

## АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ТРЕХСТЕПЕННОГО ГИРОСКОПА С ОСТАТОЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕСБАЛАНСИРОВАННОСТЬЮ РОТОРА

Н.Н. Щеглова

shegnatnik@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Проанализированы параметры трехстепенного поплавкового гироскопа на газодинамической опоре с остаточной динамической несбалансированностью ротора в режиме свободного гироскопа, условия и причины, вызвавшие неожиданный выход гироскопа на упор во время эксперимента. Установлено, что при одновременном стечении нескольких неблагоприятных факторов (снижении в процессе эксплуатации значения коэффициента жесткости газодинамической опоры до критической точки в случае наличия повышенного коэффициента динамической несбалансированности ротора и заполнения прибора жидкостью из партии с пониженным коэффициентом вязкости) может произойти резкое увеличение амплитуд вынужденных колебаний рамок гироскопа до касания упоров. Найдена критическая точка коэффициента жесткости газодинамической опоры для номинального значения угловой скорости вращения ротора и амплитуды вынужденных колебаний рамок, обусловленных наличием динамической несбалансированности ротора. Получена взаимосвязь между критическими значениями жесткости газодинамической опоры, которая может изнашиваться в процессе длительной непрерывной эксплуатации, и собственной угловой скоростью вращения ротора. Определены значения коэффициента динамической несбалансированности ротора и коэффициента вязкости жидкости, для которых в случае совмещения значения жесткости газодинамической опоры с критической точкой амплитуда колебаний рамок гироскопа не превысит 10 угл. с

### Ключевые слова

*Поплавковый гироскоп, жесткость газодинамической опоры, динамическая несбалансированность ротора, собственные частоты, критическая жесткость, выход гироскопа на упор*

Поступила 05.07.2023

Принята 11.09.2023

© Автор(ы), 2024

**Введение.** Рассмотрен трехстепенный поплавковый гироскоп, первоначально разработанный в качестве чувствительного элемента для платформенной инерциальной системы индикаторного типа. Созданный на его базе датчик угловой скорости (ДУС) успешно функционировал в составе бесплатформенной инерциальной системы на малом космическом аппарате [1, 2]. При эксплуатации прибора в авиационной технике предусмотрена возможность проведения ремонтных работ с переборкой, заполнением его новой жидкостью и испытаниями. На орбите прибор непрерывно функционирует в течение 10 лет. В крайне редких случаях при испытаниях как на неподвижном основании в режиме свободного гироскопа, так и на вибростенде в режиме датчика угловой скорости наблюдались неожиданный выход прибора на упор (первый случай) и резонансные явления с механическим разрушением его элементов (второй случай). Движение свободного гироскопа на этапе, когда он уже вышел на упор, проанализировано в [3]. Математическая модель выхода гироскопа на упор в режиме двухкомпонентного ДУС построена в [4].

*Цель работы* — установление причин выхода прибора на упор в режиме свободного гироскопа и разработка рекомендаций для обеспечения невозможности этого явления.

Одна задача — построение математических моделей движения гироскопа на этапе его выхода на упор, анализ собственных частот и параметров трехстепенного поплавкового гироскопа с газодинамической опорой ротора, сферическим гироскопом, малым демпфированием и остаточной динамической несбалансированностью ротора. Другой задачей является исследование условий и причин, следствием которых может стать резкое возрастание амплитуд вынужденных колебаний рамок гироскопа с последующим его выходом на упор в режиме свободного гироскопа на неподвижном основании. Исследования проводятся при условии, что во время испытаний угловая скорость вращения Земли скомпенсирована включением прибора в режим электрической пружины.

**Материалы и методы решения задач, принятые допущения.** Остаточная динамическая несбалансированность ротора порождает вынужденные колебания гироскопа с упругими опорами ротора. При совпадении собственных частот системы с частотами внешних или внутренних возмущений могут возникать резонансные явления [5–8], при которых амплитуды колебаний рамок карданова подвеса могут резко возрасти и гироскоп может выйти на упор. Общие вопросы устойчивости и методы исследования систем разработаны и представлены в многочисленных трудах по теории автоматического управления [9–10].

Математические модели движения трехстепенного гироскопа в кардановом подвесе построены в [11–14]. Особенности учета влияния упругости опор ротора и карданова подвеса гироскопа перечислены в [15–17]. Вопросы теории жидкостного демпфирования и исследование возмущающих моментов сил вязкого трения в поплавковых приборах рассмотрены в [18, 19], динамика сферического поплавкового гироскопа в кардановом подвесе — в [20].

Перечислим общие свойства вынужденных колебаний в соответствии с теорией малых колебаний систем с одной степенью свободы [5–8]:

- 1) вынужденные колебания при линейном сопротивлении являются незатухающими;
- 2) линейное сопротивление не влияет на частоту вынужденных колебаний, которая совпадает с частотой возмущающей силы;
- 3) вынужденные колебания при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий так же, как они не зависят от них при отсутствии сопротивления.

Сформулируем еще теорему Кельвина [8]: неустойчивое при потенциальных силах равновесие нельзя сделать устойчивым при добавлении диссипативных сил.

Кроме перечисленных выше общих свойств вынужденных колебаний, у систем с одной степенью свободы также есть свойства, связанные с явлением резонанса [8]:

- 1) амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний зависят от частот собственных и вынужденных колебаний и коэффициента затухания;
- 2) при отсутствии сопротивления в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний возрастает пропорционально времени;
- 3) при наличии сколь угодно малого сопротивления амплитуда вынужденных колебаний при резонансе остается постоянной, хотя и достаточно большой, но не переменной, что подтверждается экспериментально.

