

**ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ
ОПИСАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ
НА РЕГУЛИРУЕМОМ ПЕРЕКРЕСТКЕ, ВЫБОР КРИТЕРИЯ
И АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Е.А. Софронова

sofronova_ea@mail.ru

Е.А. Воронин

e.voronin1@gmail.com

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача математического описания транспортных потоков и управления ими на регулируемых перекрестках. Предполагается, что управление осуществляется с помощью сигналов автоматического светофора. Решение задачи основано на вероятностном подходе к выбору и построению функций плотности распределения методами теории вероятностей. Приведена разработанная математическая модель, описывающая случайный процесс движения транспортных средств через регулируемый перекресток. На основе модели определен критерий оптимизации управления транспортным потоком на перекрестках. Приведен алгоритм оптимального управления светофорами на регулируемых перекрестках. Универсальным и измеримым критерием качества принят максимум вероятности отсутствия очереди на входных участках. Предложенный критерий качества имеет свойство уни-modalности и непрерывности, что гарантирует существование и единственность оптимального управляющего решения. Разработанный математический алгоритм оптимального управления позволяет найти оптимальные значения длительностей фаз светофоров, минимизирующих длину очереди на входных участках. Приведены примеры расчета функций распределения вероятностей длины очереди ожидания для тестового Х-образного перекрестка. Данные функции отражают заявленные особенности принятого критерия оптимального управления

Ключевые слова

*Оптимальное управление,
модель транспортных пото-
ков, вероятностная модель*

Поступила 21.02.2024

Принята 14.05.2024

© Автор(ы), 2024

Введение. Транспортные потоки в сети городских дорог представляют собой сложный объект с точки зрения теории управления. Известно, что без соответствующей математической модели объекта или процесса невозможно его исследовать, анализировать, прогнозировать его поведение, разрабатывать и тестировать стратегии управления при известных критериях и т. д. Существует несколько подходов к разработке моделей транспортных потоков. Классическим подходом считается использование законов физики, например, законов ускорения, торможения, сохранения транспортных средств (ТС) в сети и пр. Современным подходом является построение моделей по имеющимся данным, когда большие объемы результатов наблюдений используются в качестве обучающей выборки и объект представляется как черный ящик, описываемый аппаратом искусственных нейронных сетей. Наряду с этими подходами в настоящее время существует и смешанный подход, когда основные математические структуры получаются из законов физики, а параметры настраиваются так, чтобы модель соответствовала реальному объекту.

Модели транспортных потоков начали строить в 1930-е годы, основываясь на наблюдениях за потоками [1, 2]. В 1960-е годы накопленные результаты исследований были обобщены в виде математической теории транспортных потоков. В настоящее время существует большое разнообразие моделей, которые по уровню детализации можно разделить на микро-, макро- и мезоскопические, а также на модели сетей и гибридные модели, включающие в себя разные уровни детализации. Обзоры существующих математических моделей приведены в [3–7]. Для решения конкретной задачи с учетом ее специфики исследователь может выбрать соответствующую модель, однако для решения сложной задачи оптимального управления транспортными потоками [8, 9], когда в модель в явном виде входит управление, адекватных моделей не так много [10, 11].

Поскольку движение ТС в городской сети имеет случайный характер, важность применения вероятностного подхода к моделированию транспортных потоков сложно переоценить [12–15].

Согласно [16], при исследовании транспортных потоков особое внимание следует уделять участкам, подверженным образованию заторов, а также поведению очередей из ТС на них. Модели должны предсказывать длину очереди, время проезда ТС через участки и пр. В настоящей работе приведена вероятностная модель транспортного потока на регулируемом перекрестке. Управление осуществляется с помощью сигналов светофора путем последовательного переключения фаз определенной длительности. Рассмотрены методы оценки вероятностей состояния транспортного

потока (очереди) на перекрестке, выбраны и обоснованы критерии и алгоритм оптимального управления светофорами.

Вероятностная модель описания транспортного потока на перекрестке. Вследствие (с некоторыми допущениями) свойств ординарности, отсутствия последствия, стационарности на ограниченном временном интервале и исходя из практических наблюдений транспортный поток на дороге можно описать вероятностной моделью и распределением Пуассона [17–19]:

$$P(n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

где $P(n)$ — вероятность того, что за время t этот участок проедут n ТС; λ — интенсивность потока машин на заданном участке в единицу времени; t — наблюдаемый интервал времени; n — число ТС, проехавших через этот участок дороги.

