

**ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В ДВУХ СООСНЫХ,  
ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧКАХ  
С КОНСТРУКЦИОННЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ  
И ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ**

Л.И. Могилевич<sup>1,2</sup>

mogilevichli@gmail.com

Ю.А. Блинков<sup>3</sup>

blinkovua@gmail.com

С.В. Иванов<sup>3</sup>

evilgraywolf@gmail.com

В.С. Попов<sup>1,4</sup>

vic\_p@bk.ru

Д.В. Кондратов<sup>1,3,4</sup>

kondratovdv@yandex.ru

<sup>1</sup> СГТУ имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Российская Федерация

<sup>2</sup> Филиал СамГУПС в г. Саратове, г. Саратов, Российская Федерация

<sup>3</sup> СГУ, г. Саратов, Российская Федерация

<sup>4</sup> ИПТМУ РАН, г. Саратов, Российская Федерация

---

**Аннотация**

Выполнено исследование продольных волн деформации в содержащих вязкую несжимаемую жидкость физически нелинейных соосных упругих оболочках, между ними и во внутренней оболочке. Учтено влияние вязкости, инерции движения жидкости, конструкционного демпфирования материала оболочек и среды, окружающей внешнюю оболочку, на амплитуду и скорость волны. Невозможность исследовать предложенные модели волн деформаций методами качественного анализа требует применения численных методов. Численное исследование приведенной модели выполнено с помощью разностной схемы, которая аналогична схеме Кранка — Николсона для уравнения теплопроводности. Показано, что скорости и амплитуды волн деформаций в оболочках не изменяются при исключении из рассмотрения жидкости внутри оболочки, конструкционного демпфирования материала оболочки и влияния окружающей упругой среды. Эволюция волн совпадает с положительным направлением оси абсцисс. При этом учет нелинейности ведет к увеличению скорости движения волн по сравнению с линейным случаем, когда скорость их распространения равна скорости звука, т. е. волны становятся сверхзвуковыми. Проведен-

**Ключевые слова**

*Физически нелинейные цилиндрические оболочки, вязкая несжимаемая жидкость, кольцевой канал, уединенные волны деформации, разностная схема Кранка — Николсона*

ный для этого случая вычислительный эксперимент показал совпадение с точным решением. Если учитывать влияние на скорость волн инерции движения жидкости во внутренней оболочке, то наблюдается уменьшение скорости волн деформации; если учитывать присутствие упругой среды, окружающей внешнюю оболочку, то наблюдается увеличение их скорости. Учет вязких свойств находящейся во внутренней оболочке жидкости и демпфирующих свойств материала оболочек ведет к уменьшению амплитуд волн деформации. Предложенные модели могут стать основой для построения современных приборов неразрушающего контроля

Поступила 04.09.2021

Принята 13.04.2022

© Автор(ы), 2022

---

*Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта № 19-01-00014а*

**Введение.** Исследование волновых процессов в сплошных средах является фундаментальной основой для создания различных приборов, например систем передачи данных посредством гидроакустического канала [1, 2], систем навигации на базе волновых твердотельных гироскопов [3, 4]. Кроме того, анализ волновых процессов в сплошных средах широко используется в современных системах диагностики и неразрушающего контроля [5]. Таким образом, исследование волнового процесса в упругих оболочках имеет важное значение для различных технических областей, например для диагностики трубопровода методами неразрушающего контроля, а модели распространения волн деформации в оболочках могут являться основой для построения современных приборов неразрушающего контроля. Отметим, что эволюция волн деформации в упругих стержнях, пластинах и оболочках исследована в [6–10]. Необходимо подчеркнуть, что в указанных работах не проводилось исследование оболочек, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью. Взаимодействие оболочки с жидкостью без учета волновых явлений в оболочке рассмотрено в [11]. Влияние силы инерции движения жидкости на волновой процесс в двух соосных упругих оболочках, заполненных жидкостью, учтено в [12], при этом не рассматривалось влияние окружающей среды и конструкционного демпфирования. Как показано в [12, 13], исследовать эволюцию нелинейных волн деформаций в оболочках, заполненных вязкой жидкостью, методами качественного анализа невозможно, что определяет необходимость применения численных методов [14].

В настоящей работе методом возмущений получена математическая модель волнового процесса в двух бесконечно длинных соосных цилин-

дрических оболочках с кубической физической нелинейностью. Предлагаемая модель отличается от известных одновременным учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости во внутренней оболочке и кольцевом зазоре между оболочками, а также конструкционного демпфирования материала оболочек и окружающей внешнюю оболочку упругой среды. Эта модель получена в виде системы обобщенных модифицированных уравнений Кортвега — де Вриза (МКдВ). Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости между оболочками и внутри на поведение волн деформаций в соосных оболочках с учетом конструкционного демпфирования и окружающей внешнюю оболочку упругой среды. Численное исследование модели проведено с использованием разностной схемы, аналогичной схеме Кранка — Николсона в случае уравнения теплопроводности.

**Математическая постановка задачи.** Деформационная теория пластичности Илюшина [15, 16] связывает компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_\Theta$  с компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_\Theta$  и квадратом интенсивности деформаций  $\varepsilon_u$  [17, 18] следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(i)} &= \frac{E}{1 - \mu_0^2} \left( \varepsilon_x^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_\Theta^{(i)} \right) \left( 1 + \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right); \\ \sigma_\Theta^{(i)} &= \frac{E}{1 - \mu_0^2} \left( \varepsilon_\Theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)} \right) \left( 1 + \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right); \\ \varepsilon_u^{(i)2} &= \frac{4}{9} \left( \mu_1 \left( \varepsilon_x^{(i)2} + \varepsilon_\Theta^{(i)2} \right) - \mu_2 \varepsilon_x^{(i)} \varepsilon_\Theta^{(i)} \right), \\ \mu_1 &= \left[ 1 + \frac{\mu_0 (2\mu_0 - 1)}{(1 - \mu_0)^2} \right], \quad \mu_2 = \left[ 1 - \frac{2\mu_0 (2\mu_0 - 1)}{(1 - \mu_0)^2} \right],\end{aligned}\tag{1}$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $m$  — константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие;  $\mu_0$  — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассмотрим осесимметричные соосные цилиндрические оболочки. Введем обозначения:  $h_0^{(i)}$  — толщина  $i$ -й оболочки;  $R^{(i)}$  — радиус ее срединной поверхности;  $U^{(i)}$  — перемещение  $i$ -й оболочки вдоль продольной оси;  $W^{(i)}$  — перемещение  $i$ -й оболочки по нормали к ее оси, т. е. прогиб (принимая, что он направлен к центру кривизны); индекс  $i = 1$  — для внешней оболочки с внутренним радиусом  $R_1$ ; индекс  $i = 2$  — для внутренней оболочки с внешним и внутренним радиусами  $R_2$  и  $R_3$ .

