

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С МЯГКОЙ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ С ВИБРИРУЮЩИМ ШТАМПОМ ЧЕРЕЗ СЛОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В.С. Попов^{1,2}

А.А. Попова¹

М.В. Попова^{1,3}

А.В. Христофорова³

vic_p@bk.ru

anay_p@bk.ru

mari.popova.2004@internet.ru

alevtinahristoforova@yandex.ru

¹ СГТУ имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Российская Федерация

² ИПТМУ РАН, г. Саратов, Российская Федерация

³ СГУ, г. Саратов, Российская Федерация

Аннотация

Предложена математическая модель взаимодействия пластины и слоя вязкой жидкости, находящейся между ней и вибрирующим штампом, с учетом нелинейности свойств упругого основания пластины. Изучены вынужденные нелинейные гидроупругие колебания пластины, удовлетворяющей гипотезам Кирхгофа, на основании с мягкой кубической нелинейностью. Поставлена связанная задача гидроупругости для рассматриваемой колебательной системы. Математическая модель состоит из системы уравнений динамики вязкой жидкости и пластины Кирхгофа на нелинейно-упругом основании. Система дополнена краевыми условиями на границах контакта жидкости с пластиной и штампом, а также условиями на торцах рассматриваемого канала. Проведен асимптотический анализ поставленной задачи гидроупругости и решены упрощенные уравнения движения вязкой жидкости методом итерации. Определено распределение давления и получено нелинейное интегродифференциальное уравнение изгибных колебаний пластины, возбуждаемых вибрирующим штампом. Данное уравнение решено методом Бубнова — Галеркина. Показано, что рассматриваемая задача может быть сведена к исследованию обобщенного уравнения Дуффинга, которое решено методом гармонического баланса. Найден основной нели-

Ключевые слова

Математическое моделирование, нелинейные колебания, гидроупругий отклик, пластина, вязкая жидкость, вибрирующий штамп, нелинейно-упругое основание, мягкая нелинейность

нейный гидроупругий отклик и фазовый сдвиг пластины. Проведено численное исследование данных характеристик, позволяющее прийти к выводу о важности учета инерции движения вязкой жидкости и упругих свойств основания пластины

Поступила 21.02.2023

Принята 02.03.2023

© Автор(ы), 2023

Работа поддержана грантом РФФИ № 23-29-00159

Введение. Развитие современного приборостроения тесно связано с фундаментальными проблемами математической физики по созданию математических моделей, максимально приближенных к оригиналу. Например, необходимость разработки математических моделей взаимодействия упругих элементов конструкций с жидкостью или газом может возникнуть в ходе создания датчиков давления [1, 2], гироскопических приборов [3, 4], систем демпфирования колебаний микромеханических приборов [5], систем жидкостного охлаждения [6], а также аппаратуры неразрушающего контроля [7]. Обзор современных подходов к построению таких моделей приведен в [8–10]. При этом в большинстве случаев при изучении вопросов динамики взаимодействия упругой конструкции с жидкостью используется модель идеальной жидкости. Например, в [11] предложена математическая модель динамики взаимодействия круглой пластины и идеальной жидкости для датчика системы измерения давления рабочей среды в двигателе. Исследование динамики взаимодействия дна цилиндрического резервуара с жесткими стенками, представляемого круглой пластиной на основании Пастернака, с находящейся в нем идеальной жидкостью в рамках разработки системы подавления данных колебаний, проведено в [12]. Подавление осуществляется за счет контура обратной связи и управляющего воздействия на плавающую смарт пьезосэндвичпанель — крышу резервуара. В ряде практических случаев вязкость жидкости является основным демпфирующим фактором и пренебрежение ею необосновано. Например, в [13] исследованы установившиеся колебания тонкого слоя вязкой жидкости и ограничивающих его двух бесконечно длинных пластин, возбуждаемые пульсацией давления в жидкости. Рассмотрена линейная связанная задача гидроупругости канала, установленного на основании Винклера применительно к исследованию частотных и фазовых характеристик механического фильтра. Аналогичная задача исследована в [14] для случая пластин конечной длины. Динамика взаимодействия консольной балки с окружающей ее вязкой несжимаемой жидкостью в плоской линейной постановке исследована в [15] в рамках изучения переноса энергии в балочных структурах для создания рыбоподобных под-

водных механизмов. Динамика взаимодействия торцевой стенки узкого канала с параллельными стенками с находящейся в нем вязкой несжимаемой жидкостью рассмотрена в [16]. Исследованы нелинейные колебания торцевой стенки на базе модели масса–пружина с жесткой нелинейностью и рассмотрен вопрос применения построенной модели для изучения частотных характеристик демпфера сильфонного типа. Исследование нелинейных колебаний жесткой стенки узкого канала, вызванных ее взаимодействием с противоположной вибрирующей стенкой через слой вязкой жидкости между ними, выполнено в [17]. Рассмотрен случай подвеса жесткой стенки на пружине, имеющей характеристику с кубической нелинейностью восстанавливающей силы при ползущем движении жидкости в зазоре между стенками. Однако практически нет работ, в которых исследуется влияние на гидроупругие колебания нелинейно-упругого основания узкого канала с вибрирующей стенкой и инерции движения вязкой жидкости в нем.

Постановка задачи гидроупругости, принятые допущения. Рассмотрим узкий канал с параллельными стенками, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью (рис. 1). Нижняя стенка канала представляет собой пластину на нелинейно-упругом основании, а верхняя стенка — абсолютно жесткий штамп, совершающий гармонические колебания в вертикальном направлении. Упругое основание пластины имеет характеристику с мягкой кубической нелинейностью, т. е. рассматривается как обобщение основания Винклера путем введения дополнительного слагаемого, пропорционального кубу прогиба пластины с отрицательным коэффициентом жесткости при нем [18, 19]. Полагаем, что один из размеров канала в плане значительно больше другого и исследуем плоскую задачу, вводя в рассмотрение декартову систему координат x, z , начало которой совпадает с геометрическим центром срединной поверхности пластины в невозмущенном состоянии. Пластина шарнирно оперта на торцах, ее толщина h_0 значительно меньше протяженности $2l$ канала. Пластина совершает установившиеся вынужденные нелинейные изгибные колебания за счет вибрации штампа [20]. Амплитуда данных колебаний w_m и амплитуда колебаний штампа z_m считаются значительно меньшими, чем толщина слоя жидкости δ_0 между ними в невозмущенном состоянии. На торцах канала предполагается наличие объемных полостей, заполненных той же жидкостью, что и жидкость в канале, т. е. торцевое истечение жидкости из канала происходит в среду той же плотности и вязкости, давление в которой считается постоянным и принимается за начало отсчета давления в канале.

