

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕНКИ КАНАЛА,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ВИБРИРУЮЩИМ ШТАМПОМ  
ЧЕРЕЗ СЛОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

Л.И. Могилевич<sup>1, 2</sup>

mogilevich@info.sgu.ru

В.С. Попов<sup>1, 3</sup>

vic\_p@bk.ru

А.А. Попова<sup>1</sup>

anay\_p@bk.ru

А.В. Христофорова<sup>4</sup>

alevtinahristoforova@yandex.ru

<sup>1</sup> СГТУ имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Российская Федерация

<sup>2</sup> Филиал СамГУПС в г. Саратове, г. Саратов, Российская Федерация

<sup>3</sup> ИПТМУ РАН, г. Саратов, Российская Федерация

<sup>4</sup> СГУ, г. Саратов, Российская Федерация

---

**Аннотация**

Разработана и исследована математическая модель для изучения динамики взаимодействия стенки канала, опирающейся на нелинейную пружину, с вибрирующей противоположной стенкой через слой вязкой жидкости, заполняющей канал. Рассмотрен плоский щелевой канал, образованный двумя прямоугольными в плане абсолютно жесткими стенками, параллельными друг другу. Один размер канала в плане значительно больше другого, что обуславливает переход к плоской задаче. Нижняя стенка канала опирается на пружину с кубической нелинейной характеристикой, а верхняя — это штамп, который совершает колебания по заданному закону. Предположено, что щель между стенками значительно меньше продольного размера канала, а амплитуды колебаний стенок значительно меньше размера щелевого зазора. Движение вязкой жидкости в канале представлено ползущим. Математическая модель рассматриваемого канала представляет собой уравнение динамики массы на пружине, имеющей кубическую нелинейность, а также уравнения Навье — Стокса и неразрывности, дополненные граничными условиями непроскальзывания жидкости на стенках канала и ее свободного истечения на торцах. Исследованы установившиеся нелинейные колебания нижней стенки канала на частоте

**Ключевые слова**

*Моделирование, нелинейные колебания, кубическая нелинейность, вязкая жидкость, метод гармонического баланса, гидроупругий отклик*

вынуждающей силы и определен ее гидроупругий отклик. Предложенную модель можно использовать для исследования нелинейных колебаний упругозакрепленных элементов, контактирующих с жидкостью и входящих в состав современных приборов и агрегатов

Поступила 16.07.2021

Принята 02.11.2021

© Автор(ы), 2022

---

**Введение.** В современных приборах и агрегатах широко применяются упругие элементы, например, в качестве подвесов [1] и чувствительных компонентов датчиков [2]. В приборостроении также часто используются жидкости (газы) для гашения колебаний, гидростатического и гидродинамического подвеса, термостабилизации и др. Например, в [3] показаны результаты исследований демпфирующих свойств гидроопор систем виброгашения при использовании в них различных жидкостей. Вопросы взаимодействия жидкости (газа) с элементами конструкции гироскопических приборов и оценка данного взаимодействия на виброустойчивость и точность приборов приведены в [4, 5]. В [6] предложена модель для определения ширины зоны контакта между твердыми поверхностями и тонкостенным каналом охлаждения плоскоовального сечения, находящимся между ними, при его гидроупругом деформировании под давлением охлаждающей жидкости внутри канала.

Совместный учет влияния упругой податливости элементов конструкции и жидкости требует постановки и исследования задач гидроупругости. Традиционно в рамках данных задач ограничиваются учетом линейных свойств упругих элементов [7, 8]. В указанных работах рассмотрен случай контакта одной поверхности упругого элемента в виде пластины с объемом идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что учет жидкости приводит к демпфированию колебаний за счет преобразования энергии на волнообразование, а также наблюдается эффект увеличения инерции, оцениваемый присоединенной массой, который ведет к снижению собственных частот колебаний упругого элемента. Исследование присоединенных масс жидкости, учитывающих ее инерционные свойства при колебаниях упругих пластин, имеющих разную форму и способы закрепления, выполнено в [9]. Свободные колебания круглой пластины на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, объем которой ограничен жесткими стенками, исследованы в [10]. Аналогичная задача в случае погружения упругой пластины под свободную поверхность идеальной жидкости рассмотрена в [11]. Исследования динамики упругих элементов датчиков давления и вибрационных устройств на базе решения задач гидроупругости линейного и нелинейного упругого элемента

в виде пластины, взаимодействующей с идеальной жидкостью, проведены в [12, 13].

