чем в 1,5 раза). Как и следовало ожидать, расхождения особенно заметны в начале и конце участка (рис. 3).

Результаты восстановления перегрузок при нормальных погрешностях в скоростях в зависимости от граничных значений перегрузок

Схема эксперимента	Доля n_x в СКО сигнала, %	Доля n_y в СКО сигнала, %	Доля n_z в СКО сигнала, %
Заданные $\vec{n}(t_0)$ и $\vec{n}(t_N)$	0,07	3,4	1,8
Свободные концы участка	0,2	5,8	2,8
Заданные $\vec{V}(t_0)$	0,2	0,7	0,5

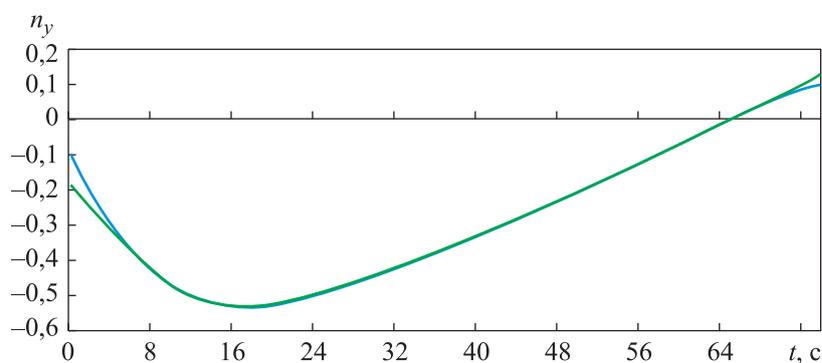


Рис. 3. Погрешность восстановленного сигнала (сигнал нормальной перегрузки (синяя кривая) наложен на перегрузку, восстановленную при неизвестных граничных значениях (зеленая кривая))

Эффект неизвестных граничных значений перегрузок можно ослабить, если хорошо известны начальные значения скоростей. Из табл. 3 следует, что благодаря этому погрешности определения перегрузок n_y и n_z уменьшаются даже по сравнению с исходным вариантом эксперимента.

Заключение. Рассмотрено восстановление сигналов перегрузок при известных значениях углов ориентации и проекций скорости ЛА в нормальной земной системе координат. Для этого использован прямой метод оптимального управления: искомый сигнал раскладывается по выбранному базису, а задача сводится к задаче нелинейного программирования по определению коэффициентов разложения, для чего применяются методы численной оптимизации.

Показано, что метод нечувствителен к постоянным погрешностям в проекциях скорости. При наличии же в них случайного шума или погрешностей в значениях углов результат ухудшается. Наличие погреш-

ностей в граничных значениях перегрузок влияет на точность их восстановления, особенно явно в начале и конце участка.

В процессе проведенных экспериментов полиномы Чебышева обеспечивали более точные оценки, чем эрмитовы сплайны, несмотря на меньшее число параметров (18 для полинома 7 степени против 24 для сплайна с пятью узлами). При наличии возмущений в сигнале нельзя добиться неограниченного улучшения качества восстановления, однако при уровне шумов, соответствующем летному эксперименту, точность восстановления сигналов является достаточно хорошей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Биард Р.У., МакЛэйн Т.У. Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика. М., Техносфера, 2015.
- [2] Gregory J.W., Liu T. Introduction to flight testing. Hoboken, John Wiley & Sons, 2021.
- [3] Корсун О.Н., Поплавский Б.К. Оценивания систематических погрешностей бортовых измерений углов атаки и скольжения на основе интеграции данных спутниковой навигационной системы и идентификации скорости ветра. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2011, № 1, с. 133–146. EDN: NDIYGF
- [4] Murray-Smith D.J. A review of inverse simulation methods and their application. *Int. J. Model. Simul.*, 2014, vol. 34, no. 3, pp. 120–125.
DOI: <http://dx.doi.org/10.2316/Journal.205.2014.3.205-5906>
- [5] Козырев Г.И., Юдицких Е.О. Восстановление входных сигналов динамических измерительных систем с помощью цифровой обратной фильтрации. *Измерительная техника*, 2023, № 5, с. 10–16.
DOI: <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2023-5-10-16>
- [6] Самойленко М.В. Восстановление сигнала на входе фильтра по выходному сигналу и импульсной характеристике. *DSPA: вопросы применения цифровой обработки сигналов*, 2017, № 2, с. 194–198. EDN: ZCGOGT
- [7] Кривулин Н.П. Восстановление входных сигналов нестационарных динамических систем. *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2018, № 3, с. 64–78.
DOI: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2018-3-6>
- [8] Новиков-Бородин А.В. Реконструкция и моделирование экспериментальных данных с использованием тестовых измерений. *Приборы и техника эксперимента*, 2022, № 2, с. 43–51. EDN: FGULLO
- [9] Корсун О.Н., Мотлич П.А., Медведков А.Н. Метод восстановления перегрузки летательного аппарата по значениям скорости, определяемым с помощью навигационной системы. *Полет*, 2021, № 11, с. 3–11. EDN: LUTGQN