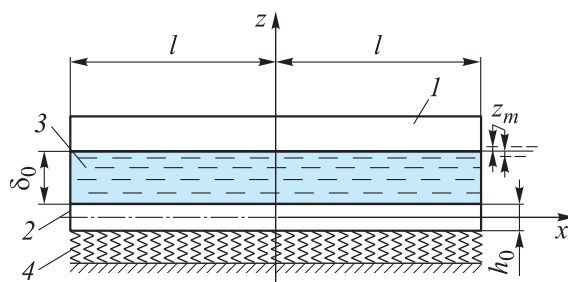


Рис. 1. Схема плоского канала с параллельными стенками:

1 — вибрирующий абсолютно жесткий штамп; 2 — упругая пластина;
3 — вязкая несжимаемая жидкость; 4 — нелинейно-упругое основание

Считаем, что колебания штампа подчиняются гармоническому закону

$$z = z_m f(\omega t); \quad f(\omega t) = -\cos \omega t, \quad (1)$$

где ω — заданная частота колебаний штампа или частота вынуждающего воздействия со стороны штампа; t — время.

Полагаем, что для пластины справедливы гипотезы Кирхгофа, тогда уравнение ее динамики [21] с учетом реакций со стороны слоя жидкости в канале и нелинейного основания может быть записано в виде

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_n - q_f, \quad (2)$$

где $D = Eh_0^3 / (12(1 - \mu_0^2))$ — цилиндрическая жесткость пластины (E — модуль Юнга материала пластины; μ_0 — коэффициент Пуассона материала пластины); w — прогиб пластины; ρ_0 — плотность материала пластины; q_n — нормальное напряжение жидкости на поверхности пластины; q_f — напряжение, действующее на пластину со стороны нелинейного основания.

Нормальное напряжение q_n вязкой жидкости на поверхности пластины, контактирующей с ней, согласно [22], запишем как

$$q_n = -p + 2\rho v \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = \frac{h_0}{2} + w, \quad (3)$$

где p и ρ — давление и плотность вязкой жидкости; v — коэффициент кинематической вязкости жидкости; V_z — проекция скорости жидкости на ось z .

Напряжение q_f , обусловленное взаимодействием пластины с основанием, имеющим мягкую кубическую нелинейность [18, 19], представим так:

$$q_f = \chi w - \beta w^3, \quad (4)$$

где χ — коэффициент жесткости при линейной составляющей реакции основания; $\beta > 0$ — коэффициент жесткости при кубической составляющей реакции основания.

Согласно (3), уравнение (2) требует совместного рассмотрения с уравнениями динамики вязкой несжимаемой жидкости, которые для рассматриваемой постановки имеют вид [22]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Краевые условия системы (2), (5) представляют собой условия шарнирного опирания пластины на ее торцах:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = -l; \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = l; \quad (6)$$

условия совпадения скоростей границ контакта вязкой жидкости и ограничивающих ее стенок:

$$\begin{aligned} V_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad V_z = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{при } z = \frac{h_0}{2} + w; \\ V_x = 0, \quad V_z = z_m \frac{df(\omega t)}{dt} \quad \text{при } z = \frac{h_0}{2} + \delta_0 + z_m f(\omega t), \end{aligned} \quad (7)$$

а также условия равенства нулю давления на торцах канала:

$$p = 0 \quad \text{при } x = -l; \quad p = 0 \quad \text{при } x = l. \quad (8)$$

В (5), (7) использованы следующие обозначения: V_x , V_z — проекции вектора скорости вязкой жидкости на оси координат; u — продольное перемещение пластины.

Асимптотический анализ задачи гидроупругости методом возмущений. Для проведения анализа перейдем к следующим безразмерным переменным и выделим характерные малые параметры задачи:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}; \quad \zeta = \frac{z-h_0/2}{\delta}; \quad \tau = \theta t; \quad V_x = \frac{w_m \theta}{\psi} U_\xi; \\ V_z &= w_m \theta U_\zeta; \quad p = \frac{\rho v w_m \theta}{\delta_0 \psi^2} P; \quad w = w_m W; \quad u = u_m U; \\ \psi &= \frac{\delta_0}{l} \ll 1; \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta_0} \ll 1; \quad \frac{w_m}{\delta_0} \ll 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\theta = 1/T$ — характерная частота нелинейных колебаний пластины; T — характерное время (период) нелинейных колебаний пластины. Кроме того, будем учитывать, что в рассматриваемой постановке $z_m / w_m = O(1)$, $u_m / w_m = O(1)$.

Подставляя (9) в (2)–(8), получаем безразмерные уравнения гидроупругости

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{\chi l^4}{D} W - \frac{\beta l^6}{D} \left(\frac{w_m}{l} \right)^2 W^3 = \\ & = - \frac{l^4 \rho_0 h_0 \theta^2}{D} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\rho v}{\rho_0 h_0 \theta \delta_0 \psi^2} \left(P - 2 \psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] \Big|_{\zeta = \lambda W}; \\ & \frac{\theta \delta_0^2}{v} \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}; \\ & \psi^2 \frac{\eta \delta_0^2}{v} \left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2 \left[\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right]; \\ & \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

а также соответствующие им краевые условия

$$\begin{aligned} W &= \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \text{ при } \xi = -1; \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \text{ при } \xi = 1; \\ U_\xi &= \psi \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial U}{\partial \tau}, \quad U_\zeta = \frac{\partial W}{\partial \tau} \text{ при } \zeta = \lambda W; \\ U_\xi &= 0, \quad U_\zeta = \frac{z_m}{w_m} \frac{df(\omega\tau/\theta)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1 + \lambda \frac{z_m}{w_m} f(\omega\tau/\theta); \\ P &= 0 \text{ при } \xi = -1; \quad P = 0 \text{ при } \xi = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Пренебрегая в (10) членами при ψ и ψ^2 , что соответствует тонкому слою жидкости [22], и раскладывая искомые функции по степеням малого параметра λ [23] как

$$\begin{aligned} P &= P^0 + \lambda P^1 + \dots; \quad U_\zeta = U_\zeta^0 + \lambda U_\zeta^1 + \dots; \\ U_\xi &= U_\xi^0 + \lambda U_\xi^1 + \dots; \quad W = W^0 + \lambda W^1 + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