Для решения поставленной задачи рассмотрим математическую модель поплавкового гироскопа с газодинамической опорой и остаточной динамической несбалансированностью ротора с учетом вязкого сопротивления жидкости. Уравнения движения трехстепенного гироскопа с динамически несбалансированным ротором на шарикоподшипниковой опоре без вязкого сопротивления получены в [21]:

$$(J_y^H + J_y^{BH} \cos^2 \beta + J_x^{BH} \sin^2 \beta) \alpha - 2(J_y^{BH} - J_x^{BH}) \dot{\alpha} \beta \sin \beta \cos \beta + k_{\text{ж}}^y \sin(\alpha - \alpha_p) \cos \beta \cos \beta_p = 0;$$

$$\begin{aligned}
& J_z^{\text{BH}} \ddot{\beta} + (J_y^{\text{BH}} - J_x^{\text{BH}}) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + k_{\text{ж}}^y [\sin \beta \cos \beta_p \cos(\alpha - \alpha_p) - \cos \beta \sin \beta_p] = 0; \\
& J_{\text{э}} (\ddot{\alpha}_p \cos^2 \beta_p - 2 \dot{\alpha}_p \dot{\beta}_p \sin \beta_p \cos \beta_p) + J_{\text{п}} (\dot{\gamma} + \dot{\alpha}_p \sin \beta_p) \dot{\beta}_p \cos \beta_p + \\
& + k_{\text{ж}}^y (\alpha_p - \alpha) \cos \beta \cos \beta_p = -(J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \varepsilon \cos \beta_p (\ddot{\alpha}_p \sin \beta_p \cos \gamma + \\
& + \ddot{\gamma} \cos \gamma + 2 \dot{\alpha}_p \dot{\beta}_p \cos \beta_p \cos \gamma - 2 \dot{\alpha}_p \dot{\gamma} \sin \beta_p \sin \gamma - \\
& - \dot{\alpha}_p^2 \sin^2 \beta_p \sin^2 \gamma + \dot{\beta}_p^2 \sin \gamma - \dot{\gamma}^2 \sin \gamma); \quad (1) \\
& J_{\text{э}} (\ddot{\beta}_p + \dot{\alpha}_p^2 \sin \beta_p \cos \beta_p) - J_{\text{п}} (\dot{\gamma} + \dot{\alpha}_p \sin \beta_p) \dot{\beta}_p \cos \beta_p + \\
& + k_{\text{ж}}^y (\cos \beta \sin \beta_p \cos(\alpha - \alpha_p) - \sin \beta \cos \beta_p) = \\
& = -(J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \varepsilon (\ddot{\alpha}_p \sin \beta_p \sin \gamma + \ddot{\gamma} \sin \gamma + \\
& + 2 \dot{\alpha}_p \dot{\beta}_p \sin \beta_p \cos \gamma - \dot{\alpha}_p^2 \cos 2\beta_p \cos \gamma + \dot{\gamma}^2 \cos \gamma).
\end{aligned}$$

Здесь  $J_y^{\text{H}}, J_y^{\text{BH}}$  — моменты инерции наружной и внутренней рамок относительно оси наружной рамки  $y$ ;  $J_x^{\text{BH}}$  — момент инерции внутренней рамки относительно оси  $x$ ;  $\alpha_{\text{в}}$  — угол поворота внешней рамки карданова подвеса относительно основания;  $\beta_{\text{вн}}$  — угол поворота внутренней рамки относительно внешней;  $k_{\text{ж}}^y$  — коэффициент угловой жесткости газодинамической опоры ротора;  $\alpha_p, \beta_p, \gamma$  — углы ориентации ротора относительно неподвижного основания;  $J_z^{\text{BH}}$  — момент инерции внутренней рамки относительно оси внутренней рамки  $z$ ;  $J_{\text{э}}$  — экваториальный момент инерции ротора;  $J_{\text{п}}$  — полярный момент инерции ротора гироскопа;  $\varepsilon$  — малый угол между осью динамической симметрии ротора и осью собственного вращения ротора.

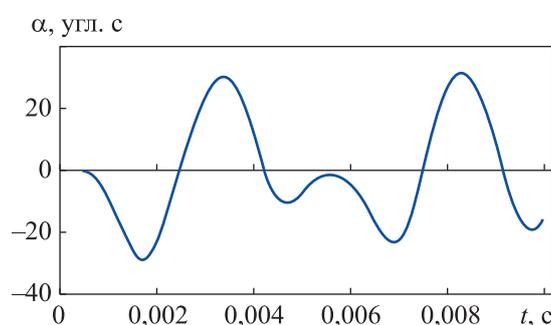
Для рассматриваемого поплавкового трехстепенного гироскопа на газодинамической опоре в случае малых углов  $\varepsilon, \alpha, \alpha_p, \beta, \beta_p$  с учетом вязкого сопротивления жидкости линеаризованная система уравнений (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& J_1 \ddot{\alpha} + \sigma \dot{\alpha} + k_{\text{ж}}^y (\alpha - \alpha_p) = 0; \\
& J_z^{\text{BH}} \ddot{\beta} + \sigma \dot{\beta} + k_{\text{ж}}^y (\beta - \beta_p) = 0; \quad (2) \\
& J_{\text{э}} \ddot{\alpha}_p + H \dot{\beta}_p + k_{\text{ж}}^y (\alpha_p - \alpha) = (J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \Omega^2 \varepsilon \sin \Omega t; \\
& J_{\text{э}} \ddot{\beta}_p - H \dot{\alpha}_p + k_{\text{ж}}^y (\beta_p - \beta) = -(J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \Omega^2 \varepsilon \cos \Omega t,
\end{aligned}$$

где  $J_1 = J_y^{\text{H}} + J_y^{\text{BH}} \cos^2 \beta + J_x^{\text{BH}} \sin^2 \beta$ ;  $\sigma$  — коэффициент демпфирования жидкости;  $H = J_{\text{п}} (\dot{\gamma} + \dot{\alpha}_p \sin \beta_p)$  — кинетический момент ротора;  $\Omega$  — угловая скорость вращения ротора.