При рассмотрении движения транспортного потока через регулируемый перекресток в заданном направлении его можно представить как случайный процесс из двух потоков: подходящего к перекрестку с интенсивностью λ , и покидающего его с интенсивностью μ (рис. 1).

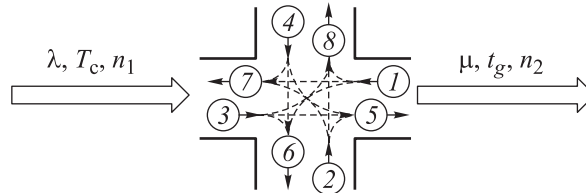


Рис. 1. Схема событий на регулируемом перекрестке

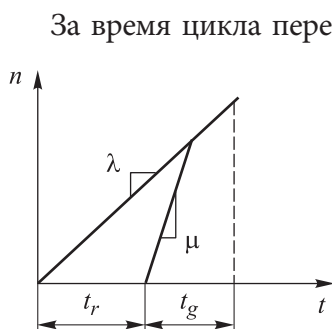


Рис. 2. Диаграмма вход-выход (n — накопленное число автомобилей)

За время цикла переключения фаз светофора T_c с интенсивностью λ к рассматриваемому направлению на перекрестке подъехало n_1 ТС. За это же время с перекрестка уехало n_2 ТС, причем их движение было возможно только во время зеленого сигнала светофора t_g с интенсивностью исходящего потока μ . В общем случае при наличии очереди на проезд $\mu = \mu$, а при отсутствии очереди $\mu = \lambda$ [20] (рис. 2). Время цикла переключения фаз светофора T_c складывается из времени работы t_r красного сигнала светофора, запрещающего движение в данном на-

правления, и времени работы t_g зеленого сигнала светофора, разрешающего движение. Для простоты будем считать, что желтый сигнал светофора переключен в красный сигнал.

Вероятности проезда n_1 и n_2 ТС при заданных λ, μ, T_c, t_g описываются соответствующими функциями распределения Пуассона:

$$P_1(n_1) = \frac{(\lambda T_c)^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda T_c}; \quad (2)$$

$$P_2(n_2) = \frac{(\mu t_g)^{n_2}}{n_2!} e^{-\mu t_g}. \quad (3)$$

По окончании одного цикла переключения светофора на подъезде к перекрестку может остаться некоторое число машин m как разность n_1 и n_2 :

$$m = n_1 - n_2. \quad (4)$$

Если n_1 и n_2 — случайные величины с известными функциями плотности распределения вероятностей (2) и (3), то предоставляется возможным найти функцию плотности распределения $P(m)$. Приняв

$$n_1 = n_2 + m \quad (5)$$

и учитывая их независимость, формула вероятности будет иметь вид

$$P(n_1 - n_2 = m) = P_1(n_2 + m)P_2(n_2). \quad (6)$$

Подставив в (6) выражения для $P_1(n_1)$ и $P_2(n_2)$ из (2), (3), получим двухпараметрическое распределение переменных n_2 и m :

$$P(n_1 - n_2 = m) = \frac{(\lambda T_c)^{n_2 + m}}{(n_2 + m)!} e^{-\lambda T_c} \frac{(\mu t_g)^{n_2}}{n_2!} e^{-\mu t_g}. \quad (7)$$

Для получения однопараметрического распределения $P(m)$ маргинализируем его по n_2 , взяв сумму бесконечного ряда

$$P(m) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(\lambda T_c)^{n_2 + m}}{(n_2 + m)!} \frac{(\mu t_g)^{n_2}}{n_2!} e^{-\lambda T_c - \mu t_g}. \quad (8)$$

После суммирования этого ряда по $n_2 = 0, \dots, \infty$ получаем искомое распределение:

$$P(m) = \frac{(\lambda T_c)^m}{\left(\sqrt{\lambda T_c} \sqrt{\mu t_g}\right)^m} \text{Bessel}_I \left(m, 2\sqrt{\lambda T_c} \sqrt{\mu t_g} \right) e^{-\lambda T_c - \mu t_g}. \quad (9)$$

Программа переключения фаз светофора работает удовлетворительно, когда перед светофором не наблюдается скопления автомобилей, т. е. m мало или близко к нулю.