для первых членов (12) получаем следующую задачу (верхний индекс нуль далее опущен):

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{\chi l^4}{D} W - \frac{\beta l^6}{D} \left(\frac{w_m}{l} \right)^2 W^3 = - \frac{l^4 \rho_0 h_0 \theta^2}{D} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\rho v}{\rho_0 h_0 \theta \delta_0 \psi^2} P \right]; \quad (13)$$

$$\frac{\theta \delta_0^2}{\nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0; \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0 \quad (14)$$

с краевыми условиями

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = \pm 1; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} U_\xi &= 0, \quad U_\zeta = \frac{\partial W}{\partial \tau} \quad \text{при } \zeta = 0; \quad U_\xi = 0; \\ U_\zeta &= \frac{z_m}{w_m} \frac{df(\omega\tau/\theta)}{d\tau} \quad \text{при } \zeta = 1; \quad P = 0 \quad \text{при } \xi = \pm 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Распределение давления в слое жидкости, уравнение гидроупругих колебаний пластины. Уравнения (14) с краевыми условиями (16) решаем методом итерации аналогично [24]. На первой итерации опускаем в (14) инерционный член $\partial U_\xi / \partial \tau$, что соответствует рассмотрению ползущего движения вязкой жидкости [22]. На второй итерации учитываем найденную на первой итерации компоненту скорости U_ξ в инерционном члене $\partial U_\xi / \partial \tau$. Решив полученную задачу, определим закон распределения давления, входящий в правую часть (13), в виде

$$\begin{aligned} P &= \frac{z_m}{w_m} \frac{\xi^2 - 1}{2} \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2 \theta}{\nu} \frac{d^2 f}{d\tau^2} + 12 \frac{df}{d\tau} \right) + \int_{\xi}^1 \int_{\xi} \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2 \theta}{\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12 \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} (\xi - 1) \int_{-1}^1 \int_{-1} \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2 \theta}{\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12 \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (17) в правую часть (13), получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение изгибных гидроупругих колебаний пластины на упругом основании с мягкой кубической нелинейностью, записанное в размерном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{l^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \chi w - \beta w^3 + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \\ & = -\frac{\rho v}{\delta_0 \Psi^2} \left(\int_{\xi}^1 \int_{\xi} \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2}{v} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 12 \frac{\partial w}{\partial t} \right) d\xi d\xi - \frac{\xi-1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1} \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2}{v} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 12 \frac{\partial w}{\partial t} \right) d\xi d\xi \right) - \\ & - \frac{\xi^2-1}{2} \frac{\rho v}{\delta_0 \Psi^2} \left(\frac{6}{5} \frac{\delta^2}{v} z_m \frac{d^2 f(\omega t)}{dt^2} + 12 z_m \frac{df(\omega t)}{dt} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, если в правой части (18) опустить члены со вторыми производными по времени, то получим уравнение, соответствующее закону распределения давления на первой итерации, т. е. ползущему движению вязкой жидкости в узком канале.

Определение гидроупругого отклика пластины и его исследование. Решим (18) с краевыми условиями (15) методом Бубнова — Галеркина, представляя форму решения как

$$w = w_m W = \sum_{k=1}^n R_k(t) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi. \quad (19)$$

Здесь $R_k(t)$ — неизвестные функции времени; n — число удерживаемых членов ряда.

Принимая во внимание демпфирующие свойства слоя вязкой жидкости ограничимся рассмотрением основной формы колебаний, т. е. положим $n = 1$. Проводя процедуру метода Бубнова — Галеркина [25], получаем

$$\begin{aligned} & (\rho_0 h_0 + M_1) \frac{d^2 R_1}{dt^2} + K_1 \frac{dR_1}{dt} + \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{D}{l^4} + \chi \right] R_1 - \frac{3}{4} \beta R_1^3 = \\ & = M_1^z z_m \frac{d^2 f(\omega t)}{dt^2} + K_1^z z_m \frac{df(\omega t)}{dt}, \end{aligned} \quad (20)$$

а учитывая (1) в (20), имеем

$$\begin{aligned} & (\rho_0 h_0 + M_1) \frac{d^2 R_1}{dt^2} + K_1 \frac{dR_1}{dt} + \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{D}{l^4} + \chi \right] R_1 - \frac{3}{4} \beta R_1^3 = \\ & = z_m \omega A(\omega) \sin(\omega t + \gamma(\omega)). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$A(\omega) = \sqrt{(M_1^z \omega)^2 + (K_1^z)^2}; \quad \operatorname{tg} \gamma(\omega) = \frac{M_1^z \omega}{K_1^z}; \quad K_1^z = \frac{192}{\pi^3} \frac{v \rho}{\delta_0 \Psi^2};$$

$$K_1 = \frac{48}{\pi^2} \frac{\nu\rho}{\delta_0\psi^2}; \quad M_1 = \frac{24}{5\pi^2} \frac{\rho\delta_0}{\psi^2}; \quad M_1^z = \frac{96}{5\pi^3} \frac{\rho\delta_0}{\psi^2}.$$

В результате получено обобщенное уравнение осциллятора Дуффинга [20]. В данное уравнение входят присоединенные массы M_1 , M_1^z , коэффициенты демпфирования K_1 , K_1^z , которые определяются физическими свойствами жидкости и геометрическими размерами канала, а также коэффициенты, определяющие жесткость пластины и упругого основания с мягкой нелинейностью. Отметим, что при $M_1^z = M_1 = 0$ из (21) следует уравнение для случая ползущего движения вязкой жидкости. Если в (21) положить $\beta = 0$, то получим линейный случай пластины на основании Винклера, а если положить $\chi = \beta = 0$ — то случай линейных гидроупругих колебаний шарнирно опертой пластины. Таким образом показано, что рассматриваемая задача сводится к исследованию обобщенного уравнения Дуффинга.