Интегрирование системы уравнений (2) показывает, что наличие малого демпфирования в системе приводит к затуханию собственных нутационных колебаний, максимальная амплитуда которых не превышает 0,01 угл. с, т. е. собственные нутационные колебания в системе при малом демпфировании отсутствуют.

Остаточная динамическая несбалансированность ротора приводит к появлению вынужденных колебаний, амплитуда которых может на 2–3 порядка превышать максимальную амплитуду нутационных колебаний (рис. 1) в зависимости от динамической несбалансированности ротора и коэффициента демпфирования.



**Рис. 1.** Вынужденные колебания гироскопа за счет динамической несбалансированности ротора  $\varepsilon = 40$  угл. с при наличии демпфирования  $\sigma = 10$  сН · см · с

В рассматриваемой системе, имеющей в общем виде пять степеней свободы (уравнение движения вокруг собственной оси ротора не рассматривается), демпфирование несколько уменьшает амплитуду вынужденных колебаний, но не приводит к их затуханию.

**Анализ собственных частот гироскопа в зависимости от жесткости опоры ротора.** Проанализируем собственные частоты рассматриваемого прибора без учета и с учетом малого демпфирования в системе в зависимости от жесткости газодинамической опоры ротора. Определитель системы (2) с учетом  $J_1 \approx J_y^{BH} + J_y^H$  имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (J_y^{BH} + J_y^H)p^2 + \sigma p + k_{ж}^y & 0 & -k_{ж}^y & 0 \\ 0 & J_z^{BH} p^2 + \sigma p + k_{ж}^y & 0 & -k_{ж}^y \\ -k_{ж}^y & 0 & J_\omega p^2 + k_{ж}^y & H p \\ 0 & -k_{ж}^y & -H p & J_\omega p^2 + k_{ж}^y \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Запишем характеристическое уравнение системы:

$$a_{11}[a_{22}(a_{33}a_{44} - a_{43}a_{34}) + a_{24}(a_{32}a_{43} - a_{42}a_{33})] - a_{13}a_{31}(a_{22}a_{44} - a_{42}a_{24}) = 0, \quad (4)$$

где  $a_{ij}$  — элементы определителя (3).

Решение уравнения (4) позволяет сравнить собственные частоты системы с малым демпфированием  $\sigma = 1...30$  Н · с/м и собственные частоты системы в случае отсутствия демпфирования ( $\sigma = 0$ ). Для  $k_{ж}^y = 10^6$  сН · см/рад и  $\Omega = 2500$  рад/с результаты расчета значений собственных частот гироскопа приведены ниже:

$\sigma$ , сН · см · с .....	1	3	5	10	30
$\omega_1$ , рад/с	1303,7	1303,7	1303,69	1303,68	1302,82
$\omega_2$ , рад/с	2629,84	2629,8	42629,83	2629,81	2629,71
$\omega_3$ , рад/с	4650,83	4650,8	34650,82	4650,82	4650,8

Для малого коэффициента демпфирования  $\sigma = 1...10$  сН · см · с, имеющего место в системе, собственные частоты практически не отличаются от частот в том случае, если демпфирование в системе отсутствует:  $\sigma = 0$ .

**Критическая жесткость опоры ротора.** В случае динамической несбалансированности ротора частота возмущения равна угловой скорости его собственного вращения  $\Omega$ . Точка совпадения угловой скорости  $\Omega$  с собственной частотой системы является критической  $\Omega_{кр}$  [21]. Тогда амплитуды вынужденных колебаний рамок гироскопа существенно возрастают, т. е. наличие особых точек и явлений резонанса для большинства механических систем представляет опасность как с позиции снижения точности и нарушения нормальной работы, так и механического разрушения системы. В современных вибрационных устройствах, например МЭМС-гироскопах, резонанс определяет эффективность работы, диапазон измерения и масштабный коэффициент устройства [22, 23], т. е. резонансный режим является рабочим режимом прибора.

В рассматриваемом гироскопе собственные частоты системы зависят от угловой скорости вращения ротора и от жесткости газодинамической опоры. Для номинального значения угловой скорости вращения ротора можно найти критическую жесткость опоры  $k_{кр}$ , при которой частота возмущения, равная угловой скорости вращения ротора, может совпасть с одной из собственных частот системы. В этом случае также можно ожидать недопустимый рост амплитуд вынужденных колебаний рамок.

Авторами работы [24] отмечено, что для двухстепенных приборов на газодинамической опоре с 2017 г. по 2019 г. наблюдался «отказ нескольких десятков гироскопов по причине снижения точности работы гироскопов и/или заклинивания гироскопа. Проведенные исследования отказавших приборов подтвердили существенное снижение текущего состояния газодинамической опоры вплоть до заклинивания гироскопа». Разработанный в 2022 г. способ диагностики состояния газодинамической опоры двухстепенных гироскопов рассмотрен в [25].

