

## ПРИМЕНЕНИЕ ГНОМОНИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТА ПОЛЕТА И ОБРАБОТКИ МАТРИЦЫ ВЫСОТ РЕЛЬЕФА В БОРТОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЯХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Л.Д. Пучков

puchkov\_ld@gosniias.ru

Д.А. Зеркаленков

dazerkalenkov@gosniias.ru

ФАУ «ГосНИИАС», Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Предложен подход, позволяющий учитывать сферичность Земли при решении задач оптимизации маршрута полета летательного аппарата и обработки матрицы высот рельефа, используя исходную информацию на гномонической проекции. Применение основного свойства гномонической проекции — представление ортодромий в виде прямых — позволяет использовать общепринятые алгоритмы и подходы при оптимизации маршрутов и решать данные задачи в условиях ограниченных вычислительных возможностей на бортовых вычислителях летательных аппаратов, например, с использованием методов теории графов, широко применяемых при решении аналогичных задач на плоскости. Необходимость учета сферичности Земли в алгоритмах оптимизации маршрута вызвана особенностями траекторного управления летательным аппаратом (а именно, движением вдоль ортодромии) между поворотными пунктами маршрута. Приведены алгоритмы и зависимости, позволяющие обрабатывать исходную информацию, в том числе матрицы высот рельефа, на гномонической проекции: формулы для решения прямой и обратной геодезической задачи, упрощенная, с точки зрения вычислительных ресурсов, зависимость для определения расстояния между двумя точками на проекции, решения для выборки ячеек, принадлежащих заданному полигону или окружности. Для демонстрации применения полученных зависимостей при решении практической задачи определения кратчайшего пути между двумя точка-

### Ключевые слова

*Оптимизация маршрута, обход запретных зон, обработка матрицы высот рельефа, гномоническая проекция, ортодромия*

ми на земной поверхности с обходом запретных зон, образованных путем анализа матрицы высот рельефа в рассматриваемой области, рассмотрен пример ее решения с помощью методов теории графов (алгоритма Дейкстры)

Поступила 02.10.2024  
Принята 16.01.2025  
© Автор(ы), 2025

---

**Введение.** Решение задачи оптимизации маршрута полета летательных аппаратов (ЛА) можно разбить на несколько подзадач, одной из которых является выбор способа представления рабочей области и вывод необходимых зависимостей для решения сопутствующих оптимизации маршрута задач на сфере. Например, при использовании методов дискретной математики для поиска кратчайшего маршрута, широко применяемых на практике, существует необходимость предварительной обработки полигонов запретных зон (препятствий), множественного определения полигонов видимости и решения задачи определения расстояния между точками [1–3] (в практически значимых задачах — обратной геодезической задачи). На практике это приводит к необходимости многократного решения прямой и обратной геодезических задач и определения пересечения ортодромий, обработки матрицы высот рельефа и др. Решение данных задач в бортовых вычислителях ЛА затруднительно в связи с ограниченностью вычислительных ресурсов и требует существенных временных затрат. В настоящей работе с использованием аналитического метода и математической картографии рассмотрен подход использования гномонической проекции в рамках решения задач, связанных с оптимизацией маршрута полета, а также предложены алгоритмы и упрощения, позволяющие решать такие задачи на бортовых вычислителях ЛА.

В настоящее время применение гномонической проекции для решения прикладных задач оптимизации маршрутов в бортовых вычислителях ЛА в отечественной и зарубежной литературе недостаточно освещено. Предлагаемый алгоритм поиска маршрутов в [4] сравнивается с гипотетическим поиском пути на гномонической проекции.

**Методы теории графов как один из способов оптимизации маршрута на плоскости.** Задача оптимизации маршрута полета ЛА с учетом опасных и запретных зон на сегодняшний день является актуальной, о чем свидетельствует наличие множества патентов [5–8] и научных работ [1, 2, 9, 10]. Варианты решения данной задачи различаются в зависимости от доступных вычислительных мощностей и требуемой степени оптимальности решения. Широко применяются методы теории графов, как правило, используются алгоритмы поиска кратчайшего пути, например, алгоритмы

Дейкстры или  $A^*$ . Решение задачи оптимизации маршрута можно разбить на несколько подзадач:

- выбор способа представления рабочей области в виде графа;
- вывод необходимых зависимостей для определения матрицы смежности;
- вывод необходимых зависимостей для определения матрицы весов;
- использование выбранного алгоритма для определения оптимального маршрута.

В простейшем случае рабочая область представляется в виде равномерной ортогональной сетки, ячейки которой являются вершинами графа, при этом каждая вершина графа может быть связана только с ближайшими ячейками. Однако такое представление дает грубое решение и на практике применяется редко. Некоторые другие варианты разбиения рабочей области в виде графа приведены в [3, 11, 12].

Существуют и более сложные варианты представления рабочей области в виде графа. Например, рассматривая в виде вершин графа участки между точками на рабочей области, можно учесть ограничения на максимальный допустимый угол изменения направления движения. Такой вариант представления рабочей области существенно увеличит размер графа.

Некоторые варианты представления рабочей области в виде графа допускают связь между любыми его вершинами. В этом случае определение матрицы смежности и матрицы весов представляется трудной вычислительной задачей. Например, для формирования матрицы смежности требуется определить факт пересечения элементарного участка маршрута между парами вершин графа с границами опасных и запретных зон. Для снижения сложности задачи определения матрицы смежности на плоскости придуманы алгоритмы [13–15], позволяющие определить полигон видимости (и, как следствие, смежные вершины графа для рассматриваемой вершины) за меньшее время.

Решение задачи оптимизации маршрутов на сфере является более сложным с вычислительной точки зрения, так как алгоритмов [13–15], упрощающих задачу определения матрицы смежности для сферического представления Земли не существует. В связи с этим для сферического представления Земли при определении матрицы смежности необходимо явно выявить факт пересечения множества ортодромий, образованных вершинами графа, и множества ортодромий, образованных границами опасных и запретных зон. Определение матрицы весов может оказаться также достаточно трудной (с вычислительной точки зрения) задачей, в зависимости

от размера графа. Решение таких задач в бортовых вычислителях ЛА затруднительно в связи с ограниченностью вычислительных ресурсов и требует существенных временных затрат.