Связь компонент тензора деформаций и упругих перемещений имеет вид

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_\Theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}, \quad (2)$$

где  $x$  — продольная координата вдоль срединной поверхности;  $z$  — нормальная координата в оболочке  $(-h_0^{(i)}/2 \leq z \leq h_0^{(i)}/2)$ .

Определим силы в срединной поверхности оболочки и момент по следующим формулам:

$$N_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} dz; \quad N_\Theta^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_\Theta^{(i)} dz; \quad M_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} z dz. \quad (3)$$

Уравнения динамики для оболочек запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} &= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{1}{l} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} - \\ &- \left[ q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}; \\ \frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} &+ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\Theta^{(i)} = \\ &= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} + k_1 \frac{h_0}{R^3} \rho_0 h_0^{(i)} \frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)} W (2-i) - \\ &- \left[ (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial ((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + U^{(i)} \frac{\partial ((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\rho_0^{(i)}$  — плотность материала оболочки;  $t$  — время;  $\varepsilon_1$  — коэффициент демпфирования материала оболочки;  $q_x^{(i)}$ ,  $q_n$  — напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения;  $r$ ,  $x$  — цилиндрические координаты;  $i = 1, 2$  — для внешней и внутренней оболочек;  $k_1$  — безразмерный коэффициент окружающей среды;  $\tilde{q}_x$ ,  $\tilde{q}_n$  — напряжения со стороны жидкости, находящейся во внутренней оболочке.

Подставляя (1)–(3) в (4), получаем уравнения в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 & \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \\
 & \left. + \frac{4}{9} \frac{m}{E} \left[ \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[ \left[ 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1\mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right\rangle = \\
 & = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{1}{l} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} - \\
 & - \left[ q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}} ; \\
 & - \frac{Eh_0^{(i)3}}{12(1 - \mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left\{ 1 + \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[ 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + 2(\mu_2 - \mu_1\mu_0) \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + (\mu_1 - \mu_2\mu_0) \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + 3 \frac{h_0^{(i)2}}{20} \mu_1 \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\rangle + \\
 & + \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. \right] \right\rangle +
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_2 \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \\
 & + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3\mu_1 \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \Bigg] \Bigg] + \\
 & + \frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \mu_0 \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \\
 & + \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left\{ \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \times \right. \quad (5) \\
 & \times \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] \right] + \\
 & + \mu_2 \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \\
 & + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3\mu_1 \mu_0 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \Bigg] \Bigg] = \\
 & = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + k_1 \frac{h_0}{R^3} \rho_0 h_0^{(i)} \frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)} W (2 - i) - \\
 & - \left[ (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n (i - 1) - W^{(i)} \frac{\partial \left( (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n (i - 1) \right)}{\partial r} + \right. \\
 & \left. + U^{(i)} \frac{\partial \left( (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n (i - 1) \right)}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

**Принятые допущения и асимптотический метод исследования уравнений оболочек с жидкостью.** Проводимые оценки в безразмерных переменных характеризуют рассматриваемую задачу. Для изучения эволюции продольных волн оболочку считаем бесконечно длинной и вводим безразмерные переменные и малые параметры. Для этого за характерную длину волны принимаем  $l$ , а за характерные значения упругих перемещений —  $u_m$ ,  $w_m$ , тогда получаем:

$$\begin{aligned} W^{(i)} &= w_m u_3^{(i)}; \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}; \quad x^* = \frac{x}{l}; \\ t^* &= \frac{c_0}{l} t; \quad r^* = \frac{r}{R^{(i)}}; \quad w_m = h_0; \quad u_m = \frac{h_0 l}{R^{(i)}}; \end{aligned} \quad (6)$$

$c_0 = \sqrt{E/(\rho(1 - \mu_0))}$  — скорость распространения продольных упругих волн в оболочке.

Принимаем, что

$$\begin{aligned} \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} &= \varepsilon \ll 1; \quad \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon); \quad \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1); \\ \frac{u_m}{l} \frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} &= O(1); \quad \frac{m\varepsilon}{E} = O(1); \quad \varepsilon_1 = O(\varepsilon); \quad k_1 = O(1), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр задачи.

Перейдем к независимым переменным

$$\xi = x^* - ct^*; \quad \tau = \varepsilon t^*. \quad (8)$$

Здесь  $\tau$  — медленное время;  $c$  — скорость волны.

Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots; \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (9)$$

Подставляя (6)–(9) в (5), получаем систему уравнений, оставляя члены порядка  $\varepsilon$  [19, 20]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right\rangle &= c^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2}; \\ \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из этой системы имеем

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}; \quad c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (11)$$

Таким образом,  $u_{10}^{(i)}$  является произвольной функцией, а безразмерная скорость волны  $c = (1 - \mu_0^2)^{1/2}$ .

Далее в приближении  $\varepsilon^2$  получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_{ml}}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[ \mu_1 \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^3 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \left( \frac{w_{ml}}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right)^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{w_{ml}}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 - \mu_1 \mu_0 \left( \frac{w_{ml}}{u_m R^{(i)}} \right)^3 u_{30}^{(i)3} \right] \right\rangle = \\ & = -2c \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + c^2 \frac{\partial^2 u_{11}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} c \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)); \quad (12) \\ & \quad \mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{w_{ml}}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \\ & \quad + \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 \left( \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{w_{ml}}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right) \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{w_{ml}}{u_m R^{(i)}} \right)^2 u_{30}^{(i)2} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \mu_2 \frac{w_{ml}}{u_m R} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} u_{30}^{(i)} \right] = \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \frac{w_{ml}}{u_m R^{(i)}} c^2 \frac{\partial^2 u_{30}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \\ & \quad + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R^{(i)}} \frac{w_{ml}}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} (2-i) - \frac{R^{(i)} l}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left( (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) \right), \quad i=1, 2. \end{aligned}$$

Подставляя соотношение (11) в уравнения (12) и исключая  $u_{11}$  и  $u_{31}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E \varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} + k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} (2-i) = \\ & = -\frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[ \left( q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) \right) - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial \left( (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) \right)}{\partial \xi} \right], \\ & \quad i=1, 2. \quad (13) \end{aligned}$$



Полученные уравнения — это обобщенные модифицированные уравнения Кортевега — де Вриза (МКдВ) для  $\partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi$ . Решая уравнение гидродинамики, определяем его правую часть.