Проанализируем вынужденные колебания в рассматриваемом трехстепенном гироскопе на газодинамической опоре. Если частное решение уравнений (2) искать в виде

$$\alpha = a_1 \sin(\Omega t + \gamma_0), \quad \alpha_p = a_2 \sin(\Omega t + \gamma_0);$$

$$\beta = b_1 \cos(\Omega t + \gamma_0), \quad \beta_p = b_2 \cos(\Omega t + \gamma_0),$$

то после их подстановки в исходную систему уравнений (2), получим

$$\begin{aligned} & \left[ J_1 \Omega^2 \sin(\Omega t + \gamma_0) - \sigma \Omega \cos(\Omega t + \gamma_0) - k_{\text{ж}}^y \sin(\Omega t + \gamma_0) \right] a_1 + \\ & + k_{\text{ж}}^y \sin(\Omega t + \gamma_0) a_2 = 0; \\ & \left[ J_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + \gamma_0) + \sigma \Omega \sin(\Omega t + \gamma_0) - k_{\text{ж}}^y \cos(\Omega t + \gamma_0) \right] b_1 + \\ & + k_{\text{ж}}^y \cos(\Omega t + \gamma_0) b_2 = 0; \\ & k_{\text{ж}}^y a_1 + (J_3 \Omega^2 - k_{\text{ж}}^y) a_2 + H \Omega b_2 = -(J_{\text{п}} - J_3) \Omega^2 \varepsilon; \\ & k_{\text{ж}}^y b_1 + H \Omega a_2 + (J_3 \Omega^2 - k_{\text{ж}}^y) b_2 = (J_{\text{п}} - J_3) \Omega^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Выше было показано, что частоты системы не зависят от наличия демпфирования, а амплитуды колебаний зависят от коэффициента демпфирования. Критические значения частот соответствуют максимальным значениям амплитуд. Проанализируем вынужденные колебания системы, вызываемые динамической несбалансированностью ротора, и определим параметры системы, при которых амплитуды колебаний достигают максимального значения. При отсутствии демпфирования амплитуды в критических точках предельно возрастают, а сами критические точки (частоты) в рассматриваемом диапазоне значений коэффициентов демпфирования не зависят от демпфирования. В этом случае система уравнений (5) принимает вид

$$(J_1 \Omega^2 - k_{\text{ж}}^y) a_1 + k_{\text{ж}}^y a_2 = 0;$$

$$(J_2 \Omega^2 - k_{\text{ж}}^y) b_1 + k_{\text{ж}}^y b_2 = 0;$$

$$k_{\text{ж}}^y a_1 + (J_{\text{э}} \Omega^2 - k_{\text{ж}}^y) a_2 + H \Omega b_2 = -(J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \Omega^2 \varepsilon;$$

$$k_{\text{ж}}^y b_1 + H \Omega a_2 + (J_{\text{э}} \Omega^2 - k_{\text{ж}}^y) b_2 = (J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \Omega^2 \varepsilon.$$

Амплитуды вынужденных колебаний:

$$a_1 = -\frac{(J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \varepsilon k_{\text{ж}}^y}{J_1} \frac{\Delta'_1}{\Delta'}; \quad a_2 = (J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_1} \right) \varepsilon \frac{\Delta'_3}{\Delta'};$$

$$b_1 = \frac{(J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \varepsilon k_{\text{ж}}^y}{J_2} \frac{\Delta'_2}{\Delta'}; \quad b_2 = -(J_{\text{п}} - J_{\text{э}}) \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_2} \right) \varepsilon \frac{\Delta'_4}{\Delta'},$$

где

$$\Delta'_1 = \Delta'_3 = (J_{\text{э}} + J_{\text{п}}) \Omega^2 - (J_{\text{э}} + J_{\text{п}} + J_2) \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_2};$$

$$\Delta'_2 = \Delta'_4 = (J_{\text{э}} + J_{\text{п}}) \Omega^2 - (J_{\text{э}} + J_{\text{п}} + J_1) \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_1};$$

$$\Delta' = J_{\text{п}}^2 \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_1} \right) \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_2} \right) - J_{\text{э}}^2 \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_2} - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_{\text{э}}} \right) \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_1} - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_{\text{э}}} \right).$$

Приравнявая определитель  $\Delta' = 0$ , получаем уравнение

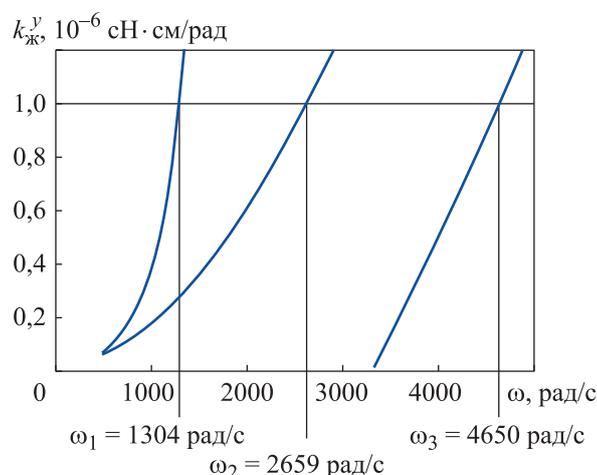
$$J_{\text{п}}^2 \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_1} \right) \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_2} \right) - J_{\text{э}}^2 \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_2} - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_{\text{э}}} \right) \left( \Omega^2 - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_1} - \frac{k_{\text{ж}}^y}{J_{\text{э}}} \right) = 0, \quad (6)$$

которое определяет критическое значение коэффициента жесткости опоры при номинальной скорости вращения ротора.

Решение уравнения (6) дает значение одного вещественного положительного корня критической жесткости опоры  $k_{\text{кр}}$  для каждого значения  $\Omega$ . Для номинального значения угловой скорости вращения ротора  $\Omega = 2500$  рад/с критическое значение жесткости опоры составит  $k_{\text{кр}} = 911194,601050002$  сН·см/рад.

Для коэффициента жесткости газодинамической опоры, например  $k_{\text{ж}}^y = 10^6$  сН·см/рад критическое значение угловой скорости вращения ротора  $\Omega_{\text{кр}} = 2618,99$  рад/с.

**Результаты.** Результаты расчета собственных частот в зависимости от коэффициента жесткости газодинамической опоры для номинального значения угловой скорости собственного вращения ротора  $\Omega = 2500$  рад/с ( $H = 700$  сН·см·с) с учетом малого демпфирования  $\sigma = 10$  сН·см·с показаны на рис. 2.