Перевод рабочей области на гномоническую проекцию позволяет рассматривать кратчайшие участки маршрута на сфере (т. е. ортодромии) прямыми. Это позволяет существенно упростить задачу определения матрицы смежности.

Отметим, что настоящая работа не отвечает на вопрос «как именно применять теорию графов и осуществлять представление рабочей области в виде графа», так как ответ на данный вопрос зависит от конкретной решаемой задачи и принятых в ней упрощений, допущений и ограничений. Тем не менее показана полезность работы с гномонической проекцией при оптимизации маршрутов методами теории графов.

**Постановка задачи.** Необходимо получить зависимости или алгоритмы, позволяющие решать на гномонической проекции следующие задачи, связанные с оптимизацией маршрутов полета ЛА:

- определение полигона видимости и факта пересечений маршрута полета ЛА с запретными и опасными зонами;
- определение угла между ортодромиями, решение прямой и обратной геодезических задач;
- обработка информации, приведенной в виде регулярной сетки на гномонической проекции.

Для решения задач приняты следующие упрощения:

- все задачи решаются на сфере; для учета разного радиуса Земли в первом приближении предлагается при решении прикладных задач (например, определение расстояния между двумя точками) использовать усредненный радиус точек интереса;
- препятствия (запретные и опасные зоны) имеют вид выпуклых полигонов, границы которых являются ортодромиями;
- матрица высот рельефа представляется в гномонической проекции или ее преобразование в гномоническую проекцию допустимо;
- элементарным участком маршрута полета является ортодромия;
- точность числа IEEE 754 (двойной точности) достаточна для хранения координат.

Принятые упрощения являются существенными при решении высокоточных задач на поверхности Земли. В рамках решения прикладных задач оптимизации маршрутов допустимы упрощения. В настоящее время навигация значительного числа ЛА по маршруту выполняется по формулам

сферической тригонометрии [16]. Любое препятствие можно представить в виде одного или нескольких выпуклых полигонов, границы которых являются ортодромиями (можно разбить границы зон на несколько участков, где допустимо принять их ортодромиями).

**Пересчет координат в гномоническую проекцию.** Основные соотношения гномонической проекции и ограничения приведены в [17]. Формулы пересчета геоцентрических координат в координаты на гномонической проекции имеют вид

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos c} \\ \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)}{\cos c} \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$\cos c = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0),$$

где  $c$  — угловое расстояние от точки с координатами  $\mathbf{G}$  до центра проекции;  $\varphi, \lambda$  — геоцентрические координаты искомой точки;  $\varphi_0, \lambda_0$  — геоцентрические координаты центра проекции.

Обратный пересчет координат имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{asin} \left( \cos c \sin \varphi_0 + \frac{G_2 \sin c \cos \varphi_0}{\rho} \right); \\ \lambda &= \lambda_0 + \operatorname{atan} \left( \frac{G_1 \sin c}{\rho \cos \varphi_0 \cos c - G_2 \sin \varphi_0 \sin c} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c = \operatorname{atan} \rho$ ;  $\rho = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}$ ;  $G_1, G_2$  — элементы вектора  $\mathbf{G}$ .

В связи с тем, что решение задач происходит на сфере, допустимо осуществлять поворот осей в декартовой системе координат так, чтобы минимизировать вычислительную сложность требуемых расчетов. В этом случае координаты имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{GX} &= \mathbf{MG}; \\ \mathbf{G} &= \mathbf{M}'\mathbf{GX}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{GX}$  — координаты в повернутой гномонической проекции;  $\mathbf{G}$  — координаты в гномонической проекции, оси которой направлены по сторонам света (далее гномоническая проекция);  $\mathbf{M}'$  — матрица направляющих косинусов пересчета координат из гномонической проекции в повернутую гномоническую проекцию.

**Особенности определения полигона видимости и факта пересечений маршрута полета ЛА с запретными и опасными зонами.** В рамках оптимизации маршрута полета ЛА часто требуется определить факт пересечения

участка маршрута с запретными и опасными зонами либо построить полигон видимости, характеризующий области, достигаемость которых возможна из какой-либо точки без пересечения с запретными зонами. Применительно к методам теории графов данная задача решается при определении матрицы смежности. Способы решения данной задачи на плоскости известны, их вычислительная сложность описана в [13–15]. Чтобы иметь возможность их применить, необходимо рассматривать ортодромию (элементарный участок маршрута) в виде прямой линии. Использование гномонической проекции позволяет реализовать данное требование и применять стандартизированные алгоритмы.

Без гномонической проекции вычислительная сложность алгоритмов определения матрицы смежности при использовании «наивного» алгоритма (явная проверка пересечений ортодромий, образованных вершинами графа, с запретными и опасными зонами) составляет  $O(n)^3$  (где  $n$  — число вершин графа). Вычислительная сложность определяется исходя из необходимости расчета полигона видимости по наивному алгоритму для каждой вершины графа. При использовании гномонической проекции за счет других алгоритмов, например [13–15], вычислительную сложность можно снизить до значений порядка  $O(n^2 \lg n)$ . При этом даже в случае явной проверки пересечений ортодромий (образованных вершинами графа) с запретными и опасными зонами вычисления будут проводиться быстрее на гномонической проекции, в связи с простотой алгоритма проверки пересечения двух отрезков на плоскости по сравнению с алгоритмом проверки пересечения двух ортодромий на сфере. Для проверки пересечения двух отрезков на плоскости (без учета особых случаев) можно воспользоваться простым алгоритмом с вычислением ориентированных площадей четырех треугольников. Для проверки пересечения двух ортодромий (без учета особых случаев) на сфере необходимо проверить наличие решения системы  $Ax + By = Cu + Dv$  (где  $A, B, C, D$  — трехмерные векторы, задающие рассматриваемые ортодромии) с неотрицательными компонентами, что требует вычисления четырех определителей матриц размера  $3 \times 3$  и сравнения их знаков.