Отметим, что (13) распадается на два независимых модифицированных уравнения Кортевега — де Вриза (МКдВ), если исключить влияние жидкости, т. е. принять их правую часть тождественно равной нулю.

**Исследование напряжений, действующих на оболочку со стороны находящейся внутри жидкости.** Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки (рис. 1); внутри кольцевого сечения и во внутренней оболочке находится вязкая несжимаемая жидкость; ширина кольцевой щели, занимаемой жидкостью,  $\delta = R_1 - R_2$ . Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \Theta, x)$ .

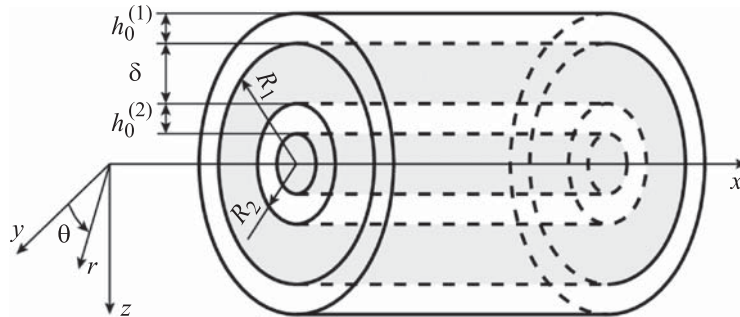


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости, а также дополняющее их уравнение неразрывности в выбранной системе для осесимметричного течения запишем в виде [21]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= v \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right); \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= v \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На границах контакта оболочек с жидкостью, т. е. при  $r = R_i - W^{(i)}$ , выполняются условия непроскальзывания жидкости [21]:

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \quad (15)$$

В (14) и (15)  $p, \rho, \nu$  — давление, плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости;  $V_r, V_x$  — проекции скорости движения жидкости на оси введенной системы координат.

Напряжения  $q_n, q_x$  со стороны слоя жидкости определяются по формулам:

$$q_n = \left[ P_{rr} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{rx} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{i} \right) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}} ;$$

$$q_x = - \left[ P_{rx} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{xx} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{i} \right) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}} ; \quad (16)$$

$$P_{rr} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad P_{rx} = \rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right); \quad P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x},$$

где  $\bar{n}$  — нормаль к срединной поверхности  $i$ -й оболочки ( $\bar{n}_r, \bar{n}_\Theta, \bar{i}$  — орты базиса  $(r, \Theta, x)$  цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси). При условии проекции напряжения на невозмущенную поверхность оболочки можно считать, что  $-\bar{n} = \bar{n}_r$

и  $\cos \left( -\bar{n}, \bar{n}_r \right) = 1, \quad \cos \left( -\bar{n}, \bar{i} \right) = 0$ . Записанные для  $q_n, q_x$  формулы

также справедливы и для напряжений  $\tilde{q}_x, \tilde{q}_n$ , если в них обозначить плотность жидкости как  $\tilde{\rho}$ , а коэффициент кинематической вязкости — как  $\tilde{\nu}$ .

**Кольцевое сечение.** Введем безразмерные переменные и параметры:

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r; \quad V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x; \quad r = R_2 + \delta r^*; \quad t^* = \frac{c_0}{l} t; \quad x^* = \frac{x}{l};$$

$$p = \frac{\rho\nu c_0 R_i w_m}{\delta^3} P + p_0; \quad \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1); \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = o(1); \quad (17)$$

$$\frac{w_m}{R_2} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} = \lambda\psi; \quad \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \lambda\psi\varepsilon^{1/2}; \quad \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \psi\varepsilon^{1/2}.$$

При введении безразмерных переменных (17) полагаем  $\delta/l = \psi\sqrt{\varepsilon} = 0$ ;  $\delta/R_2 = \psi = 0$  (нулевое приближение по  $\delta/l$  — гидродинамическая теория смазки), а также  $\frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{\nu} < 1$ .

Запишем асимптотическое разложение давления жидкости и составляющих вектора скорости ее движения по малому параметру  $\lambda$ :

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots; \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots; \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots \quad (18)$$

Ограничиваясь в (18) первыми членами из (14), запишем уравнения [12]

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \quad \tilde{\text{Re}} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}; \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (19)$$

и соответствующие им граничные условия из (15)

$$\begin{aligned} v_r^0 &= -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}; \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при } r^* = 1; \\ v_r^0 &= -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}; \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при } r^* = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Опуская в (16) члены порядка  $\psi, \lambda$ , получаем

$$q_x^{(i)} \approx -\rho v \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}^{r^*=0}; \quad q_n \approx -\frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P^0. \quad (21)$$

Применяя метод итерации и полагая на первой итерации в (19)  $\tilde{\text{Re}} = 0$ , получаем тем самым уравнения гидродинамической теории смазки [21], а затем, решая их с учетом (20), находим:

$$\begin{aligned} P^0 &= 12 \int \left[ \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*; \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} &= (r^{*2} - r^*) \cdot 6 \int \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) dx^*. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя из (22) найденные значения  $\partial v_x^0 / \partial t^*$  в уравнения динамики жидкости (19), на втором шаге итерации определяем

$$\begin{aligned} P^0 &= \iint \left[ 12 \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{6}{5} \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* dx^*; \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} &= (2r^* - 1) \int \left[ 6 \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^*. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая, что введены переменные (8) и (11), при  $\varepsilon \ll 1$  находим:

$$\begin{aligned}
 P^0 &= \int \left[ 12\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} \tilde{\text{Re}} (1 - \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi; \\
 \frac{\partial P^0}{\partial \xi} &= \left[ 12\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} \tilde{\text{Re}} (1 - \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right]; \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} &= (2r^* - 1) \left[ 6\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\tilde{\text{Re}}}{10} (1 - \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right]; \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} &= 6\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\tilde{\text{Re}}}{10} (1 - \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right); \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} &= - \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Запишем выражения, входящие в правую часть уравнений (13). Учитывая, что  $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$  и полагая, что  $R^{(1)} = R^{(2)} = R$ ,  $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} = h_0$ , в силу малости  $\psi$ ,  $\lambda$ , для первого уравнения имеем

$$\begin{aligned}
 & -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right];
 \end{aligned} \tag{25}$$