**Рис. 2.** Зависимость собственных частот гироскопа и коэффициента жесткости опоры при номинальной угловой скорости вращения ротора 2500 рад/с

Результаты анализа полученных данных показывают, что для каждого значения жесткости газодинамической опоры при рабочей частоте вращения ротора (см. рис. 2), так же, как и для каждого значения угловой скорости собственного вращения ротора при фиксированном значении коэффициента жесткости существуют три собственные частоты системы.

**Амплитуды вынужденных колебаний.** В критической точке (при критическом значении коэффициента жесткости опоры) максимальные амплитуды колебаний рамок можно записать в виде пределов:

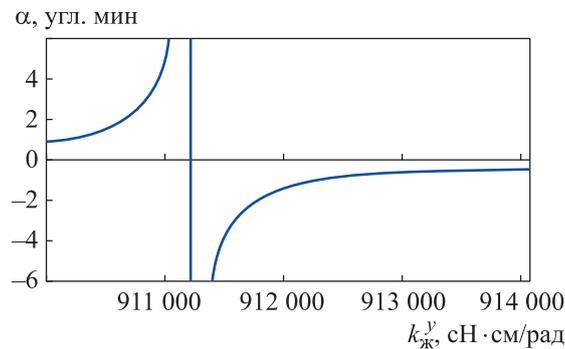
$$\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{кр}} a_1 = \frac{(J_{п} - J_{э})\Omega^2 \varepsilon k_{ж}^y}{J_1} \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{кр}} \frac{\Delta'_1}{\Delta'} = \infty;$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{кр}} a_2 = (J_{п} - J_{э}) \left( \Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{J_1} \right) \varepsilon \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{кр}} \frac{\Delta'_3}{\Delta'} = \infty;$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{кр}} b_1 = \frac{(J_{п} - J_{э})\varepsilon k_{ж}^y}{J_2} \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{кр}} \frac{\Delta'_2}{\Delta'} = \infty;$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{кр}} b_2 = (J_{п} - J_{э}) \left( \Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{J_2} \right) \varepsilon \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{кр}} \frac{\Delta'_1}{\Delta'} = \infty.$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний наружной рамки от коэффициента жесткости опоры при номинальной угловой скорости вращения ротора 2500 рад/с показана на рис. 3.



**Рис. 3.** Зависимость амплитуды вынужденных колебаний наружной рамки гироскопа от жесткости опоры при 2500 рад/с в окрестности критической точки

На кривой заметна точка, соответствующая критическому значению коэффициента жесткости опоры 911194,6 сН · см/рад, в которой наблюдается резкий рост амплитуды колебаний. Значение коэффициента жесткости совпадает с приведенным выше расчетным значением критической жесткости опоры.

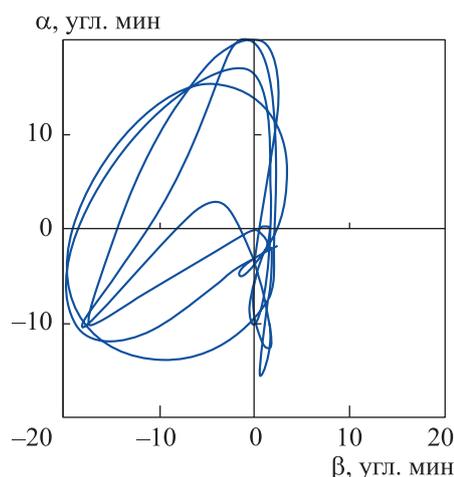
**Анализ движения апекса гироскопа в предельных случаях сочетания критических параметров.** Рассмотрим гипотезы о возможных изменениях расчетных параметров гироскопа, приводящих к резкому увеличению амплитуд вынужденных колебаний за счет динамической несбалансированности ротора и выходу гироскопа на упор.

*Гипотеза 1.* Повышенный коэффициент динамической несбалансированности ротора составляет  $\varepsilon = 20$  угл. мин, угловая скорость вращения ротора соответствует номинальной  $\Omega_{кр} = 2500$  рад/с, коэффициент жесткости газодинамической опоры  $k_{ж}^y = 10^6$  сН · см/рад, демпфирование в системе  $\sigma = 1 \dots 10$  сН · см · с. Численное интегрирование системы уравнений (1) показывает, что в этом случае гироскоп выходит на упор ( $\alpha_{max} = 18$  угл. мин, рис. 4).

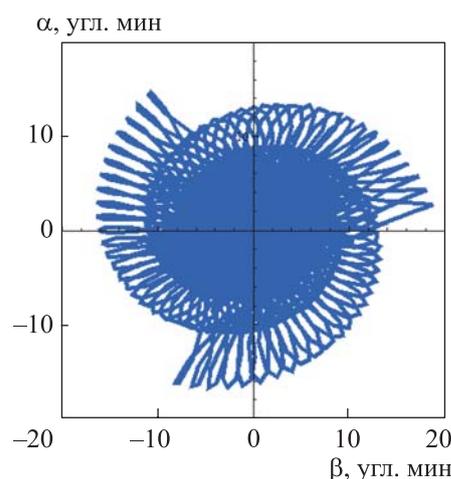
Такое превышение коэффициента динамической несбалансированности ротора маловероятно.

*Гипотеза 2.* Критическое значение угловой скорости вращения ротора составляет 2618,99 рад/с, т. е. номинальное значение 2500 рад/с должно возрасти на 4 %. Это невозможно, поскольку для питания используемого синхронного гистерезисного двигателя с управляемым скольжением применяют преобразователи с высокой стабильностью по частоте ( $10^{-3} \dots 10^{-2}$  %). Теоретически можно смоделировать ситуацию, когда угловая скорость вращения ротора попала бы в критическую точку.