**Алгоритм решения прямой и обратной геодезической задачи, определения угла между ортодромиями.** Одним из свойств гномонической проекции является существенное искажение длин и углов. Степень искажения увеличивается с удалением рассматриваемых точек от центра проекции. Для учета искажений требуется решить прямую и обратную геодезические задачи.

Обратная геодезическая задача заключается в том, что по известным координатам точек требуется определить горизонтальное положение (длину) и дирекционный угол. Зависимость длины ортодромии в угловой мере между точками от координат точек можно определить из формул сферической тригонометрии:

$$D(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) = \operatorname{acos} \left( \frac{G_{11}G_{21} + G_{12}G_{22} + 1}{\sqrt{(G_{11}^2 + G_{12}^2 + 1)(G_{21}^2 + G_{22}^2 + 1)}} \right), \quad (4)$$

где  $G_{x1}, G_{x2}$  — элементы вектора  $\mathbf{G}_x$ .

Дирекционный угол (угол между двумя ортодромиями) определяем, рассматривая плоскости  $[\mathbf{P1} \ \mathbf{0} \ \mathbf{P2}]$  и  $[\mathbf{P2} \ \mathbf{0} \ \mathbf{P3}]$ , образованные центром координат  $\mathbf{0}$  в пространстве  $R^3$  и точками  $\mathbf{P1}, \mathbf{P2}, \mathbf{P3}$  с координатами

$$\mathbf{P}_x = \begin{bmatrix} G_{x1} \\ G_{x2} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В результате угол между ортодромиями, образованными координатами  $[\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2]$  и  $[\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3]$ , определяется по соотношениям:

$$\begin{aligned} p1_x &= G_{12} - G_{22}; \\ p1_y &= G_{21} - G_{11}; \\ p1_z &= G_{11}G_{22} - G_{21}G_{12}; \\ p2_x &= G_{22} - G_{32}; \\ p2_y &= G_{31} - G_{21}; \\ p2_z &= G_{21}G_{32} - G_{31}G_{22}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^* = \operatorname{acos} \left( \frac{p1_x p2_x + p1_y p2_y + p1_z p2_z}{\sqrt{(p1_x^2 + p1_y^2 + p1_z^2)(p2_x^2 + p2_y^2 + p2_z^2)}} \right), \quad (6)$$

где  $p1_x, p1_y, p1_z, p2_x, p2_y, p2_z$  — коэффициенты, задающие плоскости.

Для нахождения знака угла (направления поворота) необходимо дополнительно определить положение точек относительно друг друга (положительное направление поворота по ходу часовой стрелки при движении от  $G_1$  к  $G_3$ ):

$$\mathbf{A} = \begin{cases} -\mathbf{A}^*, & (G_{31} - G_{11})(G_{22} - G_{12}) < (G_{32} - G_{12})(G_{21} - G_{11}); \\ \mathbf{A}^*, & (G_{31} - G_{11})(G_{22} - G_{12}) \geq (G_{32} - G_{12})(G_{21} - G_{11}). \end{cases} \quad (7)$$

Важным свойством в случае поворота осей является то, что угловая длина дуги между двумя точками не меняется. Искажения углов также остаются постоянными. В связи с этим расчет угловой длины дуги и углов между тремя точками на повернутой гномонической проекции можно проводить без преобразования в гномоническую плоскость, т. е. выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{GX}_1, \mathbf{GX}_2) &= D(\mathbf{MG}_1, \mathbf{MG}_2) = D(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2); \\ A(\mathbf{GX}_1, \mathbf{GX}_2, \mathbf{GX}_3) &= A(\mathbf{MG}_1, \mathbf{MG}_2, \mathbf{MG}_3) = A(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3). \end{aligned} \quad (8)$$

Прямая геодезическая задача заключается в том, что по известным координатам точки 2, линии 1–2, дирекционному углу этой линии и ее горизонтальному продолжению (длине) требуется определить координаты точки 3. Для минимизации погрешностей работы БЦВМ с плавающей точкой решение прямой геодезической задачи можно представить в виде приращения к координатам точки по формуле:

$$\begin{aligned} G_{p1} &= G_{21} + C3 \left( CA_z \left( G_{21} - G_{11} + G_{21}^3 - G_{11}G_{21}^2 - G_{11}G_{22}^2 + G_{21}G_{22}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + C1 \left( -G_{12} + G_{22} - G_{21}^2G_{12} + G_{11}G_{21}G_{22} \right) \right); \\ G_{p2} &= G_{22} + C3 \left( CA_z \left( G_{22} - G_{12} + G_{22}^3 - G_{21}^2G_{12} + G_{21}^2G_{22} - G_{12}G_{22}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + C1 \left( G_{11} - G_{21} + G_{11}G_{22}^2 - G_{21}G_{12}G_{22} \right) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $A_z$  — угол поворота, задающий положение точки интереса относительно ортодромии  $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2$  (по ходу часовой стрелки относительно  $\mathbf{G}_2$ , точка  $\mathbf{G}_1$  задает направление опорной ортодромии);

$$\begin{aligned} C3 &= \left( \frac{\text{Tan}L}{\sqrt{C2} + \text{Tan}L \left( CA_z \left( -G_{21}^2 - G_{22}^2 + G_{11}G_{21} + G_{12}G_{22} \right) + C1 \left( -G_{11}G_{22} + G_{21}G_{12} \right) \right)} \right); \\ C2 &= (G_{11} - G_{21})^2 + (G_{12} - G_{22})^2 + (G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21})^2; \\ C1 &= \sin A_z \sqrt{G_{21}^2 + G_{22}^2 + 1}, \end{aligned}$$

где  $\text{Tan}L = \text{tg} L$ ,  $L$  — угловая длина дуги от точки  $\mathbf{G}_2$  до точки интереса;  $CA_z = \cos A_z$ .

Расчет прямой геодезической задачи на повернутой гномонической проекции допустимо осуществлять без промежуточного пересчета в гномоническую проекцию по аналогии с решением обратной геодезической задачи.