для второго уравнения —

$$\begin{aligned}
 & -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{26}$$

**Круговое сечение.** Рассматривая круговое сечение, введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned}
 V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r; \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_3} v_x; \quad r^* = \frac{r}{R_3}; \quad t^* = \frac{c_0}{l} t; \quad x^* = \frac{1}{l} x; \\
 p &= \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu} c_0 l w_m}{R_3^3} P + p_0; \quad \frac{R_3}{l} = \psi = O(\varepsilon^{1/2}); \quad \tilde{\lambda} = \frac{w_m}{R_3} = O(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Вводя переменные (27), полагая  $\psi = 0$  (нулевое приближение по  $\psi$  — гидродинамическая теория смазки [21]) и раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра  $\lambda$

$$P = P^0 + \tilde{\lambda}P^1 + \dots; \quad v_x = v_x^0 + \tilde{\lambda}v_x^1 + \dots; \quad v_r = v_r^0 + \tilde{\lambda}v_r^1 + \dots, \quad (28)$$

для первых членов разложений из уравнения (14) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \quad \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{v}} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \\ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}; \quad v_x^0 = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} \quad \text{при } r^* = 1; \\ r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0; \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \quad \text{при } r^* = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Определим в безразмерных переменных (27) напряжения жидкости на оболочке с точностью до  $\lambda$ ,  $\psi$ :

$$\tilde{q}_x = -\tilde{\lambda} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}; \quad \tilde{q}_n = -\frac{\tilde{\lambda}}{\psi} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P^0. \quad (31)$$

На первом шаге итерации полагаем  $\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{v}} = 0$ . Опустим первое слагаемое во втором уравнении (29) и получим:

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0. \quad (32)$$

Решение уравнений гидродинамики (классических уравнений гидродинамической теории смазки) легко получить, с учетом граничных условий (30) из уравнений движения имеем:

$$\begin{aligned} P^0 = 16 \int \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] dx^*; \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = (r^{*2} - 1) 4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] + \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial t^{*2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя найденные из (33) значения  $\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*}$  в уравнения динамики жидкости (29), на втором шаге итерации запишем:

$$\begin{aligned}
 P^0 &= \frac{\partial}{\partial t^*} \int \left[ 16 \left( \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{2}{3} \psi \frac{R_3 c_0}{v} \frac{\partial}{\partial t^*} \left( \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - 4 \int u_3^{(2)} dx^* \right) \right] dx^*; \\
 \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} &= \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ 8 \left( \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{3} \psi \frac{R_3 c_0}{v} \frac{\partial}{\partial t^*} \left( \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right) \right].
 \end{aligned} \tag{34}$$

Учитывая, что введены переменные (8), (11), с точностью до  $\varepsilon$  имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P^0}{\partial \xi} &= \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[ 8 \left( 2u_3^{(2)} - \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{3} \psi \frac{R_3 c_0}{v} \left( 8 \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \right],
 \end{aligned} \tag{35}$$

при этом

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} &= \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[ 4 \left( 2u_3^{(2)} - \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{6} \psi \frac{R_3 c_0}{v} \left( 2 \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \right].
 \end{aligned} \tag{36}$$

Тогда, учитывая  $\frac{w_m l}{u_m R_3} u_{30}^{(2)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(2)}$  при  $R_3 = R^{(2)} = R$  и уравнения (31), (35), (36), в силу малости  $\psi$ ,  $\lambda$  получаем:

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} &= \frac{\tilde{v}}{R c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} [1 - 2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \\
 &- \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1 - \mu_0^2) \left[ (1 - 2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2 \right] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

**Уравнения волновой динамики соосных оболочек.** С учетом найденных правых частей уравнений (25), (26), (37) систему уравнений (12) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} + k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} = \\
 & = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{10} \tilde{R} e \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right]; \\
 & \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \\
 & \quad + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} = \\
 & = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{10} \tilde{R} e \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left\{ \frac{\tilde{v}}{R c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1-\mu_0^2} [1-2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1-\mu_0^2) \left[ (1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2 \right] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right\}. \tag{38}
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:  $\eta = c_1 \xi$ ;  $t = c_2 \tau$ ;  $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \varphi^{(1)}$ ;  $u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \varphi^{(2)}$ , где

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \left[ c_2 \varepsilon \left( \frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \right]^{1/3}; \quad c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \left[ 1 - \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \frac{v}{\delta c_0}; \\
 c_3 &= \left[ \frac{c_2}{c_1} \frac{E\varepsilon}{m} \left( \frac{l}{u_m} \right)^2 \frac{1}{2\sqrt{1-\mu^2} (\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2)} 6 \right]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Примем, что

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \frac{c_1}{c_2} \left(1 - \frac{\delta}{12\mu_0 R}\right); \\ \sigma_2 &= \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{\nu}}{\varepsilon R c_0} 2(1-2\mu_0)^2 \frac{1}{c_2}; \\ \sigma_3 &= \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{R}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{12} \left[(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2\right] \frac{c_1}{c_2}; \\ \sigma_4 &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{1}{c_2}; \quad \sigma_5 = k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{c_1}{c_2}.\end{aligned}\tag{40}$$

Из (38) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}\varphi_t^{(1)} + 6\varphi^{(1)2}\varphi_{\eta}^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} - \sigma_1(\varphi_{\eta}^{(1)} - \varphi_{\eta}^{(2)}) + \\ + \sigma_4\varphi^{(1)} + \sigma_5\varphi_{\eta}^{(1)} = 0; \\ \varphi_t^{(2)} + 6\varphi^{(2)2}\varphi_{\eta}^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} - \sigma_1(\varphi_{\eta}^{(2)} - \varphi_{\eta}^{(1)}) + \\ + \sigma_2\varphi^{(2)} - \sigma_3\varphi_{\eta}^{(2)} + \sigma_4\varphi^{(2)} = 0.\end{aligned}\tag{41}$$

Система уравнений (41) при отсутствии жидкости и конструкционного демпфирования в продольном направлении ( $\sigma_4 = 0$ ) распадается на два независимых уравнения.