Уравнение Дуффинга имеет периодическое решение [20], поэтому найдем такое решение для (21) с помощью метода гармонического баланса [26]. Положим частоту нелинейных колебаний пластины мало отличной от частоты вибраций штампа $\theta = \omega$, а также примем во внимание, что вязкое трение в колебательной системе проявляется в виде реакции пластины с фазовым сдвигом φ . Учтем данный сдвиг φ в правой части (21), т. е. запишем $z_m\omega A(\omega) \sin(\omega t + \gamma + \varphi)$, а решение (21) представим усеченным рядом Фурье

$$R_1 = R_m \sin(\omega t + \gamma). \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21) и раскладывая нелинейный член уравнения в ряд (22), получаем:

$$\begin{aligned} & \left[(\pi/(2l))^4 D + \chi - \frac{9}{16} \beta R_m^2 - (\rho_0 h_0 + M_1) \omega^2 \right] R_m \sin(\omega t + \gamma) + \\ & + K_1 \omega R_m \cos(\omega t + \gamma) = \\ & = z_m \omega A(\omega) (\sin(\omega t + \gamma) \cos \varphi + \cos(\omega t + \gamma) \sin \varphi). \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что $z_m\omega$ в (23) есть амплитуда виброскорости штампа. Зададим ее через виброперегрузку по скорости, считая $z_m\omega = k \cdot 1$, где k — коэффициент виброперегрузки по скорости. В результате из (23) получаем систему

$$\left[(\pi / (2l))^4 D + \chi - \frac{9}{16} \beta R_m^2 - (\rho_0 h_0 + M_1) \omega^2 \right] R_m = kA(\omega) \cos \varphi; \quad (24)$$

$$K_1 \omega R_m = kA(\omega) \sin \varphi.$$

Из (24) находим основной нелинейный гидроупругий отклик пластины

$$R_m = \frac{k \sqrt{(M_1^z \omega)^2 + (K_1^z)^2} / (\rho_0 h_0 + M_1)}{\sqrt{(\omega_*^2 - \omega^2)^2 + (K_1 \omega / (\rho_0 h_0 + M_1))^2}} \quad (25)$$

и фазовый сдвиг

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{K_1 \omega / (\rho_0 h_0 + M_1)}{\omega_*^2 - \omega^2}. \quad (26)$$

В (25) и (26) $\omega_*^2 = (\chi + (\pi / (2l))^4 D - \beta R_m^2 \cdot 9 / 16) / (\rho_0 h_0 + M_1)$ — скелетная кривая, т. е. характеристика собственной частоты рассматриваемой нелинейной системы при $K_1 = 0$.

Введем безразмерную частоту η из условия

$$\eta^2 = \omega^2 \left[(\chi + (\pi / (2l))^4 D) / (\rho_0 h_0 + M_1) \right]^{-1},$$

тогда (25) запишем как

$$R_m = \frac{k \sqrt{(M_1^z)^2 \eta^2 (\chi + (\pi / (2l))^4 D) / (\rho_0 h_0 + M_1) + (K_1^z)^2} / (\chi + (\pi / (2l))^4 D)}{\sqrt{(\eta_*^2 - \eta^2)^2 + S^2 \eta^2}}, \quad (27)$$

а (26) приобретает вид

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S \eta}{\eta_*^2 - \eta^2}, \quad (28)$$

где $\eta_*^2 = 1 - (9/16) \beta R_m^2 \left[(\pi / (2l))^4 D + \chi \right]^{-1}$ — безразмерная скелетная линия и $S^2 = K_1^2 / (\rho_0 h_0 + M_1) \left[(\pi / (2l))^4 D + \chi \right]^{-1}$.

Отметим, что полученные размерные (25), (26) и безразмерные выражения (27), (28) для гидроупругого отклика пластины и фазового сдвига при $\beta = 0$ соответствуют случаю пластины на линейно-упругом осно-

вании Винклера. Если в указанных выражениях положить $M_1^z = M_1 = 0$, то получим случай ползущего движения жидкости. Кроме того, если принять $\beta = \chi = 0$, то получаем линейный гидроупругий отклик шарнирно опертой пластины при отсутствии упругого основания. Выражения (25)–(28) представляют собой неявные функции, поэтому исследуем их численно, приняв следующие исходные данные: $l = 0,1$ м; $\delta_0 = 0,008$ м; $h_0 = 0,004$ м; $\mu_0 = 0,3$; $\rho_0 = 7,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\chi = 10^8$ Па/м; $\beta = 2,4 \cdot 10^{13}$ Па/м³; $\rho = 1,84 \cdot 10^3$ кг/м³; $\nu = 2,53 \cdot 10^{-4}$ м²/с.

Результаты расчета гидроупругого отклика R_m пластины и ее фазового сдвига φ в случае учета нелинейности основания и инерции движения вязкой жидкости приведены на рис. 2. Аналогичные результаты, по-

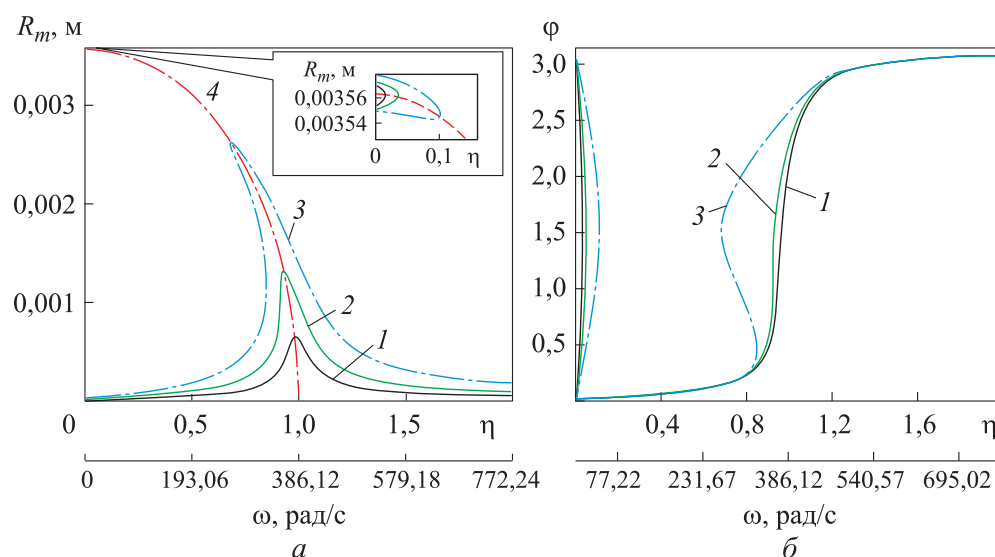


Рис. 2. Гидроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) пластины на упругом основании с мягкой кубической нелинейностью с учетом инерции движения вязкой жидкости:
 1 — $k = 0,02$; 2 — $k = 0,04$; 3 — $k = 0,08$; 4 — скелетная кривая η^* ;
 безразмерной частоте $\eta = 1$ соответствует размерная частота $\omega = 386,12$ рад/с