**Алгоритм определения расстояния между близко расположенными точками с использованием упрощенных зависимостей.** При решении задач оптимизации маршрутов важность имеет представление рабочей области в виде равномерной ортогональной сетки с относительно малым шагом, так как такое представление позволяет хранить и обрабатывать матрицу высот рельефа. В таком представлении рабочей области на гномонической проекции ячейки сетки имеют разную реальную площадь, причем с удалением от центра проекции площадь ячейки уменьшается. При этом возможно сделать трассировку луча, используя алгоритм растеризации прямой, например, алгоритм Брезенхема [6], и определить ячейки, принадлежащие интересующей ортодромии. Сравнение данного способа определения принадлежности ячеек матрицы высот рельефа ортодромии с другими вариантами решения задачи приведено в таблице.

Возможны и более сложные случаи использования трассировки лучей, например, в задаче определения углов закрытия, которые в свою очередь могут быть использованы при определении факта учета запретной зоны для оптимизации маршрутов. Тогда может потребоваться найти расстояние от искомой точки до некоторых ячеек, принадлежащих интересующей ортодромии. При достаточно малом шаге равномерной ортогональной сетки расстояние можно определять непосредственно во время трассировки прямой, используя упрощенные зависимости, реализуемые на слабых вычислителях. В этом случае обратная геодезическая задача примет вид

$$\hat{D}(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2) = \sqrt{1 - \frac{(G_{11}G_{21} + G_{21}G_{22} + 1)^2}{(G_{11}^2 + G_{12}^2 + 1)(G_{21}^2 + G_{22}^2 + 1)}}. \quad (10)$$

Дополнительно на вычислителях с поддержкой IEEE 754 можно использовать быстрый инверсный обратный корень (в виде  $\sqrt{x} = 1/q\_rsqrt(x)$ ) для дополнительного многократного ускорения решения обратной геодезической задачи, что влечет за собой дополнительную погрешность определения расстояния, зависящую от реализации [18].

**Обработка информации, приведенной в виде регулярной сетки на гномонической проекции.** Задача обработки информации, приведенной в виде сетки на гномонической проекции (например, матрицы высот рельефа местности), также является актуальной при решении задачи оптимизации маршрутов. Для работы с матрицей высот рельефа, как правило, требуется осуществлять выборку ячеек, принадлежащих заданным условиям.

### Определение принадлежности ячеек матрицы высот рельефа ортодромии

Способ представления матрицы высот рельефа	Преимущества	Недостатки
Картографическая информация (матрица высот рельефа) приведена на гномонической проекции	Необходимы простые (с вычислительной точки зрения) линейные операции при трассировке луча (при применении широко распространённых алгоритмов rasterization прямой Брезенхема [18] или Ли)	Необходим предварительный перевод картографической информации в гномоническую проекцию. Решение задачи определения ячеек матрицы высот рельефа ортодромии возможно только для той части земной поверхности, где определена гномоническая проекция
Картографическая информация (матрица высот рельефа) приведена на проекции Меркатора (для сферы)	Задача может быть решена для любых точек на земной поверхности	Необходимы сложные (с вычислительной точки зрения) тригонометрические операции для определения промежуточных точек ортодромии
Картографическая информация (матрица высот рельефа) приведена на проекции Гаусса — Крюгера	Задача может быть решена для любых точек на земной поверхности	Необходимы сложные (с вычислительной точки зрения) тригонометрические операции для определения промежуточных точек ортодромии. Требуется разбиение ортодромии на несколько участков, в соответствии с зонами проекции
Картографическая информация приведена в виде небольших матриц высот рельефа на нескольких локальных проекциях	Искажения могут быть проигнорированы в рамках проекции. В результате можно использовать простые алгоритмы трассировки луча (прямой Брезенхема или Ли) для формирования ортодромии в рамках локальной проекции	Необходим предварительный перевод картографической информации в локальные проекции. Необходимо разбить ортодромии на несколько участков в соответствии с числом локальных проекций

В настоящей работе рассмотрены два варианта выборки ячеек равномерной ортогональной сетки на гномонической проекции, принадлежащих

- заданному выпуклому полигону;
- окружности, определенной центральной точкой и радиусом  $R$  в метрах.

Алгоритм выборки ячеек, принадлежащих заданному выпуклому полигону, следующий:

- разделить заданный полигон на множество сферических треугольников;
- определить множество ячеек матрицы высот рельефа, принадлежащих каждому сферическому треугольнику из множества;
- объединить полученные множества ячеек.

Исходя из свойств гномонической проекции следует, что сферические треугольники на гномонической проекции имеют вид треугольников. В результате применимы алгоритмы [19], с использованием которых можно определить множество ячеек, принадлежащих заданному полигону.

Задача выборки ячеек равномерной ортогональной сетки, принадлежащих окружности, требует вывода уравнения окружности заданного радиуса на гномонической проекции. Для этого необходимо решить уравнение относительно  $G_{p1}$ :  $D(\mathbf{G}_c, \mathbf{G}_p) - L_z = 0$ , где  $\mathbf{G}_c$  — координаты центра окружности;  $\mathbf{G}_p$  — координаты точек на окружности;  $L_z$  — радиус окружности.

Зависимость, полученная в результате решения уравнения, имеет вид

$$\mathbf{G}_{p1} = \left( \begin{array}{c} \frac{G_{c1} + \sigma_1 + G_{c1}G_{c2}G_{p2}}{cLsq + G_{c1}^2 cLsq + G_{c2}^2 cLsq - G_{c1}^2} \\ \frac{G_{c1} - \sigma_1 + G_{c1}G_{c2}G_{p2}}{cLsq + G_{c1}^2 cLsq + G_{c2}^2 cLsq - G_{c1}^2} \end{array} \right), \quad (11)$$

здесь  $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_2}$ ;

$$\sigma_2 = -cLsq \left( G_{c1}^2 + G_{c2}^2 + 1 \right) \left( cLsq \left( 1 + G_{c1}^2 + G_{c2}^2 \right) + G_{p2}^2 \left( cLsq \left( 1 + G_{c1}^2 + G_{c2}^2 \right) - G_{c1}^2 - G_{c2}^2 \right) - 2G_{c2}G_{p2} - G_{c1}^2 - 1 \right),$$

где  $cLsq = \cos^2(L_z)$ .