Первое уравнение  $\varphi_t^{(1)} + 6\varphi^{(1)2}\varphi_{\eta}^{(1)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_5\varphi_{\eta}^{(1)} = 0$  имеет точное решение

$$\varphi^{(1)} = \frac{k}{\cosh(k\eta - (4k^3 + \sigma_5 k)t)};$$

второе уравнение  $\varphi_t^{(2)} + 6\varphi^{(2)2}\varphi_{\eta}^{(2)} + \varphi_{\eta\eta\eta}^{(2)} = 0$  также имеет точное решение

$$\varphi^{(2)} = \frac{k}{\cosh(k\eta - 4k^3 t)}.$$

Из решений следует, что скорость волны сверхзвуковая. Окружающая упругая среда ( $\sigma_5 > 0$ ) увеличивает скорость этой волны.

При отсутствии жидкости требуется численное решение системы уравнений (41) при начальном условии ( $t > 0$ )

$$\varphi^{(1)} = k \cosh^{-1}(k\eta); \quad \varphi^{(2)} = k \cosh^{-1}(k\eta)\tag{42}$$



или

$$\varphi^{(1)} = k \cosh^{-1}(k \eta); \quad \varphi^{(2)} = 0. \quad (43)$$

**Численный алгоритм решения задачи.** Для численного моделирования рассмотрим разностную схему для (41), аналогичную схеме Кранка — Николсона для уравнения теплопроводности [22]:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{\tau} + 2 \frac{\left( (u_{j+1}^{(1)n+1})^3 - (u_{j-1}^{(1)n+1})^3 \right) + \left( (u_{j+1}^{(1)n})^3 - (u_{j-1}^{(1)n})^3 \right)}{4h} + \\ & + \frac{\left( u_{j+2}^{(1)n+1} - 2u_{j+1}^{(1)n+1} + 2u_{j-1}^{(1)n+1} - u_{j-2}^{(1)n+1} \right)}{4h^3} + \\ & + \frac{\left( u_{j+2}^{(1)n} - 2u_{j+1}^{(1)n} + 2u_{j-1}^{(1)n} - u_{j-2}^{(1)n} \right)}{4h^3} + \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \\ & - \sigma_1 \left[ \frac{\left( u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j-1}^{(1)n+1} \right) + \left( u_{j+1}^{(1)n} - u_{j-1}^{(1)n} \right)}{4h} - \right. \\ & \left. - \frac{\left( u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j-1}^{(2)n+1} \right) + \left( u_{j+1}^{(2)n} - u_{j-1}^{(2)n} \right)}{4h} \right] + \\ & + \sigma_4 \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} + \sigma_5 \frac{\left( u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j-1}^{(1)n+1} \right) + \left( u_{j+1}^{(1)n} - u_{j-1}^{(1)n} \right)}{4h} = 0; \\ & \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{\tau} + 2 \frac{\left( (u_{j+1}^{(2)n+1})^3 - (u_{j-1}^{(2)n+1})^3 \right) + \left( (u_{j+1}^{(2)n})^3 - (u_{j-1}^{(2)n})^3 \right)}{4h} + \\ & + \frac{\left( u_{j+2}^{(2)n+1} - 2u_{j+1}^{(2)n+1} + 2u_{j-1}^{(2)n+1} - u_{j-2}^{(2)n+1} \right)}{4h^3} + \\ & + \frac{\left( u_{j+2}^{(2)n} - 2u_{j+1}^{(2)n} + 2u_{j-1}^{(2)n} - u_{j-2}^{(2)n} \right)}{4h^3} - \\ & - \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \end{aligned}$$

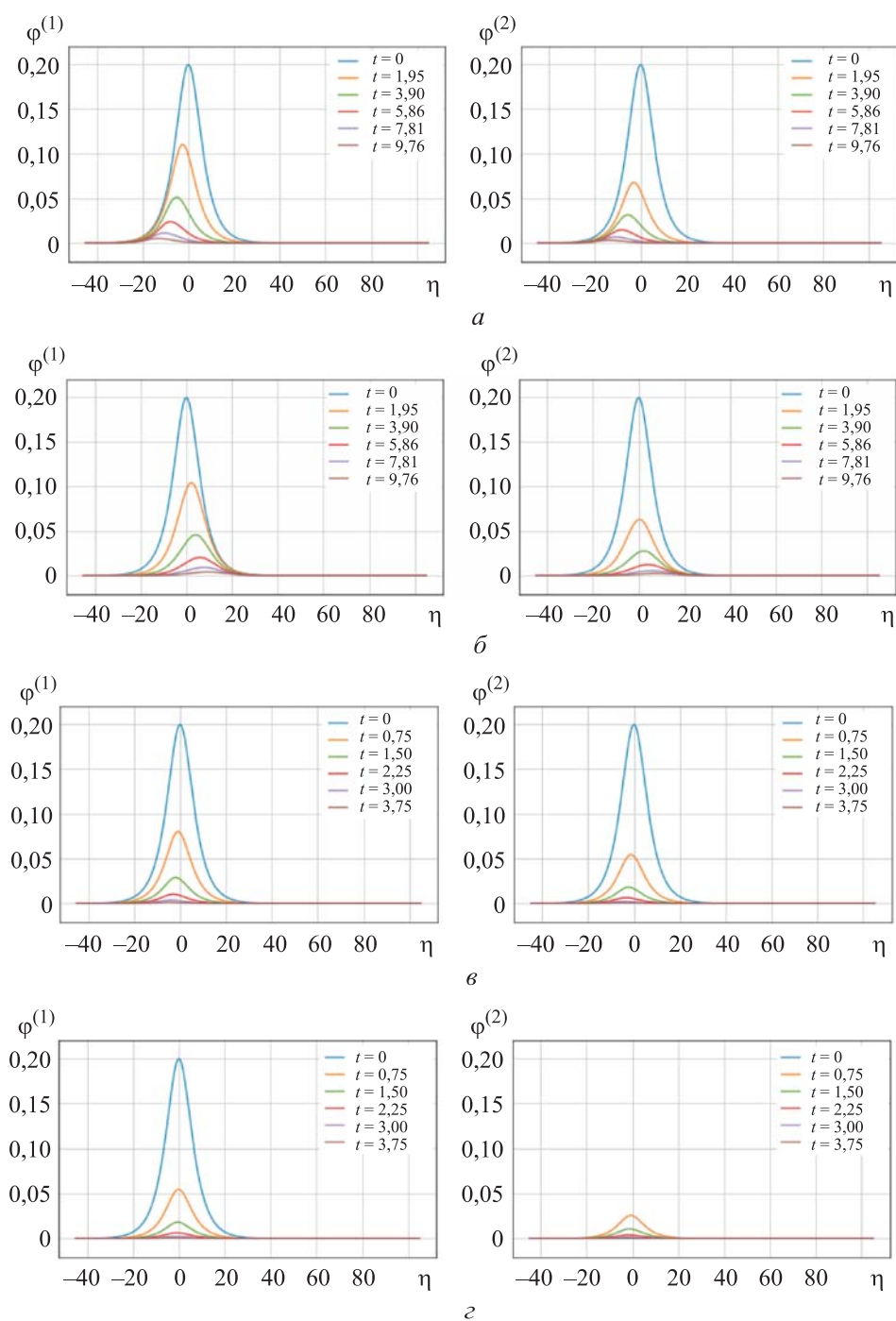
$$\begin{aligned}
 & -\sigma_1 \left( \frac{\left( u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j-1}^{(2)n+1} \right) + \left( u_{j+1}^{(2)n} - u_{j-1}^{(2)n} \right)}{4h} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\left( u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j-1}^{(1)n+1} \right) + \left( u_{j+1}^{(1)n} - u_{j-1}^{(1)n} \right)}{4h} \right) + \\
 & + (\sigma_2 + \sigma_4) \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \sigma_3 \frac{\left( u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j-1}^{(2)n+1} \right) + \left( u_{j+1}^{(2)n} - u_{j-1}^{(2)n} \right)}{4h} = 0.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Начальные условия соответствуют выражениям (42) и (43), а на границах вычислительной области использовались условия равенства первых производных  $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ . Поскольку построенная разностная схема (44) имеет пятиточечный шаблон по  $\eta$ , то на границах использовались по два соотношения. Так, для левой границы имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{df(x_i)}{dx} & \approx h^2 \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{-5f(x_i) + 9f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+3})}{6h}; \\
 \frac{df(x_i)}{dx} & \approx \frac{11h^2}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{-5f(x_{i+1}) + 8f(x_{i+2}) - 3f(x_{i+3})}{2h}.
 \end{aligned}$$