лученные при исключении из рассмотрения инерции движения вязкой жидкости, приведены на рис. 3. Результаты расчетов гидроупругого отклика и фазового сдвига пластины на линейно-упругом основании Винклера для случаев учета инерции движения и ползущего движения вязкой жидкости в канале приведены на рис. 4, 5. Для сравнения на рис. 6

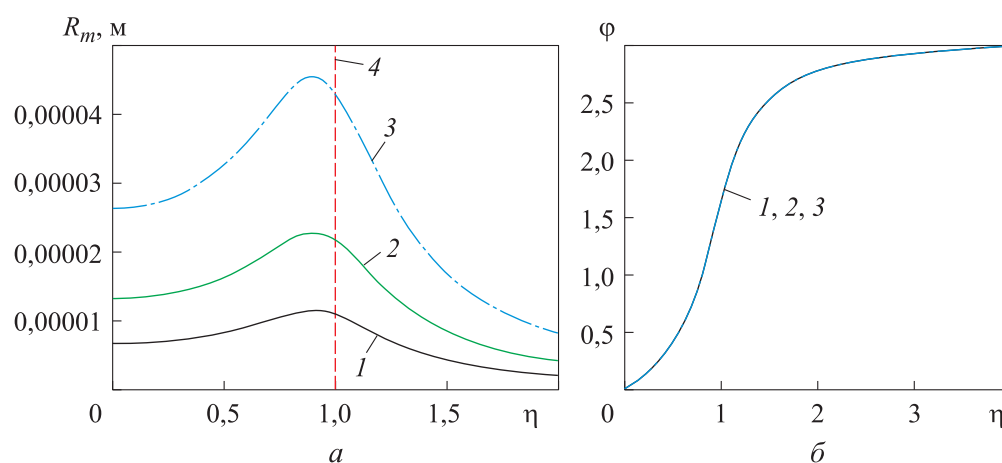


Рис. 3. Гидроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) пластины на упругом основании с мягкой кубической нелинейностью без учета инерции движения вязкой жидкости:

1–4 — см. рис. 2; безразмерной частоте $\eta = 1$ соответствует размерная частота $\omega = 2358,75$ рад/с

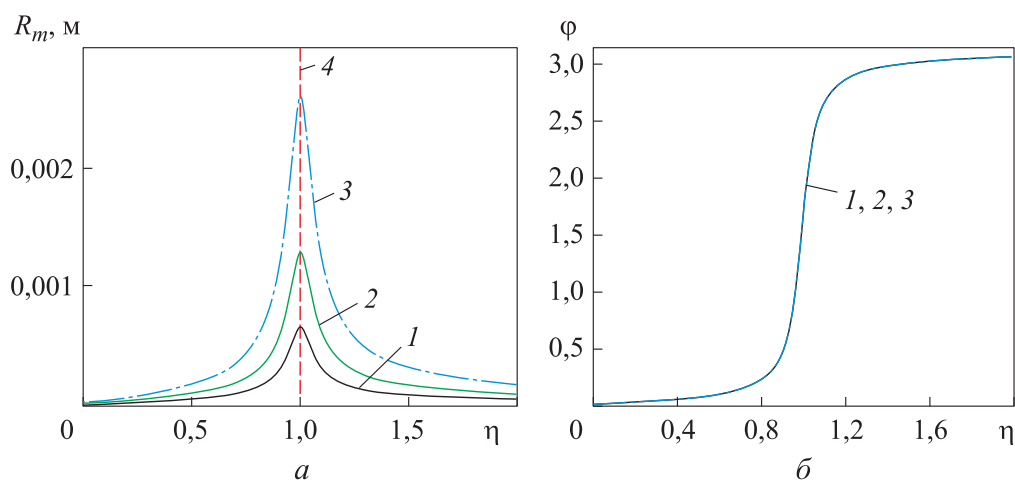


Рис. 4. Гидроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) пластины на упругом основании Винклера с учетом инерции движения вязкой жидкости:

1–4 — см. рис. 2; безразмерной частоте $\eta = 1$ соответствует размерная частота $\omega = 386,12$ рад/с

представлены результаты расчетов гидроупругого отклика пластины в присутствии или отсутствии линейно-упругого основания Винклера для случаев учета инерции движения вязкой жидкости и без учета инерции ее движения (ползущее движение жидкости).

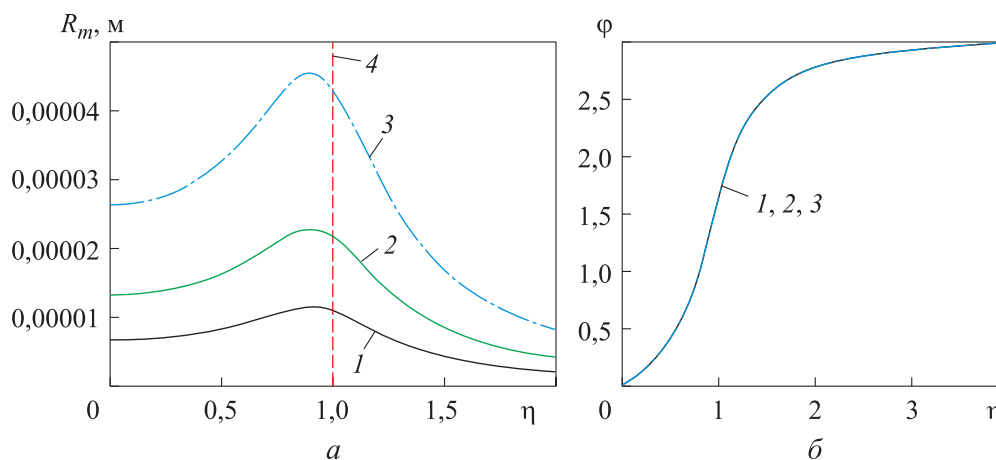


Рис. 5. Гидроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) пластины на упругом основании Винклера без учета инерции движения вязкой жидкости:

1–4 — см. рис. 2; безразмерной частоте $\eta = 1$ соответствует размерная частота $\Omega = 2358,75$ рад/с

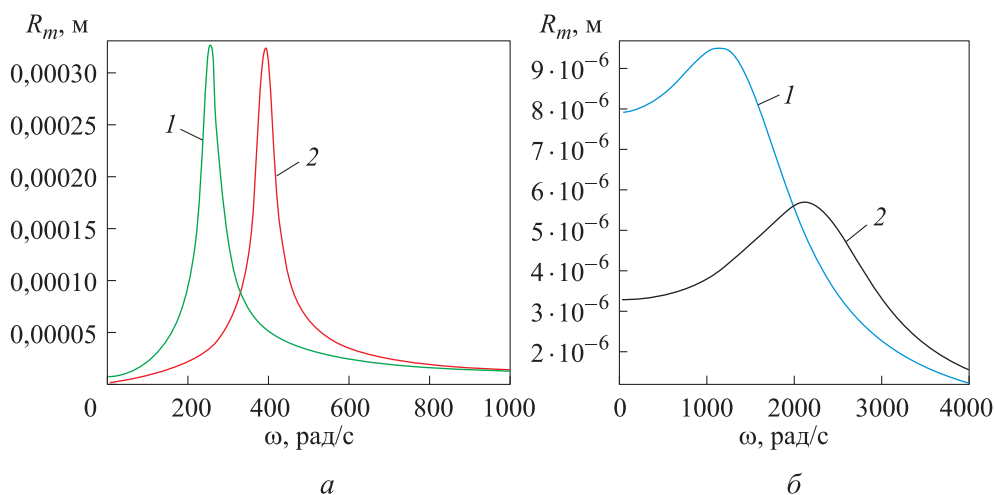


Рис. 6. Линейный гидроупругий отклик пластины при $k = 0,01$ с учетом (а) и без учета (б) инерции движения вязкой жидкости (ползущее движение) (б):

1 — $\beta = \chi = 0$, т. е. упругое основание Винклера отсутствует;
 2 — упругое основание Винклера присутствует

Заключение. Результаты анализа приведенных численных расчетов гидроупругого отклика пластины позволили сделать вывод о необходимости учета вязкости жидкости и инерции ее движения. Данный учет необходим как в случае пластины на основании с мягкой нелинейностью, так

и при рассмотрении линейного основания Винклера, а также при исключении из рассмотрения влияния основания канала. Вязкость жидкости определяет диссипативные свойства в рассматриваемой колебательной системе, что проявляется в ограниченности амплитуд колебаний на резонансных частотах. Учет инерции движения вязкой жидкости в канале приводит к возрастанию инерционных свойств колебательной системы, что проявляется в существенном сдвиге резонансных частот в низкочастотную область. Данный сдвиг для всех рассмотренных случаев сопровождается возрастанием амплитуд колебаний на частотах, близких к резонансным. При рассмотрении пластины на нелинейно-упругом основании и учете инерции движения вязкости жидкости наблюдается изгиб кривых гидроупругого отклика влево при приближении к резонансным частотам, а также появляется дополнительная часть отклика с большими амплитудами колебаний в области низких частот (см. рис. 2). В данном случае, в отличие от линейных колебаний, резонансные частоты уменьшаются с ростом амплитуды виброскорости штампа на основной характеристике и возрастают на дополнительной ее части в области низких частот. Кривые фазового сдвига изгибаются влево с ростом амплитуды виброскорости штампа и также появляются дополнительные фазовые кривые в области низких частот. При колебаниях пластины на линейном основании Винклера с учетом инерции движения вязкой жидкости изгибы влево кривых гидроупругого отклика, фазового сдвига и дополнительные кривые в области низких частот отсутствуют (см. рис. 4). В этом случае резонансные частоты не зависят от амплитуды возмущающего воздействия, кривые фазового сдвига также не зависят от амплитуды виброскорости штампа и практически сливаются в одну фазовую характеристику, которая с ростом частоты меняется от 0 до π , а на резонансе принимает значение $\pi/2$, что соответствует поведению линейного осциллятора [25]. Известно [20, 25], что в случае нелинейных колебаний для осциллятора Дуффинга имеется частотный диапазон неустойчивых колебаний со скачкообразным изменением их амплитуд, который для исследуемой колебательной системы соответствует области изгиба влево кривых гидроупругого отклика и фазового сдвига пластины, а также низкочастотной области с дополнительными кривыми.

При нелинейных колебаниях и ползущем движении вязкой жидкости (инерцией движения жидкости пренебрегаем) наблюдается смещение гидроупругого отклика и фазового сдвига в область высоких частот, а кривые фазового сдвига становятся более пологими, аналогичная картина наблюдается в случае линейных колебаний. В обоих случаях смещение резонанс-

ных частот сопровождается существенным падением амплитуд колебаний. Изгиб влево кривых гидроупругого отклика и фазового сдвига для нелинейных колебаний практически отсутствует, т. е. кривые близки по форме к соответствующим кривым для линейных колебаний (см. рис. 3, 5).

Обобщая анализ приведенных результатов расчетов можно отметить следующее. При моделировании динамики взаимодействия пластины с вибрирующим штампом через слой жидкости между ними важен учет нелинейных свойств основания, на котором установлена пластина, так как данные свойства обуславливают нелинейные колебания в системе. В случае упругого основания с мягкой кубической нелинейностью задача может быть сведена к исследованию обобщенного уравнения Дуффинга (19). При этом необходимо принимать во внимание вязкость совместно с инерцией движения вязкой жидкости, так как их учет обуславливает, с одной стороны, ограниченность резонансных амплитуд колебаний, а с другой стороны, смещение резонансных частот и зоны неустойчивых колебаний со скачкообразным изменением амплитуд в низкочастотную область. Моделирование движения вязкой жидкости как ползущего приводит к смещению резонансных частот в область высоких частот, где скачки амплитуд колебаний практически отсутствуют и колебания оказываются близкими к линейным.