Формула (9) позволяет оценить вероятность этого состояния, после подстановки в нее $m = 0$:

$$P(m = 0) = \text{Bessel}_I\left(0, 2\sqrt{\lambda T_c} \sqrt{\mu t_g}\right) e^{-\lambda T_c - \mu t_g}. \quad (10)$$

Задача оптимального управления. Если предполагается допустимая длина очереди m_k , то соответствующая функция плотности распределения вероятностей будет иметь вид

$$P(m_k) = \frac{(\lambda T_c)^{m_k}}{(\sqrt{\lambda T_c} \sqrt{\mu t_g})^{m_k}} \text{Bessel}_I\left(m_k, 2\sqrt{\lambda T_c} \sqrt{\mu t_g}\right) e^{-\lambda T_c - \mu t_g}. \quad (11)$$

Управляемыми параметрами являются время цикла переключения фаз светофора T_c и время работы зеленого сигнала светофора t_g , разрешающего движение в данном направлении, тогда максимум вероятности по управляемым параметрам T_c и t_g соответствует оптимальной настройке программы переключения фаз светофора:

$$\begin{aligned} \text{opt}(T_c, t_g) &= \arg \max_{T_c, t_g} P(m_k) = \\ &= \frac{(\lambda T_c)^{m_k}}{(\sqrt{\lambda T_c} \sqrt{\mu t_g})^{m_k}} \text{Bessel}_I\left(m_k, 2\sqrt{\lambda T_c} \sqrt{\mu t_g}\right) e^{-\lambda T_c - \mu t_g}. \end{aligned} \quad (12)$$

Критерием качества является максимум вероятности того, что длина очереди на входном участке перекрестка близка к нулю.

Если время цикла переключения фаз светофора $T_c = \text{const}$, т. е. устанавливается предварительно из каких-то условий, оптимальное значение t_g находится как максимум функции одной переменной

$$\begin{aligned} \text{opt}(t_g) &= \arg \max_{t_g} P(m_k) = \\ &= \frac{(\lambda T_c)^{m_k}}{(\sqrt{\lambda T_c} \sqrt{\mu t_g})^{m_k}} \text{Bessel}_I\left(m_k, 2\sqrt{\lambda T_c} \sqrt{\mu t_g}\right) e^{-\lambda T_c - \mu t_g}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что функция плотности распределения вероятностей (13) унимодальна на интервале $t_g \in (0, \infty)$, имеет нулевые значения на грани-

цах этого интервала и единственное максимальное значение внутри него, а следовательно, удовлетворяет требованиям к критериям оптимизации.

Представленные критерий и метод оптимального управления одним направлением движения через перекресток позволяют перейти к задаче управления всеми направлениями на нем.

Если поставить задачу минимизации числа ТС, ожидающих проезд по всем направлениям i через перекресток, то критерием качества будет максимум вероятности этих совместных событий

$$P\left\{\bigcap_i (m_i = 0)\right\} = \prod_i P(m_i = 0) \quad (14)$$

или $\max_i \prod_i (P(m_i = 0))$. Соответственно, при этом алгоритм оптимального управления представляется в виде

$$\text{opt}(T_c, t_g) = \arg \max_{T_c, t_g} \prod_i P(m_i = 0); \quad (15)$$

$$\text{opt}(T_c, t_g) = \arg \max_{T_c, t_g} \prod_i \text{Bessel}_I\left(0, 2\sqrt{\lambda_i T_c} \sqrt{\mu_i t_g}\right) e^{-\lambda_i T_c - \mu_i t_g}. \quad (16)$$

Важной особенностью этого алгоритма является то, что оптимизируется вероятность события, а не его структура (m_i), максимум вероятности всегда существует и алгоритм сходится.

Моделирование. Приведем пример расчета функции распределения вероятностей $P(m=0)$ для одного направления тестового X-образного перекрестка (рис. 3). Пусть интенсивность потока ТС на входном участке 1 в единицу времени равно $\lambda = 0,7$ ТС/с, интенсивность потока ТС на выходном участке 2 в единицу времени — $\mu = 0,5$ ТС/с, наблюдаемый интервал времени равен времени цикла смены фаз светофора $T_c = 120$ с, цикл смены фаз постоянен. Один цикл смены фаз содержит две фазы. Фаза 1 — движение по данному направлению запрещено, длительность фазы t_r ; фаза 2 — движение по данному направлению разрешено, длительность фазы t_g . Необходи-

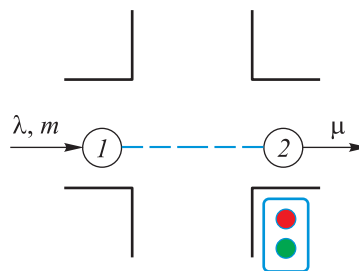


Рис. 3. Тестовый X-образный перекресток

мо необходимо определить вероятность возникновения очереди на входном участке при разных программах светофорного управления: первая при $t_r = 40$ с, $t_g = 80$ с; вторая при $t_r = 60$ с, $t_g = 60$ с; третья при $t_r = 80$ с, $t_g = 40$ с (соответственно красная, синяя, зеленая кривые на рис. 4).