В качестве реализации выбран язык Python с библиотекой NumPy. Приведенная разностная схема является неявной, а значит, не имеет ограничений к шагу по времени. Для достижения точности  $10^{-9}$  использованы следующие шаги: 0,1 по  $h$  и 0,05 по  $t$ , кроме того, приведенная схема является нелинейной. Для следующего временного слоя использован метод простой итерации, в котором достаточно двух-трех итераций для достижения точности  $10^{-9}$ . Кроме того, построение разностной схемы с использованием базиса Грёбнера обеспечивает ее устойчивость и сходимость [23]. Проверка численного решения (при отсутствии жидкости) с имеющимся точным решением показала относительную погрешность  $10^{-6}$ . Графики численного решения уравнений (41) приведены на рис. 2.

Инерция движения жидкости  $\sigma_3$  внутри оболочки уменьшает скорость движения волны, график смещается влево, следовательно, скорость становится дозвуковой (рис. 2, а). Вязкость жидкости во внутренней оболочке  $\sigma_2$  уменьшает амплитуду волны в обеих оболочках, однако во внутренней оболочке интенсивнее [12]. Влияние упругой среды  $\sigma_5$ , окружаю-



**Рис. 2.** Графики численного решения уравнений (41):

*a* —  $\sigma_{1,2,3} = 1$ ,  $\sigma_{4,5} = 0$ , начальное условие (42); *б* —  $\sigma_{1,2,3} = 1$ ,  $\sigma_4 = 0$ ,  $\sigma_5 = 3$ ,

начальное условие (42); *в* —  $\sigma_{1,2,3,4} = 1$ ,  $\sigma_5 = 0$ , начальное условие (42);

*г* —  $\sigma_{1,2,3,4,5} = 1$ , начальное условие (43)

щей внешнюю оболочку, увеличивает скорость волн в обеих оболочках; во внешней оболочке это увеличение более интенсивно (рис. 2, б). Конструкционное демпфирование материала оболочек  $\sigma_4$  ускоряет уменьшение амплитуд волн (рис. 2, в); амплитуды волн меньше по сравнению с амплитудами, приведенными на рис. 2, а.

Влияние упругой среды  $\sigma_5$ , окружающей внешнюю оболочку, и конструкционного демпфирования материала оболочек  $\sigma_4$  на волновой процесс при начальном условии (43) отражено на рис. 2, г. Видно, что во внутренней оболочке отсутствует возмущение, а во внешней оно наблюдается в начальный момент времени. С течением времени во внутренней оболочке возникает волна и ее амплитуда увеличивается до некоторого значения, а во внешней амплитуда волны уменьшается. Затем происходит уменьшение амплитуд волн в обеих оболочках, но более интенсивно во внутренней.

**Заключение.** Выполненные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние на волновой процесс упругой среды, окружающей внешнюю оболочку, и конструкционного демпфирования материала оболочек, кроме влияния вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке и между внутренней и внешней оболочками с учетом инерции жидкости на поведение нелинейной волны деформации, что было выполнено в [12]. В канале, образованном оболочками и помещенном в упругую среду, наблюдается увеличение скорости волны деформации во внешней оболочке (стенке канала), что, в свою очередь, ведет к росту скорости волны деформации и во внутренней оболочке. Конструкционное демпфирование материала оболочек приводит к снижению амплитуд волн в обеих оболочках.