На вычислителях с поддержкой IEEE 754 возможно использование быстрого инверсного обратного корня (в виде  $\sqrt{x} = 1/q\_rsqrt(x)$ ) для дополнительного многократного ускорения вычисления значения переменной  $\sigma_1$  (и, как следствие, искомой области), что влечет за собой погрешность выборки ячеек, зависящую от реализации [18].

Для реализации данной зависимости в алгоритмах выборки ячеек дополнительно находят диапазон  $G_{p2}$ , при котором определена  $G_{p1}$ . Для этого необходимо решить уравнение  $\sigma_2(G_{p2}) = 0$ .

Результирующий диапазон:

$$G_{p2} = \left[ \begin{array}{l} \frac{(G_{c2} - \sigma_1)}{(cLsq + G_{c1}^2 cLsq + G_{c2}^2 cLsq - G_{c1}^2 - G_{c2}^2)} : \\ : \\ \frac{(G_{c2} + \sigma_1)}{(cLsq + G_{c1}^2 cLsq + G_{c2}^2 cLsq - G_{c1}^2 - G_{c2}^2)} \end{array} \right], \quad (12)$$

где  $\sigma_1 = \sqrt{-(cLsq - 1)(G_{c1}^2 + G_{c2}^2 + 1)(cLsq(1 + G_{c1}^2 + G_{c2}^2) - G_{c1}^2)}$ .

Аналогичный диапазон для  $G_{p1}$ , характеризующий максимум и минимум  $G_{p1}$ , можно получить, решая уравнение  $D(G_c, G_p) - L_z = 0$  относительно  $G_{p2}$ .

Используя полученные зависимости, можно осуществить выборку ячеек матрицы высот рельефа, находящихся между решениями  $G_{p1}$ , принадлежащих окружности заданного радиуса.

**Пример решения задачи поиска кратчайшего маршрута с использованием гномонической проекции.** Требуется найти кратчайший маршрут из точки  $A$  с геоцентрическими координатами  $51,5^\circ$  с. ш. и  $160^\circ$  в. д. до точки  $B$  с координатами  $67,5^\circ$  с. ш. и  $141,5^\circ$  в. д., с обходом областей превышения рельефом высоты 1500 м на удалении не ближе 25 км, по аналогии с требованиями авиационных правил полетов<sup>1</sup> в части расчета нижнего эшелона полета по Правилам полета по приборам (ППП), с учетом матрицы высот рельефа для района  $50...69^\circ$  с. ш. и  $140...17^\circ$  в. д.

Решать задачу можно разными способами. В рамках настоящей работы для демонстрации использования зависимостей задачу предлагается решать следующим образом.

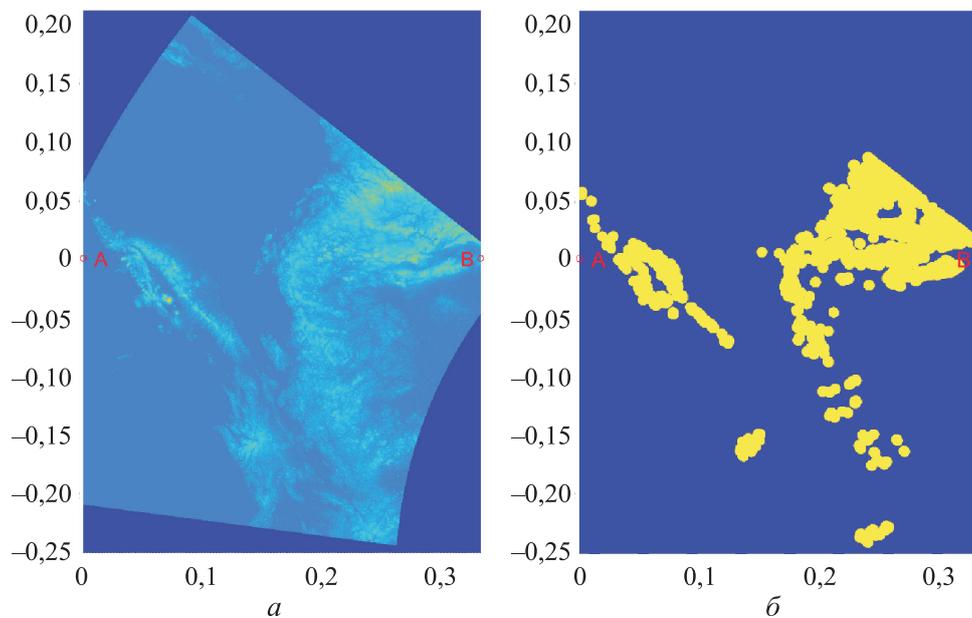
1. Определить координаты центра проекции и задать матрицу направляющих косинусов пересчета координат из гномонической проекции в повернутую гномоническую проекцию, удобную для решения задачи. Для удобства и минимизации искажений целесообразно сформировать повернутую косую гномоническую проекцию с центром в точке  $A$ , ось абсцисс которой направлена на точку  $B$ , и представить на ней исходную матрицу высот рельефа (с учетом формул (1), (3), рис. 1, а).

<sup>1</sup> Федеральные авиационные правила полетов в воздушном пространстве Российской Федерации. М., 4-й филиал Воениздата, 2002.

2. Обработать матрицу высот рельефа и выделить области на гномонической проекции, в которых имеются превышения рельефом высоты 1500 м на расстоянии ближе 25 км (с учетом формул (11), (12), рис. 1, б). При этом можно допустить увеличение шага сетки матрицы высот рельефа для ускорения обработки.

3. На основе выделенных на предыдущем шаге запретных областей сформировать полигоны запретных зон для обхода. Для этого предлагается использовать алгоритмы обхода контуров (а именно, алгоритмы обхода вершин [20]), исключая недостижимые паразитные контуры внутри запретных зон.

4. Определить вершины графа и матрицу смежности. В качестве вершин графа используют начальную и конечную точки маршрута, а также вершины полигонов запретных зон.