Результаты моделирования уравнения (11) в среде Wolfram Mathematica 13.1 приведены на рис. 4. Видно, что при увеличении длительности разрешающего сигнала наиболее вероятная длина очереди, оставшейся на входном участке, уменьшается. График плотности вероятностей имеет унимодальный вид.

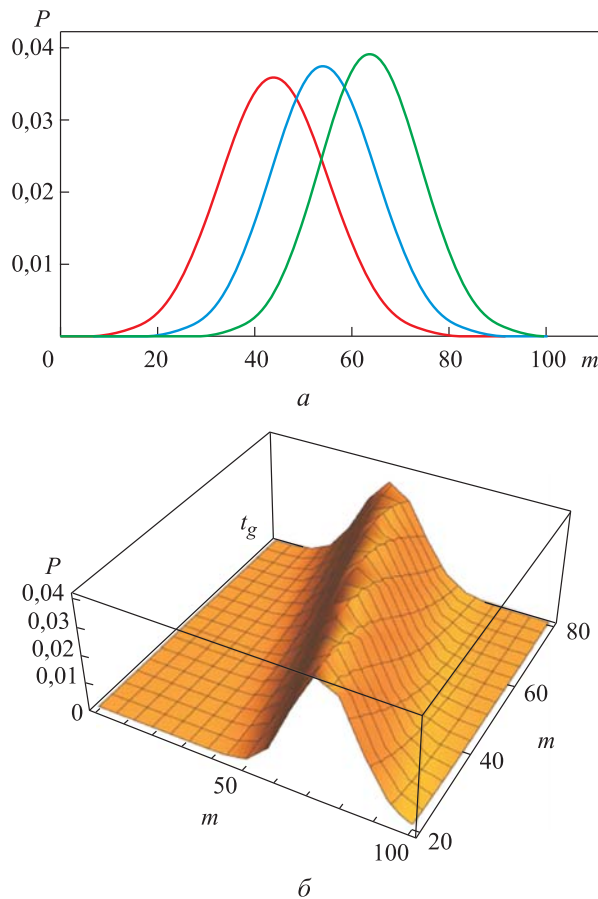


Рис. 4. Результаты моделирования уравнения (11):
одно- (а) и двухпараметрическое (б) распределения плотностей вероятностей
длины очереди в зависимости от параметров потока и длительности
разрешающего сигнала светофора

Заключение. Предлагаемая вероятностная модель представляет собой адекватное по форме и соответствующее физическим законам описание случайного процесса движения автотранспорта. Формализация модели позволила получить критерий и алгоритм оптимального управления светофорами на перекрестках. Критерием качества является максимум вероятности того, что длина очереди на входном участке перекрестка близка к нулю.

Вероятностный критерий оптимального управления гарантирует существование и единственность оптимального решения; он устойчив к погрешностям исходных данных, прост в реализации численными методами оптимизации, универсален и может быть применен к описанию любой схемы организации движения на перекрестке.