Возбуждение волны деформации во внешней оболочке ведет к зарождению волны деформации и во внутренней оболочке, чего не было в начальный момент времени. Таким образом, можно утверждать, что происходит передача энергии (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней. При этом наблюдается снижение амплитуды волны, следовательно, и скорости ее распространения во внешней оболочке. В то же время во внутренней оболочке амплитуда волны сначала увеличивается, а потом уменьшается. Рассматривая эволюцию указанных колебаний амплитуд и скоростей волн, отметим, что с течением времени их амплитуды затухают. К этому приводит и конструкционное демпфирование материала оболочек. Окружающая внешнюю оболочку упругая среда вызывает увеличение скорости во внешней оболочке и, как следствие, во внутренней.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Shakhtarin B.I., Chudnikov V.V., Dyabirov R.M. Methods of frequency synchronization of OFDM signals in an underwater acoustic channel. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2019, № 4 (127), с. 62–70. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2019-4-62-70>
- [2] Шахтарин Б.И., Федотов А.А., Балахонов К.А. и др. Применение сигналов с ортогонально частотным разделением в гидроакустическом канале. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2015, № 5 (104), с. 30–43. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2015-5-30-43>
- [3] Basarab M.A., Lunin B.S., Chumankin E.A., et al. Finite-element simulation of the eigen frequency spectrum of the cylindrical resonator with geometrical imperfectness. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2020, № 3 (132), с. 52–65. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2020-3-52-65>
- [4] Деменков Н.П., Мочалов И.А., Чан Д.М. Нечеткие фазовые траектории волновых твердотельных гироскопов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2021, № 1 (134), с. 78–101. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2021-1-78-101>
- [5] Максимов И.В., Павелко В.И., Перевезенцев В.В. и др. Метод выделения полезного сигнала для системы обнаружения свободных, слабозакрепленных и посторонних предметов в главном циркуляционном контуре реакторной установки с водо-водяным энергетическим реактором. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2018, № 1 (118), с. 4–15. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2018-1-4-15>
- [6] Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal waves in elastic rods. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, 1970, vol. 4, pp. 64–73.
- [7] Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's — Korteweg — de Vries equation for viscoelastic rods and plates. *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, vol. 32, no. 3, pp. 661–677. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(70\)90290-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90290-8)
- [8] Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор). *Акустический журнал*, 2002, т. 48, № 6, с. 725–740.
- [9] Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение. *Акустический журнал*, 2001, т. 47, № 3, с. 359–363.
- [10] Arshinov G.A., Mogilevich L.I. Nonlinear dispersion waves in viscous-elastic cylindrical shells. *Mathematical Modeling of Dynamic Behavior of Thin Elastic Structures. EUROMECH Colloquium 439*, 2002, pp. 24–27.
- [11] Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2013, т. 6, № 1, с. 94–102.

- [12] Mogilevich L., Ivanov S. Longitudinal waves in two coaxial elastic shells with hard cubic nonlinearity and filled with a viscous incompressible fluid. In: ICIT 2020. Springer Nature Switzerland, 2021, pp. 14–26. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8_2)
- [13] Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М., Наука, 1979.
- [14] Samarskiy A.A. The theory of difference schemes. Boca Raton, CRC Press, 2001.
- [15] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М., Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1990.
- [16] Овчаров А.А., Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно-упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом нагружении. *Современные проблемы науки и образования*, 2014, № 3. URL: <https://science-education.ru/en/article/view?id=13235>
- [17] Каудерер К. Нелинейная механика. М., ИИЛ, 1961.
- [18] Фельдштейн В.А. Упруго-пластические деформации цилиндрической оболочки при продольном ударе. В кн.: Волны в неупругих средах. Кишинев, Изд-во АН МолССР, 1970, с. 199–204.
- [19] Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках. Саратов, СГТУ, 1999.
- [20] Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Могилевич Л.И. Уединенные продольно-изгибные волны в цилиндрической оболочке, взаимодействующей с нелинейно-упругой средой. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 1 (76), с. 47–60. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-1-47-60>
- [21] Loitsyanskiy L.G. Mechanics of liquids and gases. New York, Pergamon Press, 1966.
- [22] Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozzhilkin V.V. Grobner bases and generation of difference schemes for partial differential equations. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2006, vol. 2. DOI: <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051>
- [23] Blinkov Y.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods. *Program. Comput. Soft.*, 2017, vol. 43, no. 2, pp. 84–89. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0361768817020049>

**Могилевич Лев Ильич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, г. Саратов, Политехническая ул., д. 77); профессор, Филиал СамГУПС в г. Саратове (Российская Федерация, 410004, г. Саратов, Интернациональный пр-д, д. 1а).

**Блинков Юрий Анатольевич** — д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой «Математическое и компьютерное моделирование» СГУ (Российская Федерация, 410012, г. Саратов, Астраханская ул., д. 83).

**Иванов Сергей Викторович** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое и компьютерное моделирование» СГУ (Российская Федерация, 410012, г. Саратов, Астраханская ул., д. 83).

**Попов Виктор Сергеевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, г. Саратов, Политехническая ул., д. 77); профессор, главный научный сотрудник ИПТМУ РАН (Российская Федерация, 410028, г. Саратов, Рабочая ул., д. 24).

**Кондратов Дмитрий Вячеславович** — д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой «Информационная безопасность автоматизированных систем» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, г. Саратов, Политехническая ул., д. 77); профессор кафедры «Математическое и компьютерное моделирование» СГУ (Российская Федерация, 410012, г. Саратов, Астраханская ул., д. 83); главный научный сотрудник ИПТМУ РАН (Российская Федерация, 410028, г. Саратов, Рабочая ул., д. 24).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Могилевич Л.И., Блинков Ю.А., Иванов С.В. и др. Волны деформации в двух соосных, физически нелинейных оболочках с конструкционным демпфированием, взаимодействующих с окружающей средой и заполненных жидкостью. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2022, № 3 (140), с. 34–60. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2022-3-34-60>

**STRAIN WAVES IN TWO PHYSICALLY NONLINEAR FLUID-FILLED COAXIAL SHELLS FEATURING STRUCTURAL DAMPING AND INTERACTING WITH THE SURROUNDING MEDIUM**

L.I. Mogilevich<sup>1,2</sup>

mogilevichli@gmail.com

Yu.A. Blinkov<sup>3</sup>

blinkovua@gmail.com

S.V. Ivanov<sup>3</sup>

evilgraywolf@gmail.com

V.S. Popov<sup>1,4</sup>

vic\_p@bk.ru

D.V. Kondratov<sup>1,3,4</sup>

kondratovdv@yandex.ru

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation

<sup>2</sup>Branch of Samara State Transport University in Saratov, Saratov, Russian Federation

<sup>3</sup>Saratov State University, Saratov, Russian Federation

<sup>4</sup>Institute for Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences, Saratov, Russian Federation

**Abstract**

The paper investigates longitudinal strain waves in physically nonlinear coaxial elastic shells containing a viscous incompressible fluid situated both between the shells and within the inner shell. The study takes into account the effects that the following fac-

**Keywords**

*Physically nonlinear cylindrical shells, incompressible viscous liquid, annular channel, isolated strain waves, Crank — Nicolson difference scheme*

tors have upon the magnitude and velocity of the wave: viscosity, fluid motion inertia, the medium surrounding the outer shell, and structural damping in the shell material. As it is impossible to evaluate the strain wave models proposed via qualitative analysis methods, using numerical methods is necessary. We numerically investigated the model presented using a specific difference scheme to represent its equations, one similar to the Crank — Nicolson scheme for the thermal conductivity equation. We show that the velocities and amplitudes of strain waves in the shells do not change when disregarding the following factors: the fluid inside the shell, structural damping in the shell material, and the influence of the surrounding elastic medium. The waves evolve in the positive direction of the abscissa axis. At the same time, taking nonlinearity into account leads to increased wave velocity as compared to the linear case, when the wave propagation velocity equals the speed of sound, which means the waves become supersonic. We performed a numerical study of this case and obtained results matching the exact solution. If we take into account the effect that the fluid motion inertia within the inner shell has upon the wave velocity, then a decrease in the strain wave velocity is observed. Taking into account the presence of an elastic medium surrounding the outer shell leads to an increase in velocity. Considering the viscous properties of the fluid within the inner shell and the damping properties of the shell material results in decreased strain wave magnitudes. The models proposed can form the basis for designing modern non-destructive testing devices