**Рис. 1.** Сформированная гномоническая проекция и исходная матрица высот рельефа (а), обработанная матрица высот рельефа на гномонической проекции (б) (выделены области, имеющие превышение рельефом порогового значения 1500 м на расстоянии ближе 25 км)

Для корректной работы некоторых алгоритмов определения матрицы смежности (например, наивного алгоритма) необходимо сформировать опоясывающие полигоны запретных зон, каждая вершина, которых смещена на пренебрежимо малое расстояние по направлению биссектрисы внешнего угла исходного полигона запретной зоны (рис. 2). Полученные

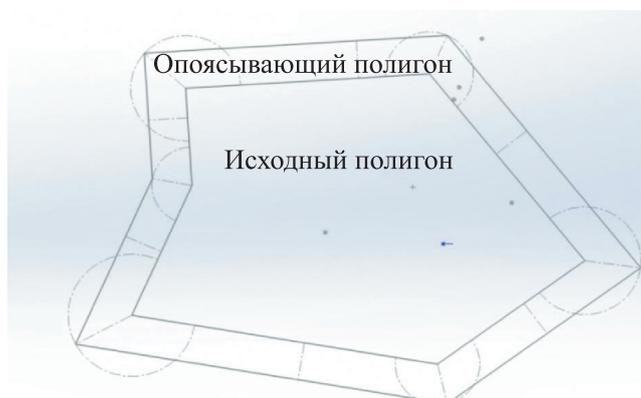


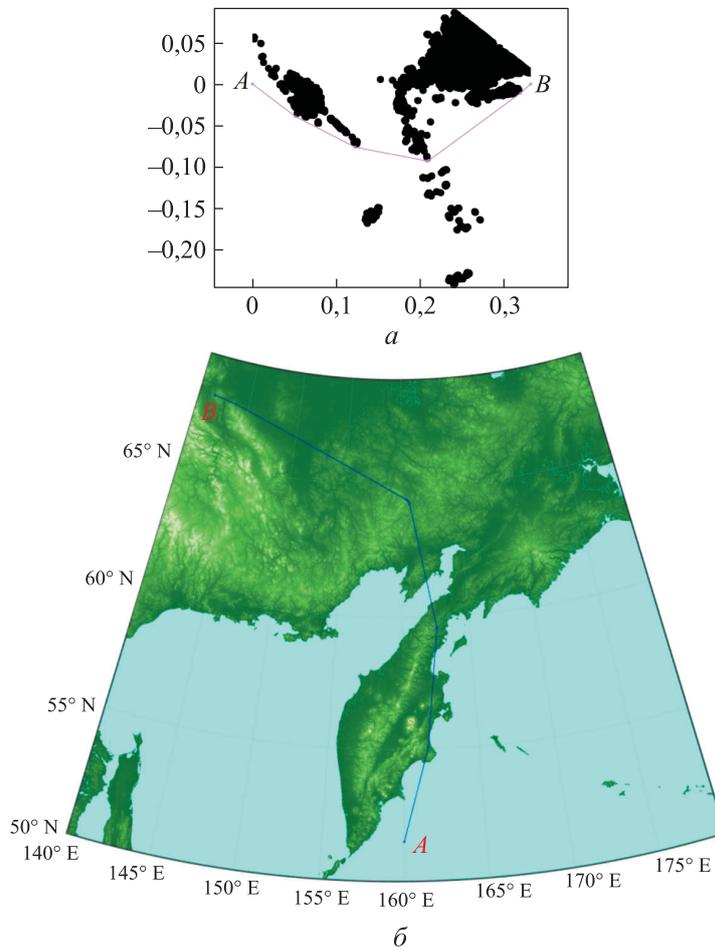
Рис. 2. Опоясывающий полигон запретной зоны

координаты используются вместо координат вершин графа (т. е. координат запретных зон) при проверке пересечения связей между вершинами графа с запретными зонами. Рассчитывать координаты опоясывающих прямоугольников нужно по формулам (6)–(9), веса ребер в матрице смежности — по (4), (8).

5. Использовать алгоритм Дейкстры для поиска кратчайшего маршрута, результат поиска кратчайшего маршрута приведен на рис. 3.

**Перспективы развития.** Такой подход является достаточным для решения значительного числа практических задач оптимизации маршрутов на земной поверхности. Однако в некоторых случаях (например, при необходимости учесть различную динамику изменения ошибок навигации вдоль осей траекторной системы координат при движении между поворотными пунктами маршрута) может потребоваться определение некоего эквивалента суммы Минковского [3] для расчета конфигурационного пространства на гномонической проекции. Определение такой фигуры является сложной задачей, которая не рассматривается в настоящей работе.

Подразумевается, что в процессе полета между заданными поворотными пунктами маршрута ЛА будет выдерживать сформированную ортодромию. В других случаях использование гномонической проекции может быть нецелесообразно или может требовать ввода каких-либо дополнительных искусственных ограничений (например, ограничить длину ортодромии между поворотными пунктами маршрута, чтобы погрешность выдерживания ортодромии ЛА не превысила заданного порога) и/или вывода зависимостей для решения вышеописанных задач, соответствующих способу траекторного управления.



**Рис. 3.** Результат поиска кратчайшего маршрута алгоритмом Дейкстры на гномонической проекции с учетом полигонов запретных зон (а) и на карте рассматриваемого района (б)

Если исходная информация в гномонической проекции сформирована без учета координат исходной и конечной точки (в случае, если они не принадлежат одной имеющейся проекции), то появляется необходимость поиска неких промежуточных общих точек на двух или более гномонических проекциях. Однако решать такую задачу необходимо с учетом особенностей используемого метода оптимизации маршрута.