Дальнейшие исследования связаны с применением предложенного подхода к сети дорог из нескольких регулируемых перекрестков.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Greenshields B.D. The photographic method of studying traffic behavior. *Highway Research. Board Proceedings*, 1933, vol. 13, pp. 382–399.
- [2] Greenshields B.D. A study of traffic capacity. *Highway Research. Board Proceedings*, 1934, vol. 14, pp. 448–477.
- [3] Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. *Phys. Rep.*, 2000, vol. 329, no. 4-6, pp. 199–329. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00117-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00117-9)
- [4] Letter to the editor — Bibliography of theory of traffic flow and related subjects. *Oper. Res.*, 1961, vol. 9, no. 4, pp. 568–574. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.9.4.568>
- [5] Helbing D. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Rev. Mod. Phys.*, 2001, vol. 73, no. 4, pp. 1067–1141. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.1067>
- [6] Швецов В.И. Математическое моделирование транспортных потоков. *Автоматика и телемеханика*, 2003, № 11, с. 3–46. EDN: NTKEJT
- [7] Van Wageningen-Kessels F., van Lint H., Vuik K., et al. Genealogy of traffic flow models. *EURO J. Transp. Logist.*, 2015, vol. 4, no. 4, pp. 445–473. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13676-014-0045-5>
- [8] Софронова Е.А. К задаче оптимального управления транспортными потоками. *МКПУ-2023. Т. 4*. Волгоград, Изд-во ВГТУ, 2023, с. 185–187. EDN: CXDUFJ
- [9] Sofronova E.A., Diveev A.I. Traffic flows optimal control problem with full information, *IEEE ITSC*, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1109/ITSC45102.2020.9294487>
- [10] Diveev A.I. Controlled networks and their applications. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 8, pp. 1428–1442. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542508080125>
- [11] Софронова Е.А. Универсальная рекуррентная модель управления транспортными потоками в классе микроскопических моделей. *Вестник ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии*, 2021, № 4, с. 3–29. DOI: <https://doi.org/10.17308/sait.2021.4/3795>
- [12] Буслаев А.П., Новиков А.В., Приходько В.М. и др. Вероятностные и имитационные подходы к оптимизации автодорожного движения. М., Мир, 2003.

- [13] Замятин А.А., Малышев В.А. Транспортные автомобильные потоки — введение в вероятностный подход. *Труды МФТИ*, 2010, т. 2, № 4, с. 58–74.
- [14] Viti F., van Zuylen H.J. A probabilistic model for traffic at actuated control signals. *Transp. Res. Part C Emerg. Technol.*, 2010, vol. 18, no. 3, pp. 299–310. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2009.05.003>
- [15] Mahnke R., Kaupužs J., Lubashevsky I. Probabilistic description of traffic flow. *Phys. Rep.*, 2005, vol. 408, no. 1-2, pp. 1–130. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.12.001>
- [16] Daganzo C.F. Remarks on traffic flow modeling and its applications. In: *Traffic and mobility*. Berkeley, Springer, 1999, pp. 105–115. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-60236-8_7
- [17] Kingman J.F.C. Poisson processes. London, Clarendon Press, 1993.
- [18] Daley D.J., Vere-Jones D. Basic properties of the Poisson process. In: *An introduction to the theory of point processes. Probability and its applications*. New York, Springer, 2003, pp. 19–40. DOI: https://doi.org/10.1007/0-387-21564-6_2
- [19] Solomon H., Wang P. Nonhomogeneous Poisson fields of random lines with applications to traffic flow. *Proc. Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Vol. 3. Berkeley, University of California Press, 1972, pp. 383–400.
- [20] Gerlough D.L., Huber M.J. Traffic flow theory. *Special Report 165*. Washington, Transportation Research Board, National Research Council, 1975.

Софронова Елена Анатольевна — канд. техн. наук, доцент, старший научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН (Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2).

Воронин Евгений Алексеевич — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН (Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Софронова Е.А., Воронин Е.А. Вероятностная модель описания транспортных потоков на регулируемом перекрестке, выбор критерия и алгоритма оптимального управления. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2024, № 4 (149), с. 128–139. EDN: ZSBRMZ

**PROBABILISTIC MODEL IN DESCRIBING TRAFFIC FLOWS
AT A SIGNAL-CONTROLLED JUNCTION. SELECTION
OF THE OPTIMAL CONTROL CRITERIA AND ALGORITHM**

Е.А. Sofronova

sofronova_ea@mail.ru

Е.А. Voronin

e.voronin1@gmail.com

FRC CSC RAS, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers a problem of mathematical description of the traffic flows and their control at the signal-controlled junctions. It is assumed that the situation is controlled using the automatic traffic light signals. Solution to the problem is based on the probabilistic approach based on selection and construction of the distribution density functions using the probability theory methods. The paper provides a developed mathematical model describing the vehicles motion random process through a signal-controlled junction. The model determines a criterion for optimizing the traffic flow control at junctions. An algorithm for the traffic lights optimal control at the signal-controlled junctions is presented. The maximum probability of no-queue at the input sections is adopted as the universal and measurable quality criterion. The proposed quality criterion has the unimodality and continuity properties guarantying existence and uniqueness of an optimal control solution. The developed mathematical optimal control algorithm allows finding optimal values of the traffic light phase durations and minimizes the queue length at the inbound sections. The paper provides examples of computing the probability distribution functions of the waiting queue length for a test X-shaped junction. These functions reflect the declared features of the adopted optimal control criterion