Выход гироскопа на упор для критической точки при угловой скорости вращения 2618,99 рад/с ротора и наличии динамической несбалансированности ротора 80 угл. с, значении коэффициента жесткости газодинамической опоры  $10^6$  сН · см/рад и малом демпфировании  $\sigma < 1$  сН · см · с показан на рис. 5.



**Рис. 4.** Выход на упор гироскопа при  $\varepsilon = 20$  угл. мин,  $\Omega_{кр} = 2500$  рад/с,  $k_{ж}^y = 10^6$  сН · см/рад и  $\sigma = 1$  сН · см · с



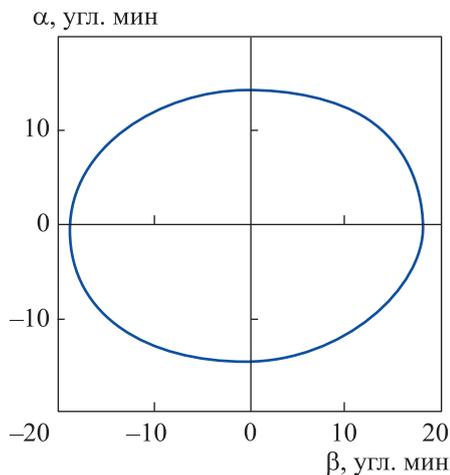
**Рис. 5.** Выход на упор гироскопа  $\varepsilon = 80$  угл. мин,  $\Omega_{кр} = 2618,99$  рад/с,  $k_{ж}^y = 10^6$  сН · см/рад и  $\sigma < 1$  сН · см · с

*Гипотеза 3.* Значение коэффициента жесткости газодинамической опоры попало в критическую точку  $k_{ж}^y = k_{кр} = 911194,6$  сН · см/рад. Решение уравнений (1) движения гироскопа при критическом значении  $k_{ж}^y = k_{кр} = 911194,6$ ,  $\Omega_{кр} = \Omega_{ном} = 2500$  рад/с при малом демпфировании в случае наличия динамической несбалансированности ротора 80 угл. с показывает резкое возрастание амплитуд рамок гироскопа. Движение апекса гироскопа на картинной плоскости для значений времени  $t_{нач} = 0,99$  с,  $t_{кон} = 0,995$  с, т. е. после выхода на упор, показано на рис. 6.

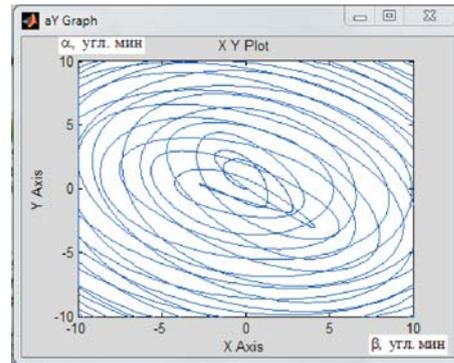
Результат моделирования движения апекса гироскопа в процессе выхода на упор на начальном участке для  $t_{нач} = 0$ ,  $t_{кон} = 0,1$  с приведен на рис. 7.

В случае увеличения демпфирования в 5 раз при тех же значениях коэффициента жесткости газодинамической опоры и коэффициента динамической несбалансированности ротора амплитуды колебаний рамок достигают значения 5 угл. мин, что составляет 1/3 зоны до выхода гироскопа на упор: факт попадания в критическую точку порождает недопу-

стимое увеличение амплитуды вынужденных колебаний рамок гироскопа за счет имеющейся остаточной динамической несбалансированности ротора даже при наличии демпфирования в системе.



**Рис. 6.** Выход на упор гироскопа при  $\Omega_{кр} = 2500$  рад/с,  $k_{ж}^y = k_{кр} = 911194,6$  сН · см/рад,  $\varepsilon = 80$  угл. с и  $\sigma = 2$  сН · см · с на конечном интервале времени



**Рис. 7.** Моделирование движения апекса гироскопа в Simulink MATLAB при  $\Omega_{кр} = 2500$  рад/с,  $k_{ж}^y = k_{кр} = 911194,6$  сН · см/рад,  $\varepsilon = 2$  угл. мин и  $\sigma = 2$  сН · см · с на начальном участке времени

Следовательно, выход свободного гироскопа на упор возможен при снижении в процессе эксплуатации коэффициента жесткости газодинамической опоры до критической точки при наличии повышенного коэффициента динамической несбалансированности ротора и заполнении прибора жидкостью из партии с пониженным коэффициентом вязкости.

**Заключение.** Выход гироскопа на упор возможен при значении коэффициента остаточной динамической несбалансированности ротора 20 угл. мин при любом возможном в этом приборе коэффициенте демпфирования и при номинальных значениях угловой скорости вращения ротора и коэффициента жесткости газодинамической опоры. Однако такое значение динамической несбалансированности ротора невозможно в рассматриваемом гироскопе.

Аналитический расчет показывает резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний рамок гироскопа при  $k_{ж}^y = k_{кр} = 911194,6$  сН · см/рад и  $\varepsilon = 4$  угл. с при малом демпфировании.

Численное интегрирование в Simulink MATLAB дифференциальных уравнений движения гироскопа с учетом вязкого трения жидкости и моделирование движения системы показывают, что выход гироскопа на упор возможен при критическом значении коэффициента жесткости газодинамической опоры  $k_{ж}^y = k_{кр} = 911194,6 \text{ сН} \cdot \text{см/рад}$  в случае неблагоприятного сочетания параметров прибора (повышенного коэффициента динамической несбалансированности ротора  $\varepsilon = 1 \dots 2$  угл. мин и заполнении прибора жидкостью из партии с пониженным коэффициентом вязкости).