**Заключение.** Предложен подход использования гномонической проекции для решения задачи оптимизации маршрута и обработки матрицы высот рельефа. Полученные соотношения позволяют учесть сферичность земной поверхности при оптимизации маршрута ЛА на гномонической проекции и использовать стандартизированные алгоритмы, применяемые

для решения этой задачи на плоскости. Предложены упрощения, реализуемые в бортовых вычислителях ЛА для ускорения расчетов, а также соотношения для выборки ячеек матрицы высот рельефа, приведенной в виде регулярной сетки на гномонической проекции.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zhang R., Ji T., Zheng H. Application of improved Dijkstra algorithm in two-dimensional path planning problem. *ICIP'19*, 2019, pp. 211–215. DOI: <https://doi.org/10.1145/3378065.3378106>
- [2] Yibin P., Green P.N. 3D digital grid map initialization and path planning for autonomous robot navigation. *ICSRT 2019*, 2019, pp. 68–74. DOI: <https://doi.org/10.1145/3325693.3325706>
- [3] LaValle S.M. *Planning algorithms*. Cambridge, Cambridge University Press, 2006.
- [4] Rospotniuk V.R. Optimal any-angle pathfinding on a sphere. *J. Artif. Intell. Research*, 2021, vol. 72, pp. 475–505. DOI: <https://doi.org/10.1613/jair.1.12483>
- [5] Cao X., Xiao Z., Yang P., et al. Joint search method for UAV multiobjective path planning in urban low altitude environment. Патент US 10706729. Заявл. 18.04.2018, опубл. 07.07.2020.
- [6] Ravenscroft D.L. Computing flight plans for UAVs while routing around obstacles having spatial and temporal dimensions. Патент US 20090210109. Заявл. 14.01.2008, опубл. 20.08.2009.
- [7] Leonard J.V., Menzel R.K., Meyer R.E., et al. A method for in-flight/real-time planning of a mission for a precision-guided missile. Патент GB 2382865. Заявл. 02.01.2001, опубл. 11.06.2003.
- [8] Skullestad A.J., Straume T., Lowe K., et al. Method and system for planning and launching a plurality of missiles to be included in the same mission. Патент EP 3130877. Заявл. 18.07.2016, опубл. 15.02.2017.
- [9] Ивенин Б.И., Тестова Т.М. Построение оперативных алгоритмов оптимизации пространственно-временного графика полета ударных авиационных комплексов в поле потенциальных угроз. *Навигация, наведение и управление летательными аппаратами. Тез. докл. Четвертой Всерос. науч.-техн. конф.* Т. 1. М., ГосНИИАС, 2019, с. 311–312. EDN: TJFPJR
- [10] Xiang A., Wang L. Research on path planning of UAV forest fire fighting based on improved ant colony algorithm. *ICCAI'21*, 2021, pp. 289–295. DOI: <https://doi.org/10.1145/3467707.3467751>
- [11] Hirt J., Gauggel D., Hensler J., et al. Using quadtrees for realtime pathfinding in indoor environments. In: *Communications in Computer and Information Science*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, vol. 156, pp. 72–78. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-27272-1\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-27272-1_6)
- [12] Xin Z., Rongwu X., Guo C. AUV path planning in dynamic environment based on improved artificial potential field method based on visibility graph. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2022, vol. 2383, art. 012090. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2383/1/012090>

- [13] Gindy H., Avis D. A linear algorithm for computing the visibility polygon from a point. *J. Algorithms*, 1981, vol. 2, no. 2, pp. 186–197.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0196-6774\(81\)90019-5](https://doi.org/10.1016/0196-6774(81)90019-5)
- [14] Lee D.T. Visibility of a simple polygon. *Comput. Vis., Graph. Im. Proc.*, 1983, vol. 22, no. 2, pp. 207–221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0734-189X\(83\)90065-8](https://doi.org/10.1016/0734-189X(83)90065-8)
- [15] Barry J., Simpson R.B. Corrections to Lee’s visibility polygon algorithm. *BIT*, 1987, vol. 27, no. 4, pp. 458–473. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01937271>
- [16] Джанджгава Г.И., ред. Навигация летательных аппаратов в околоземном пространстве. М., НАУЧТЕХЛИТИЗДАТ, 2015.
- [17] Snyder J.P. Map projections — a working manual. Washington, U.S. Geological Survey, 1987, pp. 38–75. DOI: <https://doi.org/10.3133/pp1395>
- [18] Walczyk C.J., Moroz L.V., Cieśliński J.L. Improving the accuracy of the fast inverse square root by modifying Newton — Raphson Corrections. *Entropy*, 2021, vol. 23, no. 1, art. 86. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23010086>
- [19] Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. М., Мир, 1989.
- [20] Gupta S., Kar S. Algorithms to speed up contour tracing in real time image processing systems. *IEEE Access*, 2022, vol. 10, pp. 127365–127376.  
DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3226943>

**Пучков Леонид Дмитриевич** — ведущий инженер ФАУ «ГосНИИАС» (Российская Федерация, 125319, Москва, ул. Викторенко, д. 7).

**Зеркаленков Дмитрий Алексеевич** — ведущий инженер ФАУ «ГосНИИАС» (Российская Федерация, 125319, Москва, ул. Викторенко, д. 7).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Пучков Л.Д., Зеркаленков Д.А. Применение гномонической проекции при решении задач оптимизации маршрута полета и обработки матрицы высот рельефа в бортовых вычислителях летательных аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2025, № 2 (151), с. 102–121. EDN: TPXVEA

**GNOMONIC PROJECTION APPLICATION IN SOLVING  
THE PROBLEMS OF FLIGHT ROUTE OPTIMIZATION  
AND PROCESSING THE TERRAIN ELEVATION MATRIX  
IN THE FLYING VEHICLE ON-BOARD COMPUTERS**

**L.D. Puchkov**

[puchkov\\_ld@gosniias.ru](mailto:puchkov_ld@gosniias.ru)

**D.A. Zerkalnikov**

[dazerkalnikov@gosniias.ru](mailto:dazerkalnikov@gosniias.ru)

**State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, Russian Federation**

### Abstract

The paper proposes an approach that allows accounting for the Earth sphericity in solving the problems of optimizing the flight route of an aerial vehicle and processing the terrain elevation matrix using the initial information presentation in the gnomonic projection. The use of the gnomonic projection main property, i.e., representation of the orthodromies in the form of straight lines, makes it possible to apply the generally accepted algorithms and approaches in route optimization and solve these problems with limited computation capabilities of the aerial vehicle onboard computers. For example, the graph theory methods widely used in solving the similar problems on a plane could be applied. The need to take into account the Earth sphericity in the route optimization algorithms is caused primarily by features of the aerial vehicle trajectory control (namely, flight along the orthodromy) between the route turning points. The paper presents algorithms and dependencies that allow processing the initial information (including the terrain elevation matrix) on the gnomonic projection. They include formulas to solving the direct and inverse geodetic problem, simplified (from the point of view of computation resources) dependency to determine the distance between two points in the projection, and solutions to select cells belonging to the given polygon or circle. To demonstrate the use of the obtained dependencies in solving a practical problem of determining the shortest path between two points on the Earth's surface with bypassing the forbidden zones (formed by analyzing the terrain elevation matrix in the area under consideration), an example of its solution using the graph theory methods (Dijkstra's algorithm) is considered