Приведенные исследования задач гидроупругости исключают из рассмотрения вязкость жидкости, которая во многом определяет демпфирующие свойства в колебательной системе. Данный фактор учтен, например, в [14], где выполнено обобщение исследований [7]. Гидроупругие колебания упругоподвешенных элементов вибромашины, взаимодействующих со слоем вязкой жидкости между ними, рассмотрены в [15]. Поперечные колебания двух соосных дисков, поддерживаемых линейными пружинами, т. е. имеющих линейные характеристики восстанавливающей силы и взаимодействующих друг с другом через слой вязкой несжимаемой жидкости между ними, изучены в [16]. Задача о колебаниях балки Эйлера — Бернулли, имеющей консольное закрепление и окруженной вязкой жидкостью, решена в [17]. Задача о колебаниях пьезоэлемента, находящегося в потоке вязкой жидкости, исследована в [18]. Отметим также работы [19, 20], в которых выполнены исследования колебаний стенок канала, заполненного вязкой жидкостью, имеющих подвес на линейных упругих элементах.

В настоящее время материалы, из которых изготавливаются упругие элементы приборов, могут иметь существенные нелинейные упругие характеристики. Поэтому развитие моделей для исследования колебаний абсолютно жестких компонентов конструкций, взаимодействующих с жидкостью и имеющих нелинейный упругий подвес, — это актуальная проблема приборостроения. Однако работ по моделированию нелинейных гидроупругих колебаний указанных компонентов при их взаимодействии с вязкой жидкостью недостаточно. Так, в [21] предложены общие подходы к разработке математической модели гидроупругих колебаний абсолютно жесткого диска, подвешенного на пружине с кубической нелинейностью, однако гидроупругий отклик диска не найден.

**Постановка задачи.** Рассмотрим узкий канал (рис. 1), образованный двумя прямоугольными абсолютно жесткими стенками, параллельными друг другу. Нижняя стенка канала опирается на пружину с кубической нелинейностью, т. е. на пружину, у которой нелинейная характеристика восстанавливающей силы изменяется симметрично в зависимости от ее растяжения/сжатия. Верхняя стенка канала представляет собой абсолютно жесткий вибрирующий штамп, совершающий вертикальные колебания по заданному закону. Введем в рассмотрение декартову систему координат  $x, y, z$ , центр которой свяжем с геометрическим центром внутренней поверхности нижней стенки канала в невозмущенном состоянии. Щель между стенками в невозмущенном состоянии имеет поперечный размер

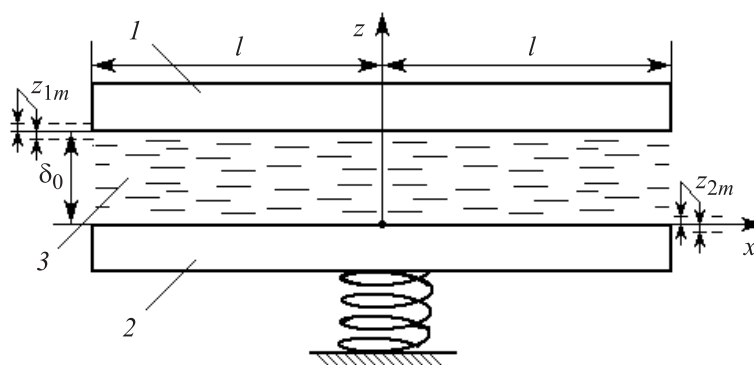


Рис. 1. Схема узкого канала:

- 1 — верхняя стенка, вибрирующая по заданному гармоническому закону;  
 2 — нижняя стенка, совершающая нелинейные колебания; 3 — вязкая жидкость

$\delta_0$ . Щель полностью заполнена вязкой несжимаемой жидкостью, т. е. плотность жидкости принимаем постоянной, а ее реологические свойства определяются законом Ньютона о вязком трении. Считаем, что геометрические размеры стенок канала в плане  $2l \times b$ . При этом  $b \gg 2l$ , что позволяет перейти к рассмотрению плоской задачи гидромеханики, в рамках которой параметры потока зависят только от продольной координаты  $x$ , поперечной координаты  $z$  и времени, а изменением гидродинамических параметров в направлении оси  $y$  пренебрегаем. Кроме того, в силу узости канала полагаем  $2l \gg \delta_0$ . Штамп совершает гармонические колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $z_{1m}$  и возбуждает нелинейные колебания нижней стенки с частотой  $\eta$  и амплитудой  $z_{2m}$ . К торцам канала примыкают торцевые полости, заполненные той же жидкостью. При вибрации стенок канала жидкость на торцах может свободно перетекать из узкого канала в полости, в которых поддерживается постоянное давление  $p_0$  — начальный уровень давления, принимаемый далее равным нулю (начало отсчета давления). Полагаем, что амплитуды колебаний стенок значительно меньше  $\delta_0$ , а в силу вязкости жидкости переходные процессы затухают, далее исследуем установившиеся нелинейные вынужденные колебания нижней стенки канала, т. е. ее ангармонические колебания [22–24].