- [10] Conway B.A. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 2012, vol. 152, no. 2, pp. 271–306. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-011-9918-z>
- [11] Luenberger D.G., Ye Y. Linear and nonlinear programming. Cham, Springer International, 2021.
- [12] Rao A.V. Survey of numerical methods for optimal control. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2010, vol. 135, pp. 497–528.
- [13] Корсун О.Н., Стуловский А.В. Прямой метод формирования оптимального программного управления летательным аппаратом. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2019, № 2, с. 75–89. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0002338819020112>
- [14] Квасов Б.И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами. М., ФИЗМАТЛИТ, 2006.
- [15] Corriou J.P. Numerical methods and optimization. Cham, Springer Nature, 2021.
- [16] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М., URSS, 2014.
- [17] Бюшгенс Г.С. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. М., ФИЗМАТЛИТ, 1998.
- [18] Stengel R.F. Flight dynamics. Princeton, Princeton University Press, 2004.
- [19] Корсун О.Н., Стуловский А.В. Восстановление параметров движения летательного аппарата с использованием алгоритмов оптимального управления. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2023, № 1, с. 44–55. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002338823010055>
- [20] Klein V., Morelli E.A. Aircraft system identification. Theory and practice. Reston, AIAA, 2006.
- [21] Gupta R.K. Numerical methods. Fundamentals and applications. Cambridge, Cambridge University Press, 2019.

Корсун Олег Николаевич — д-р техн. наук, профессор, начальник научно-образовательного центра ФАУ «ГосНИИАС» (Российская Федерация, 125167, Москва, ул. Викторенко, д. 7).

Королев Алексей Юрьевич — аспирант, ФАУ «ГосНИИАС» (Российская Федерация, 125167, Москва, ул. Викторенко, д. 7).

Стуловский Александр Викторович — канд. техн. наук, инженер 1-й категории ФАУ «ГосНИИАС» (Российская Федерация, 125167, Москва, ул. Викторенко, д. 7).

Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Корсун О.Н., Королев А.Ю., Стуловский А.В. Восстановление перегрузок летательного аппарата по измерениям его скорости и углов ориентации методом нелинейного программирования. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2025, № 3 (152), с. 105–120. EDN: NSQNYJ

AIRCRAFT OVERLOADS RESTORATION BY MEASURING ITS VELOCITY AND ORIENTATION ANGLES BASED ON THE NONLINEAR PROGRAMMING METHOD

O.N. Korsun

A.Yu. Korolev

A.V. Stulovskiy

marmotto@rambler.ru

a.y.korolyov@yandex.ru

avstlv@gosniias.ru

State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers application of the nonlinear programming method in solving the signal restoration problem. It assumes that the input signal could be represented as a weighted sum of elements of the given basis, after that the expansion coefficients are determined by the numerical optimization methods from the condition of the best fit to the system outputs. The problem of restoring overloads of an aircraft is solved, when the orientation angles and velocity projections in the normal coordinate system are known. Chebyshev polynomials and Hermite splines are compared as the basis for signals representation. The paper lists advantages and disadvantages of both the approaches to numerical solution of the selected problem. A modified Newton method is applied to determine the expansion coefficients. It assesses the influence of various types of measurement errors on the solution accuracy. Errors in assessing velocity projections distributed according to the normal law, constant errors in the velocities and yaw angles, as well as in the overloads boundary conditions are considered. The proposed method is not affected by constant errors in the velocity projections, and errors in the overloads boundary conditions provide a limited effect on the solution accuracy concentrated mainly at the beginning and end of the section. The solution quality deteriorates when introducing random noise into the velocity projections and constant errors into the yaw angle making it possible to compare selected methods of the signal approximation. The numerical experiment showed that the Chebyshev polynomials in the general case allow achieving a more accurate signal approximation than the cubic splines, despite the smaller number of parameters

Keywords

Aircraft, signal restoration, non-linear programming, Hermite splines, Chebyshev polynomials