На неподвижном основании для обеспечения минимальных амплитуд колебаний рамок при падении коэффициента жесткости опоры до критической точки  $k_{ж}^y = k_{кр} = 911194,6 \text{ сН} \cdot \text{см/рад}$  необходимо, чтобы динамическая несбалансированность ротора не превышала 5 угл. с при коэффициенте демпфирования  $\sigma = 10 \text{ сН} \cdot \text{см} \cdot \text{с}$ . При этом амплитуда вынужденных колебаний рамок не превысит 10 угл. с.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бесекерский В.А., Иванов В.А., Самошкин Б.Б. Орбитальное гирокомпасирование. СПб., Политехника, 1993.
- [2] Нехамкин Л.И., Рябиков В.С., Свирина М.А. и др. Особенности применения трехстепенного гироскопа ГПА-Л2-2 в контуре управления ориентацией космического аппарата. *Авиакосмическое приборостроение*, 2014, № 1, с. 35–43.
- [3] Валько А.Д., Гаранкин В.А., Исаев В.А. Движение трехстепенного гироскопа с динамически несбалансированным ротором при контакте внутренней рамки с упругим ограничителем. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1989, № 2, с. 25–29.
- [4] Мартыненко Ю.Г., Рябиков В.С., Щеглова Н.Н. и др. Движение трехстепенного поплавкового гироскопа при его контактах с упором. *Гироскопия и навигация*, 2006, № 2, с. 51–61.
- [5] Бабаков И.М. Теория колебаний. М., Наука, 1968.
- [6] Булгаков Б.В. Колебания. М., Гостехиздат, 1954.
- [7] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М., Наука, 1988.
- [8] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
- [9] Нетушил А.В., ред. Теория автоматического управления. М., Высш. шк., 1967.
- [10] Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. М., Машиностроение, 1985.

- [11] Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
- [12] Plymale B.T., Goodstein R. Nutation of a free gyro subjected to an impulse. *J. Appl. Mech.*, 1955, vol. 22, iss. 3, pp. 365–366. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011089>
- [13] Magnus K. Beiträge zur Dynamik des kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1955, vol. 35, no. 1-2, pp. 23–34.
- [14] Пельпор Д.С., ред. Гироскопические приборы и системы. М., Высш. шк., 1988.
- [15] Борзов В.И. О влиянии упругости опор оси внутреннего кольца карданова подвеса на нутационные колебания и уход гироскопа. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1969, № 3, с. 36–42.
- [16] Харламов С.А. О влиянии упругости опор оси внешнего кольца карданова подвеса на нутационные колебания и уход гироскопа. *Докл. АН СССР*, 1962, т. 142, № 5, с. 1054–1057.
- [17] Руденко В.М. Исследование динамики астатического гироскопа с упругим кардановым подвесом. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1978, № 1, с. 15–21.
- [18] Андрейченко К.П. К теории жидкостного демпфирования в поплавковых приборах. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1977, № 5, с. 13–23.
- [19] Городецкий О.М. Исследование возмущающих моментов сил вязкого трения в подвесе поплавкового гироскопа. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1977, № 1, с. 10–16.
- [20] Мартыненко Ю.Г. Динамика сферического поплавкового гироскопа в кардановом подвесе. *Изв. АН СССР. МТТ*, 1968, № 4, с. 28–32.
- [21] Климов Д.М., Харламов С.А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М., Наука, 1978.
- [22] Ван Хао Ло, Нестеренко Т.Г. Система резонансной настройки вибрационного многокомпонентного МЭМС-гироскопа. *Известия высших учебных заведений. Электроника*, 2019, т. 24, № 3, с. 267–278.  
DOI: <https://doi.org/10.24151/1561-5405-2019-24-3-267-278>
- [23] Науменко Д.В. Моделирование чувствительного элемента вибрационного микромеханического гироскопа. *КомпТех–2019. Матер. Всерос. науч.-тех. конф.* Таганрог, Изд-во ЮФУ, 2019, с. 263–268.
- [24] Шарыгин Б.Л., Буцик А.Я., Демидов А.Н. Способ диагностики состояния газодинамической опоры ротора поплавкового гироскопа. Патент РФ 2690231. Заявл. 09.07.2018, опубл. 31.05.2019.
- [25] Шарыгин Б.Л., Бутенко М.В., Маринченко А.Н. Способ технического обслуживания системы инерциальной навигации и стабилизации. Патент РФ 2784704. Заявл. 04.10.2021, опубл. 29.11.2022.

**Щеглова Наталья Николаевна** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Щеглова Н.Н. Анализ критических значений параметров трехстепенного гироскопа с остаточной динамической несбалансированностью ротора. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2024, № 1 (146), с. 57–73.

EDN: DFRFOR

**ANALYZING CRITICAL PARAMETERS OF THE ATTITUDE  
GYRO WITH THE ROTOR RESIDUAL DYNAMIC IMBALANCE**

N.N. Shcheglova

shegnatnik@bmstu.ru

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

The paper analyzes parameters of the attitude gyro on a gas-dynamic support with the rotor residual dynamic imbalance in the free gyro mode, as well as conditions and reasons causing the gyro unexpected passage to stop during the experiment. It was established that sharp increase in the forced oscillations amplitude of the gyro frames up to touching the stops could occur with simultaneous confluence of several unfavorable factors. These factors include decrease during operation in the stiffness coefficient of the gas-dynamic support to a critical point in case of the increasing rotor dynamic imbalance coefficient and filling the device with liquid with the reduced viscosity coefficient. Critical point of the gas-dynamic support stiffness coefficient was found for the nominal values of the rotor rotation angular velocity and the frame forced oscillations amplitude by the rotor dynamic imbalance. A relationship was obtained between critical values of the gas-dynamic support stiffness, which could wear out during the long-term continuous operation, and the rotor natural angular rotation velocity. Values of the rotor dynamic imbalance coefficient and the fluid viscosity coefficient were determined, for which the gyro frames oscillations amplitude would not exceed 10 arc in case of combining the gas-dynamic support stiffness value with the critical point