### Keywords

*Route optimization, bypassing forbidden zones, terrain elevation matrix processing, gnomonic projection, orthodromy*

Received 02.10.2024

Accepted 16.01.2025

© Author(s), 2025

---

### REFERENCES

- [1] Zhang R., Ji T., Zheng H. Application of improved Dijkstra algorithm in two-dimensional path planning problem. *ICIIP'19*, 2019, pp. 211–215.  
DOI: <https://doi.org/10.1145/3378065.3378106>
- [2] Yibin P., Green P.N. 3D digital grid map initialization and path planning for autonomous robot navigation. *ICSRT 2019*, 2019, pp. 68–74.  
DOI: <https://doi.org/10.1145/3325693.3325706>

- [3] LaValle S.M. Planning algorithms. Cambridge, Cambridge University Press, 2006.
- [4] Rospotniuk V.R. Optimal any-angle pathfinding on a sphere. *J. Artif. Intell. Research*, 2021, vol. 72, pp. 475–505. DOI: <https://doi.org/10.1613/jair.1.12483>
- [5] Cao X., Xiao Z., Yang P., et al. Joint search method for UAV multiobjective path planning in urban low altitude environment. Patent US 10706729. Appl. 18.04.2018, publ. 07.07.2020.
- [6] Ravenscroft D.L. Computing flight plans for UAVs while routing around obstacles having spatial and temporal dimensions. Patent US 20090210109. Appl. 14.01.2008, publ. 20.08.2009.
- [7] Leonard J.V., Menzel R.K., Meyer R.E., et al. A method for in-flight/real-time planning of a mission for a precision-guided missile. Patent GB 2382865. Appl. 02.01.2001, publ. 11.06.2003.
- [8] Skullestad A.J., Straume T., Lowe K., et al. Method and system for planning and launching a plurality of missiles to be included in the same mission. Patent EP 3130877. Appl. 18.07.2016, publ. 15.02.2017.
- [9] Ivenin B.I., Testova T.M. [Construction of operational algorithms for optimizing the spatial and temporal schedule of flight of strike aircraft systems in the field of potential threats]. *Navigatsiya, navedenie i upravlenie letatelnyimi apparatami. Tez. dokl. Chetvertoy Vserossiyskoy nauch.-tekh. konf. T. 1* [Navigation, Guidance and Control of Aircraft. Abs. 4th Russ. Sc.-Tech. Conf. Vol. 1]. Moscow, GosNIIAS Publ., 2019, pp. 311–312 (in Russ.). EDN: TJFPJR
- [10] Xiang A., Wang L. Research on path planning of UAV forest fire fighting based on improved ant colony algorithm. *ICCAI'21*, 2021, pp. 289–295. DOI: <https://doi.org/10.1145/3467707.3467751>
- [11] Hirt J., Gauggel D., Hensler J., et al. Using quadtrees for realtime pathfinding in indoor environments. In: *Communications in Computer and Information Science*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, vol. 156, pp. 72–78. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-27272-1\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-27272-1_6)
- [12] Xin Z., Rongwu X., Guo C. AUV path planning in dynamic environment based on improved artificial potential field method based on visibility graph. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2022, vol. 2383, art. 012090. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2383/1/012090>
- [13] Gindy H., Avis D. A linear algorithm for computing the visibility polygon from a point. *J. Algorithms*, 1981, vol. 2, no. 2, pp. 186–197. DOI: [https://doi.org/10.1016/0196-6774\(81\)90019-5](https://doi.org/10.1016/0196-6774(81)90019-5)
- [14] Lee D.T. Visibility of a simple polygon. *Comput. Vis., Graph. Im. Proc.*, 1983, vol. 22, no. 2, pp. 207–221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0734-189X\(83\)90065-8](https://doi.org/10.1016/0734-189X(83)90065-8)
- [15] Barry J., Simpson R.B. Corrections to Lee's visibility polygon algorithm. *BIT*, 1987, vol. 27, no. 4, pp. 458–473. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01937271>
- [16] Dzhandzhgava G.I., ed. *Navigatsiya letatelnykh apparatov v okolozemnom prostranstve* [Navigation of aircraft in near-Earth space]. Moscow, NAUCHTEKHLITIZDAT Publ., 2015.

[17] Snyder J.P. Map projections — a working manual. Washington, U.S. Geological Survey, 1987, pp. 38–75. DOI: <https://doi.org/10.3133/pp1395>

[18] Walczyk C.J., Moroz L.V., Cieśliński J.L. Improving the accuracy of the fast inverse square root by modifying Newton — Raphson Corrections. *Entropy*, 2021, vol. 23, no. 1, art. 86. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23010086>

[19] Rogers D.F. Procedural elements for computer graphics. New York, McGraw-Hill, 1984.

[20] Gupta S., Kar S. Algorithms to speed up contour tracing in real time image processing systems. *IEEE Access*, 2022, vol. 10, pp. 127365–127376. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3226943>

**Puchkov L.D.** — Leading Engineer, State Research Institute of Aviation Systems (Viktorenko ul. 7, Moscow, 125319 Russian Federation).

**Zerkalnikov D.A.** — Leading Engineer, State Research Institute of Aviation Systems (Viktorenko ul. 7, Moscow, 125319 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Puchkov L.D., Zerkalnikov D.A. Gnomonic projection application in solving the problems of flight route optimization and processing the terrain elevation matrix in the flying vehicle on-board computers. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2025, no. 2 (151), pp. 102–121 (in Russ.).

EDN: TPXVEA