Received 04.09.2021

Accepted 13.04.2022

© Author(s), 2022

---

*The study was supported by the grant no. 19-01-00014a*

## REFERENCES

- [1] Shakhtarin B.I., Chudnikov V.V., Dyabirov R.M. Methods of frequency synchronization of OFDM signals in an underwater acoustic channel. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2019, no. 4 (127), pp. 62–70. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2019-4-62-70>
- [2] Shakhtarin B.I., Fedotov A.A., Balakhonov K.A., et al. The usage of OFDM-based signals in underwater acoustic channel. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2015, no. 5 (104), pp. 30–43 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2015-5-30-43>



- [3] Basarab M.A., Lunin B.S., Chumankin E.A., et al. Finite-element simulation of the eigen frequency spectrum of the cylindrical resonator with geometrical imperfectness. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2020, no. 3 (132), pp. 52–65.  
DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2020-3-52-65>
- [4] Demenkov N.P., Mochalov I.A., Chan D.M. Fuzzy phase trajectories in hemispherical resonator gyroscopes. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2021, no. 1 (134), pp. 78–101 (in Russ.).  
DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2021-1-78-101>
- [5] Maksimov I.V., Pavelko V.I., Perevezentsev V.V., et al. Valid signal isolation method for loose parts monitoring system in the main circulation circuit of WWER reactor. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2018, no. 1 (118), pp. 4–15 (in Russ.).  
DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2018-1-4-15>
- [6] Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal waves in elastic rods. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, 1970, vol. 4, pp. 64–73.
- [7] Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's — Kortevæg — de Vries equation for viscoelastic rods and plates. *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, vol. 32, no. 3, pp. 661–677.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(70\)90290-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90290-8)
- [8] Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates, and shells (a review). *Akusticheskiy zhurnal*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 725–740 (in Russ.).
- [9] Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Nonlinear waves in inhomogeneous cylindrical shells: a new evolution equation. *Akusticheskiy zhurnal*, 2001, vol. 47, no. 3, pp. 359–363 (in Russ.).
- [10] Arshinov G.A., Mogilevich L.I. Nonlinear dispersion waves in viscous-elastic cylindrical shells. *Mathematical Modeling of Dynamic Behavior of Thin Elastic Structures. EUROMECH Colloquium 439*, 2002, pp. 24–27.
- [11] Bochkarev S.A., Matveenkov V.P. Stability of coaxial cylindrical shells containing a rotating fluid. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2013, vol. 6, no. 1, pp. 94–102 (in Russ.).
- [12] Mogilevich L., Ivanov S. Longitudinal waves in two coaxial elastic shells with hard cubic nonlinearity and filled with a viscous incompressible fluid. In: ICIT 2020. Springer Nature Switzerland, 2021, pp. 14–26. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8_2)
- [13] Volmir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Shells in flow of liquid and gas. Problems of hydroelasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1979.
- [14] Samarskiy A.A. *The theory of difference schemes*. Boca Raton, CRC Press, 2001.
- [15] Ilyushin A.A. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, Lomonosov MSU Publ., 1990.

- [16] Ovcharov A.A., Brylev I.S. Mathematical model of deformation of nonlinear elastic reinforced conical shells under dynamic loading. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern Problems of Science and Education], 2014, no. 3 (in Russ.). Available at: <https://science-education.ru/en/article/view?id=13235>
- [17] Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik*. Berlin, Heidelberg Springer, 1958.
- [18] Feldshteyn V.A. Uprugo plasticheskie deformatsii tsilindricheskoy obolochki pri prodolnom udare [Elastic plastic deformations of a cylindrical shell under longitudinal impact]. V kn.: *Volny v neuprugikh sredakh* [In: Waves in non-elastic medium]. Kishinev, AN MolSSR Publ., 1970, pp. 199–204 (in Russ.).
- [19] Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. *Nelineynye volny v tsilindricheskikh obolochkakh* [Nonlinear waves in cylindrical shells]. Saratov, SSTU Publ., 1999.
- [20] Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. Solitary longitudinal-bending waves in cylindrical shell interacting with a nonlinear elastic medium. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 1 (76), pp. 47–60 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-1-47-60>
- [21] Loitsyanskiy L.G. *Mechanics of liquids and gases*. New York, Pergamon Press, 1966.
- [22] Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Grobner bases and generation of difference schemes for partial differential equations. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2006, vol. 2. DOI: <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051>
- [23] Blinkov Y.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods. *Program. Comput. Soft.*, 2017, vol. 43, no. 2, pp. 84–89. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0361768817020049>

**Mogilevich L.I.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekh-nicheskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation); Professor, Branch of Samara State Transport University in Saratov (Internatsionalniy proezd 1a, Saratov, 410004 Russian Federation).

**Blinkov Yu.A.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Head of Department of Mathematical and Computer Modeling, Saratov State University (Astrakhanskaya ul. 83, Saratov, 410012 Russian Federation).

**Ivanov S.V.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical and Computer Modeling, Saratov State University (Astrakhanskaya ul. 83, Saratov, 410012 Russian Federation).

**Popov V.S.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekh-nicheskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation); Professor, Leading Research Fellow, Institute for Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences (Rabochaya ul. 24, Saratov, 410028 Russian Federation).

**Kondratov D.V.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Head of Department of Information Security of Automated Systems, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation); Professor, Department of Mathematical and Computer Modeling, Saratov State University (Astrakhanskaya ul. 83, Saratov, 410012 Russian Federation); Leading Research Fellow, Institute for Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences (Rabochaya ul. 24, Saratov, 410028 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Mogilevich L.I., Blinkov Yu.A., Ivanov S.V., et al. Strain waves in two physically nonlinear fluid-filled coaxial shells featuring structural damping and interacting with the surrounding medium. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2022, no. 3 (140), pp. 34–60 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2022-3-34-60>