**Keywords**

*Floated gyro, gas-dynamic support stiffness, rotor dynamic imbalance, natural frequencies, critical stiffness, gyro passage to stop*

Received 05.07.2023

Accepted 11.09.2023

© Author(s), 2024

## REFERENCES

- [1] Besekerskiy V.A., Ivanov V.A., Samotokin B.B. Orbitalnoe girokompasirovanie [Orbital gyrocompassing]. St. Petersburg, Politekhnik Publ., 1993.
- [2] Nekhamkin L.I., Ryabikov V.S., Svirina M.A., et al. Peculiarities of application 3-power gyro GPA-L2-2 in the circuit controlling the KA orientation of the spacecraft. *Aviakosmicheskoe priborostroenie* [Aerospace Instrument-Making], 2014, no. 1, pp. 35–43 (in Russ.).
- [3] Valko A.D., Garankin V.A., Isaev V.A. Movement of a three-stage gyroscope with a dynamically unbalanced rotor when the inner frame contacts an elastic limiter. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1989, no. 2, pp. 25–29 (in Russ.).
- [4] Martynenko Yu.G., Ryabikov V.S., Shcheglova N.N., et al. The movement of a three-stage float gyroscope at its contact with the stop. *Giroskopiya i navigatsiya*, 2006, no. 2, pp. 51–61 (in Russ.).
- [5] Babakov I.M. Teoriya kolebaniy [Theory of oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1968.
- [6] Bulgakov B.V. Kolebaniya [Oscillations]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1954.
- [7] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. Prikladnye metody v teorii kolebaniy [Applied methods in the theory of oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1988.
- [8] Ilin M.M., Kolesnikov K.S., Saratov Yu.S. Teoriya kolebaniy [Theory of oscillations]. Moscow, BMSTU Publ., 2001.
- [9] Netushil A.V., ed. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya [Theory of automatic control]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967.
- [10] Solodovnikov V.V., Plotnikov V.N., Yakovlev A.V. Osnovy teorii i elementy sistem avtomaticheskogo regulirovaniya [Fundamentals of theory and elements of automatic control systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985.
- [11] Ishlinskiy A.Yu. Mekhanika giroskopicheskikh sistem [Mechanics of gyroscopic systems]. Moscow, AN SSSR Publ., 1963.
- [12] Plymale B.T., Goodstein R. Nutation of a free gyro subjected to an impulse. *J. Appl. Mech.*, 1955, vol. 22, iss. 3, pp. 365–366. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011089>
- [13] Magnus K. Beiträge zur Dynamik des kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1955, vol. 35, no. 1-2, pp. 23–34.
- [14] Pelpor D.S., ed. Giroskopicheskie pribory i sistemy [Gyroscopic devices and systems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1988.
- [15] Borzov V.I. On the influence of the elasticity of the supports of the axis of the inner ring of the cardan suspension on nutation oscillations and the departure of the gyroscope. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1969, no. 3, pp. 36–42 (in Russ.).
- [16] Kharlamov S.A. The influence of elasticity in the axis bearing of the external ring in a Cardan suspension on the nutation and drift of a gyroscope. *Dokl. AN SSSR*, 1962, vol. 142, no. 5, pp. 1054–1057 (in Russ.).

- [17] Rudenko V.M. Investigation of dynamics of an astatic gyroscope with elastic cardan suspension. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1978, no. 1, pp. 15–21 (in Russ.).
- [18] Andreychenko K.P. To theory of liquid damping in float devices. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1977, no. 5, pp. 13–23 (in Russ.).
- [19] Gorodetskiy O.M. Investigation of disturbing moments of viscous friction forces in the sub-weight of a float gyroscope. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1977, no. 1, pp. 10–16 (in Russ.).
- [20] Martynenko Yu.G. Dynamics of a spherical float gyroscope in a gimbal suspension. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1968, no. 4, pp. 28–32 (in Russ.).
- [21] Klimov D.M., Kharlamov S.A. *Dinamika giroskopa v kardanovom podvese* [Dynamics of a gyroscope in gimbals]. Moscow, Nauka Publ., 1978.
- [22] Van Khao Lo, Nesterenko T.G. Resonant tuning system of MEMS multi-axis vibrating gyroscope. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Elektronika* [Proceedings of Universities. Electronics], 2019, vol. 24, no. 3, pp. 267–278 (in Russ.).  
DOI: <https://doi.org/10.24151/1561-5405-2019-24-3-267-278>
- [23] Naumenko D.V. [Simulation of the micromechanical gyroscope sensor]. *KompTekh–2019. Mater. Vseros. nauch.-tekh. konf.* [CompTech–2019. Proc. Russ. Sci.-Pract. Conf.]. Taganrog, SFU, 2019, pp. 263–268 (in Russ.).
- [24] Sharygin B.L., Butsik A.Ya., Demidov A.N. Sposob diagnostiki sostoyaniya gazodinamicheskoy opory rotora poplavkovogo giroskopa [Method of diagnostics of state of gas-dynamic support of float gyro rotor]. Patent RU 2690231. Appl. 09.07.2018, publ. 31.05.2019 (in Russ.).
- [25] Sharygin B.L., Butenko M.V., Marinchenko A.N. Sposob tekhnicheskogo obsluzhivaniya sistemy inertsiyalnoy navigatsii i stabilizatsii [Method for maintenance of system of inertial navigation and stabilization]. Patent RU 2784704. Appl. 04.10.2021, publ. 29.11.2022 (in Russ.).

**Shcheglova N.N.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Devices and Systems for Orientation, Stabilization and Navigation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Shcheglova N.N. Analyzing critical parameters of the attitude gyro with the rotor residual dynamic imbalance. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2024, no. 1 (146), pp. 57–73 (in Russ.). EDN: DFRFOR