Keywords

Optimal control, transport flow model, probabilistic model

Received 21.02.2024

Accepted 14.05.2024

© Author(s), 2024

REFERENCES

- [1] Greenshields B.D. The photographic method of studying traffic behavior. *Highway Research. Board Proceedings*, 1933, vol. 13, pp. 382–399.
- [2] Greenshields B.D. A study of traffic capacity. *Highway Research. Board Proceedings*, 1934, vol. 14, pp. 448–477.
- [3] Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. *Phys. Rep.*, 2000, vol. 329, no. 4-6, pp. 199–329. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00117-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00117-9)
- [4] Letter to the editor — Bibliography of theory of traffic flow and related subjects. *Oper. Res.*, 1961, vol. 9, no. 4, pp. 568–574. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.9.4.568>
- [5] Helbing D. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Rev. Mod. Phys.*, 2001, vol. 73, no. 4, pp. 1067–1141. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.1067>
- [6] Shvetsov V.I. Mathematical modeling of traffic flows. *Autom. Remote Control.*, 2003, vol. 64, no. 11, pp. 1651–1689. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1027348026919>

- [7] Van Wageningen-Kessels F., van Lint H., Vuik K., et al. Genealogy of traffic flow models. *EURO J. Transp. Logist.*, 2015, vol. 4, no. 4, pp. 445–473.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s13676-014-0045-5>
- [8] Sofronova E.A. [To the optimal control problem of traffic flows]. *MKPU-2023*. Т. 4. Volgograd, VGTU Publ., 2023, pp. 185–187 (in Russ.). EDN: CXDUFJ
- [9] Sofronova E.A., Diveev A.I. Traffic flows optimal control problem with full information, *IEEE ITSC*, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1109/ITSC45102.2020.9294487>
- [10] Diveev A.I. Controlled networks and their applications. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 8, pp. 1428–1442.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542508080125>
- [11] Sofronova E.A. Universal recurrent traffic flow model as microscopic model. *Vestnik VGU. Ser. Sistemnyi analiz i informatsionnye tekhnologii* [Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies], 2021, no. 4, pp. 3–29 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.17308/sait.2021.4/3795>
- [12] Buslaev A.P., Novikov A.V., Prihodko V.M., et al. Veroyatnostnye i imitatsionnye podkhody k optimizatsii avtodorozhnogo dvizheniya [Probabilistic and simulation approaches to highway traffic optimization]. Moscow, Mir Publ., 2003.
- [13] Zamyatin A.A., Malyshev V.A. Road traffic flows — an introduction to the probabilistic approach. *Trudy MFTI*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 58–74 (in Russ.).
- [14] Viti F., van Zuylen H.J. A probabilistic model for traffic at actuated control signals. *Transp. Res. Part C Emerg. Technol.*, 2010, vol. 18, no. 3, pp. 299–310.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2009.05.003>
- [15] Mahnke R., Kaupužs J., Lubashevsky I. Probabilistic description of traffic flow. *Phys. Rep.*, 2005, vol. 408, no. 1-2, pp. 1–130.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.12.001>
- [16] Daganzo C.F. Remarks on traffic flow modeling and its applications. In: *Traffic and mobility*. Berkeley, Springer, 1999, pp. 105–115.
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-60236-8_7
- [17] Kingman J.F.C. Poisson processes. London, Clarendon Press, 1993.
- [18] Daley D.J., Vere-Jones D. Basic properties of the Poisson process. In: *An introduction to the theory of point processes. Probability and its applications*. New York, Springer, 2003, pp. 19–40. DOI: https://doi.org/10.1007/0-387-21564-6_2
- [19] Solomon H., Wang P. Nonhomogeneous Poisson fields of random lines with applications to traffic flow. *Proc. Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Vol. 3. Berkeley, University of California Press, 1972, pp. 383–400.
- [20] Gerlough D.L., Huber M.J. Traffic flow theory. *Special Report 165*. Washington, Transportation Research Board, National Research Council, 1975.

Sofronova E.A. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Senior Researcher, FRC CSC RAS (Vavilova ul. 44, korp. 2, Moscow, 119333 Russian Federation).

Voronin E.A. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Leading Researcher, FRC CSC RAS (Vavilova ul. 44, korp. 2, Moscow, 119333 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Sofronova E.A., Voronin E.A. Probabilistic model in describing traffic flows at a signal-controlled junction. Selection of the optimal control criteria and algorithm. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2024, no. 4 (149), pp. 128–139 (in Russ.). EDN: ZSBRMZ