Предложенная математическая модель и результаты исследования гидроупругого отклика и фазового сдвига пластины могут быть использованы для предсказания возникновения нелинейных гидроупругих колебаний, сопровождаемых скачкообразным изменением их амплитуд, стенок каналов, установленных на нелинейно-упругое основание. Кроме того, они могут быть использованы для расчета и проектирования механических демпферов и упругих чувствительных элементов датчиков давления, имеющих подложки из материала с мягкой физической нелинейностью.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Борисов Р.А., Антонец И.В., Кротов А.В. Методология разработки датчика статического и полного давлений на базе упругих чувствительных элементов и оптических линеек. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2021, № 1 (134), с. 33–50. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2021-1-33-50>
- [2] Тиняков Ю.Н., Николаева А.С. О расчете мембран датчиков давления. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2015, № 6 (105), с. 135–142. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2015-6-135-142>

- [3] Antsiferov S.A., Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Perturbing moments in a floating gyroscope with elastic device housing on a vibrating base in the case of a nonsymmetric end outflow. *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, no 3, pp. 352–360.
DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654409030030>
- [4] Цинь Ц., Подчезерцев В.П. Влияние конструктивных особенностей и параметров газового заполнения на характеристики динамически настраиваемых гироскопов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2017, № 2 (113), с. 4–20. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2017-2-4-20>
- [5] Шевцова Е.В. Газовое демпфирование в микромеханических приборах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2006, № 2 (63), с. 100–111.
- [6] Добрянский В.Н., Рабинский Л.Н., Радченко В.П. и др. Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приемопередающего модуля активной фазированной антенной решетки. *Труды МАИ*, 2018, № 101. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98252>
- [7] Liska J., Künkel S. Localization of loose part impacts on the general 3D surface of the nuclear power plant coolant circuit components. *Prog. Nucl. Energy*, 2017, vol. 99, pp. 140–146. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2017.05.004>
- [8] Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М., ФИЗМАТЛИТ, 2000.
- [9] Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge, Cambridge University Press, 2008.
- [10] Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 1. New York, Academic Press, 2013.
- [11] Velmisov P.A., Pokladova Y.V. Mathematical modelling of the “Pipeline–pressure sensor” system. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, vol. 1353, art. 01208.
DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>
- [12] Hasheminejad S.M., Mohammadi M.M. Hydroelastic response suppression of a flexural circular bottom plate resting on Pasternak foundation. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 12, pp. 4269–4292. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1922-4>
- [13] Tulchinsky A., Gat A.D. Frequency response and resonance of a thin fluid film bounded by elastic sheets with application to mechanical filters. *J. Sound Vib.*, 2019, vol. 438, pp. 83–98. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.08.047>
- [14] Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2017, vol. 46, no. 1, pp. 12–19. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618817010113>
- [15] Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler — Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, vol. 45, no. 2, pp. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.12.003>
- [16] Barulina M., Santo L., Popov V., et al. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 20, art. 3844. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10203844>

- [17] Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. и др. Математическое моделирование нелинейных колебаний стенки канала, взаимодействующей с вибрирующим штампом через слой вязкой жидкости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2022, № 2 (139), с. 26–41.
DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2022-2-26-41>
- [18] Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a nonlinear elastic foundation. *Stud. Appl. Math.*, 1970, vol. 49, no. 1, pp. 45–57. DOI: <https://doi.org/10.1002/sapm197049145>
- [19] Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., et al. Nonsinusoidal bending waves in Timoshenko beam lying on nonlinear elastic foundation. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2008, vol. 37, no. 3, pp. 230–235. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618808030059>
- [20] Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear oscillations*. Hoboken, John Wiley & Sons, 1979.
- [21] Howell P., Kozyreff G., Ockendon J. *Applied solid mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press, 2008.
- [22] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. М., Дрофа, 2003.
- [23] Nayfeh A.H. *Perturbation methods*. Hoboken, John Wiley & Sons, 1973.
- [24] Попов В.С., Попова А.А. Моделирование гидроупругих колебаний стенки канала, имеющей нелинейно-упругую опору. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2022, т. 14, № 1, с. 79–92.
DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92>
- [25] Пановко Я.Г. *Введение в теорию механических колебаний*. М., Наука, 1991.
- [26] Krack M., Gross J. *Harmonic balance for nonlinear vibration problems*. Cham, Springer Nature, 2019.

Попов Виктор Сергеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, г. Саратов, Политехническая ул., д. 77); профессор, главный научный сотрудник лаборатории «Анализ и синтез динамических систем в прецизионной механике» ИПТМУ РАН (Российская Федерация, 410028, г. Саратов, Рабочая ул., д. 24).

Попова Анна Александровна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, г. Саратов, Политехническая ул., д. 77).

Попова Мария Викторовна — студентка кафедры «Основы медицины и медицинских технологий» СГУ (Российская Федерация, 410012, г. Саратов, Астраханская ул., д. 83); дежурный по лаборатории «Прикладная математика и механика» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, г. Саратов, Политехническая ул., д. 77).

Христофорова Алевтина Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математика» СГУ (Российская Федерация, 410012, г. Саратов, Астраханская ул., д. 83).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Попов В.С., Попова А.А., Попова М.В. и др. Моделирование динамики взаимодействия пластины на упругом основании с мягкой кубической нелинейностью с вибрирующим штампом через слой вязкой жидкости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2023, № 4 (145), с. 110–130.

DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2023-4-110-130>

**SIMULATING INTERACTION BETWEEN
A PLATE ON ELASTIC FOUNDATION
WITH THE SOFTENING CUBIC NONLINEARITY
AND A VIBRATING DIE VIA THE VISCOUS FLUID LAYER**

V.S. Popov^{1,2}

A.A. Popova¹

M.V. Popova^{1,3}

A.V. Khristoforova³

vic_p@bk.ru

anay_p@bk.ru

mari.popova.2004@internet.ru

alevtinahristoforova@yandex.ru

¹ SSTU, Saratov, Russian Federation

² IPTMU RAS, Saratov, Russian Federation

³ SSU, Saratov, Russian Federation

Abstract

The paper presents a mathematical model of interaction of a plate and a layer of viscous liquid located between the plate and the vibrating die taking into account nonlinearity in the plate elastic base properties. The plate forced nonlinear hydroelastic vibrations were studied satisfying the Kirchhoff's hypotheses, it was placed on a base with the soft cubic nonlinearity. Related hydroelasticity problem was formulated for the vibration system under consideration. The mathematical model consisted of a system of equations for the viscous fluid dynamics and the Kirchhoff's plate on the nonlinear elastic base. The system was supplemented with boundary conditions at the contact boundaries between liquid and the plate and die, as well as with conditions at the ends of the channel under consideration. Asymptotic analysis of the posed hydroelasticity problem was performed and, simplified equations of the viscous fluid

Keywords

Mathematical simulation, nonlinear vibrations, hydroelastic response, plate, viscous fluid, vibrating die, nonlinear elastic base, soft nonlinearity

motion were solved by the iteration method. Pressure distribution was determined, and nonlinear integral differential equation was obtained for the plate bending vibrations excited by the vibrating die. This equation was solved by the Bubnov — Galerkin method. It was shown that the problem under consideration could be reduced to studying the generalized Duffing equation solved by the harmonic balance method. The main nonlinear hydroelastic response and the plate phase shift were determined. Those characteristics were numerically studied, which made it possible to make a conclusion on the importance of taking into account the viscous fluid motion inertia and the elastic properties of the plate base

Received 21.02.2023

Accepted 02.03.2023

© Author(s), 2023

This work was supported by the RSF project no. 23-29-00159

REFERENCES

- [1] Borisov R.A., Antonets I.V., Krotov A.V. Static and total pressure sensor development methodology based on elastic sensing elements and optical rules. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2021, no. 1 (134), pp. 33–50 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2021-1-33-50>
- [2] Tinyakov Yu.N., Nikolaeva A.S. Computation of pressure sensor membrane. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2015, no. 6 (105), pp. 135–142 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2015-6-135-142>
- [3] Antsiferov S.A., Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Perturbing moments in a floating gyroscope with elastic device housing on a vibrating base in the case of a nonsymmetric end outflow. *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, no 3, pp. 352–360 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654409030030>
- [4] Tsin T., Podchertsev V.P. Influence of design features and gas filling parameters on dynamically tuned gyroscope characteristics. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2017, no. 2 (113), pp. 4–20 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2017-2-4-20>
- [5] Shevtsova E.V. Gas damping in micromechanical instruments. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2006, no. 2 (63), pp. 100–111 (in Russ.).
- [6] Dobryanskiy V.N., Rabinskiy L.N., Radchenko V.P., et al. Width evaluation of contact zone between flat-oval cooling channels and transmitting module case of active phased-array antenna. *Trudy MAI*, 2018, no. 101 (in Russ.). Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98252>

- [7] Liska J., Künkel S. Localization of loose part impacts on the general 3D surface of the nuclear power plant coolant circuit components. *Prog. Nucl. Energy*, 2017, vol. 99, pp. 140–146. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnucene.2017.05.004>
- [8] Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., et al. Aerogidrouprugost konstruksiy [Aerohydroelasticity of structures]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2000.
- [9] Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge, Cambridge University Press, 2008.
- [10] Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 1. New York, Academic Press, 2013.
- [11] Velmisov P.A., Pokladova Y.V. Mathematical modelling of the “Pipeline–pressure sensor” system. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, vol. 1353, art. 01208. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>
- [12] Hasheminejad S.M., Mohammadi M.M. Hydroelastic response suppression of a flexural circular bottom plate resting on Pasternak foundation. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 12, pp. 4269–4292. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1922-4>
- [13] Tulchinsky A., Gat A.D. Frequency response and resonance of a thin fluid film bounded by elastic sheets with application to mechanical filters. *J. Sound Vib.*, 2019, vol. 438, pp. 83–98. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.08.047>
- [14] Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2017, vol. 46, no. 1, pp. 12–19. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618817010113>
- [15] Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler — Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, vol. 45, no. 2, pp. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.12.003>
- [16] Barulina M., Santo L., Popov V., et al. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 20, art. 3844. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10203844>
- [17] Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., et al. Mathematical simulation of nonlinear vibrations of a channel wall interacting with a vibrating die via viscous liquid layer. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2022, no. 2 (139), pp. 26–41 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2022-2-26-41>
- [18] Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a nonlinear elastic foundation. *Stud. Appl. Math.*, 1970, vol. 49, no. 1, pp. 45–57. DOI: <https://doi.org/10.1002/sapm197049145>
- [19] Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., et al. Nonsinusoidal bending waves in Timoshenko beam lying on nonlinear elastic foundation. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2008, vol. 37, no. 3, pp. 230–235. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618808030059>
- [20] Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. Hoboken, John Wiley & Sons, 1979.

- [21] Howell P., Kozyreff G., Ockendon J. Applied solid mechanics. Cambridge, Cambridge University Press, 2008.
- [22] Loytsyanskiy L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2003.
- [23] Nayfeh A.H. Perturbation methods. Hoboken, John Wiley & Sons, 1973.
- [24] Popov V.S., Popova A.A. Modeling of hydroelastic oscillations for a channel wall possessing a nonlinear elastic support. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer Research and Modeling], 2022, vol. 14, no. 1, pp. 79–92 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92>
- [25] Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1991.
- [26] Krack M., Gross J. Harmonic balance for nonlinear vibration problems. Cham, Springer Nature, 2019.

Popov V.S. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, SSTU (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation); Professor, Chief Researcher, Laboratory of Analysis and Synthesis of Dynamic Systems in Precision Mechanics, IPTMU RAS (Rabochaya ul. 24, Saratov, 410028 Russian Federation).

Popova A.A. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, SSTU (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

Popova M.V. — Student, Department of Fundamentals of Medicine and Medical Technologies, SSU (Astrakhanskaya ul. 83, Saratov, 410012 Russian Federation); Laboratory Duty, Laboratory of Applied Mathematics and Mechanics, SSTU (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

Khristoforova A.V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematics, SSU (Astrakhanskaya ul. 83, Saratov, 410012 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Popov V.S., Popova A.A., Popova M.V., et al. Simulating interaction between a plate on elastic foundation with the softening cubic nonlinearity and a vibrating die via the viscous fluid layer. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2023, no. 4 (145), pp. 110–130 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2023-4-110-130>