Received 24.01.2025

Accepted 10.03.2025

© Author(s), 2025

REFERENCES

- [1] Beard R.W., McLain T.W. Small unmanned aircraft. Theory and practice. Princeton, Princeton University Press, 2012.
- [2] Gregory J.W., Liu T. Introduction to flight testing. Hoboken, John Wiley & Sons, 2021.
- [3] Korsun O.N., Poplavskiy B.K. Estimation of systematic errors of onboard measurement of angle of attack and sliding angle based on integration of data of satellite navigation system and identification of wind velocity. *J. Comput. Syst. Sc. Int.*, 2011, vol. 50, no. 1, pp. 130–143. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230711010126>
- [4] Murray-Smith D.J. A review of inverse simulation methods and their application. *Int. J. Model. Simul.*, 2014, vol. 34, no. 3, pp. 120–125. DOI: <http://dx.doi.org/10.2316/Journal.205.2014.3.205-5906>
- [5] Kozyrev G.I., Yuditskikh E.O. Restoration of input signals of dynamic measuring systems using digital reverse filtering. *Izmeritelnaya tekhnika*, 2023, no. 5, pp. 10–16 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2023-5-10-16>
- [6] Samoylenko M.V. Restoration of filter input signal by the output signal and pulse response. *DSPA: voprosy primeneniya tsifrovoy obrabotki signalov*, 2017, no. 2, pp. 194–198 (in Russ.). EDN: ZCGOGT
- [7] Krivulin N.P. Recovering input signals of non stationary dynamical systems. *Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences], 2018, no. 3, pp. 64–78 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2018-3-6>
- [8] Novikov-Borodin A.V. Reconstruction and simulation of experimental data using test measurements. *Instrum. Exp. Tech.*, 2022, vol. 65, no. 2, pp. 238–245. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0020441222020166>
- [9] Korsun O.N., Motlich P.A., Medvedkov A.N. Method for reconstructing aircraft overload projections from speed measurements made by the navigation system. *Polet [Flight]*, 2021, no. 11, pp. 3–11 (in Russ.). EDN: LUTGQN
- [10] Conway B.A. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 2012, vol. 152, no. 2, pp. 271–306. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10957-011-9918-z>
- [11] Luenberger D.G., Ye Y. Linear and nonlinear programming. Cham, Springer International, 2021.
- [12] Rao A.V. Survey of numerical methods for optimal control. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2010, vol. 135, pp. 497–528.
- [13] Korsun O.N., Stulovskiy A.V. Direct method for forming the optimal open loop control of aerial vehicles. *J. Comput. Syst. Sc. Int.*, 2019, vol. 58, no. 2, pp. 229–243. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230719020114>
- [14] Kvasov B.I. Metody izogeometricheskoy approksimatsii splaynami [Methods of isogeometric spline approximation]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2006.

- [15] Corriou J.P. Numerical methods and optimization. Cham, Springer Nature, 2021.
- [16] Polyak B.T. Vvedenie v optimizatsiyu [Introduction to optimization]. Moscow, URSS Publ., 2014.
- [17] Byushgens G.S. Aerodinamika, ustoychivost i upravlyaemost sverkhzvukovykh samoletov [Aerodynamics, stability and controllability of supersonic aircrafts]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 1998.
- [18] Stengel R.F. Flight dynamics. Princeton, Princeton University Press, 2004.
- [19] Korsun O.N., Stulovskiy A.V. Recovery of aircraft motion parameters using the optimal control algorithms. *J. Comput. Syst. Sc. Int.*, 2023, vol. 62, no. 1, pp. 61–72.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230723010057>
- [20] Klein V., Morelli E.A. Aircraft system identification. Theory and practice. Reston, AIAA, 2006.
- [21] Gupta R.K. Numerical methods. Fundamentals and applications. Cambridge, Cambridge University Press, 2019.

Korsun O.N. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Scientific and Educational Center, State Research Institute of Aviation Systems (Viktorenko ul. 7, Moscow, 125319 Russian Federation).

Korolev A.Yu. — Post-Graduate Student, State Research Institute of Aviation Systems (Viktorenko ul. 7, Moscow, 125319 Russian Federation).

Stulovskiy A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Engineer of the 1st category, State Research Institute of Aviation Systems (Viktorenko ul. 7, Moscow, 125319 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Korsun O.N., Korolev A.Yu., Stulovskiy A.V. Aircraft overloads restoration by measuring its velocity and orientation angles based on the nonlinear programming method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2025, no. 3 (152), pp. 105–120 (in Russ.). EDN: NSQNYJ