Пусть закон движения верхней стенки-штампа гармонический и задан в следующем виде:  $z_1 = z_{1m} f_1(\omega t)$ ,  $f_1(\omega t) = \sin(\omega t)$ . Уравнение движения нижней стенки канала как одномассовой системы с одной степенью свободы запишем на основе второго закона Ньютона в следующем виде:

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + F(z) = N. \quad (1)$$

Здесь  $m_2$  — масса нижней стенки;  $F(z)$  — нелинейная восстанавливающая сила;  $N$  — реакция слоя вязкой несжимаемой жидкости, обусловленная сдавливанием жидкости стенками канала.

Симметричная восстанавливающая сила, действующая на стенку со стороны поддерживающей пружины с жесткой кубической нелинейностью, может быть представлена как [23]

$$F(z) = n_1 z_2 + n_3 z_2^3. \quad (2)$$

Здесь  $n_1$  и  $n_3 > 0$  — коэффициенты жесткости опорной пружины при линейном и нелинейном кубическом члене.

Реакция слоя вязкой несжимаемой жидкости определяется ее нормальным напряжением  $q_{zz}$ , действующим на внутреннюю поверхность нижней стенки, следующим образом:

$$N = b \int_{-l}^l q_{zz} dx \text{ при } z = z_{2m} f_2(\eta t), \quad (3)$$

где  $q_{zz} = -p + 2\rho\nu(\partial u_z / \partial z)$  — нормальное напряжение в слое вязкой несжимаемой жидкости [25];  $z_{2m} f_2(\eta t)$  — закон движения нижней стенки.

Движение вязкой несжимаемой жидкости в узких щелях можно рассматривать как ползущее, как принято в гидродинамической теории смазки [25]. Данное движение характеризуется существенным преобладанием в жидкости сил вязкого трения над силами инерции. В этом случае уравнения ее движения представляют собой уравнения Навье — Стокса, в которых отброшены инерционные члены, но удержаны члены вязкого трения, записанные совместно с уравнением неразрывности. Для плоской задачи данные уравнения имеют вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right); \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right); \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Краевые условия уравнений (4) сформулируем из условий непротекания (прилипания) вязкой жидкости на вибрирующих стенках канала, т. е. при записи данных условий исходим из того, что на границах контакта выполняются условия совпадения скоростей движения жидкости и стенки канала:

$$\begin{aligned} u_x = 0, \quad u_z = z_{1m} \frac{df_1(\omega t)}{dt} \text{ при } z = \delta_0 + z_{1m} f_1(\omega t); \\ u_x = 0, \quad u_z = z_{2m} \frac{df_2(\eta t)}{dt} \text{ при } z = z_{2m} f_2(\eta t), \end{aligned} \quad (5)$$

и условий свободного истечения на торцах, заключающихся в совпадении давлений в торцевых поперечных сечениях канала с начальным уровнем давления в торцевых полостях,

$$p = p_0 = 0 \text{ при } x = \pm l. \quad (6)$$

**Определение гидроупругого отклика стенки канала, поддерживаемой пружиной с кубической нелинейностью.** Рассматривая движение вязкой несжимаемой жидкости в узком щелевом канале, введем следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{l}; \quad \zeta = \frac{z}{\delta_0}; \quad u_x = z_{2m} \eta \frac{l}{\delta_0} U_\xi; \\ u_z = z_{2m} \eta U_\zeta; \quad p = \frac{\rho v z_{2m} \eta}{\delta_0} \frac{l^2}{\delta_0^2} P. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнения динамики жидкости (4) и их краевые условия (5), (6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} = \left(\frac{\delta_0}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \left(\frac{\delta_0}{l}\right)^2 \left[ \left(\frac{\delta_0}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right]; \\ u_z = z_{2m}^3 \eta U_\zeta; \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{z_{1m}}{z_{2m}} \frac{1}{\eta} \frac{df_1(\omega t)}{dt} \text{ при } \zeta = 1 + \frac{z_{1m}}{\delta_0} f_1(\omega t); \\ U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{1}{\eta} \frac{df_2(\eta t)}{dt} \text{ при } \zeta = \frac{z_{2m}}{\delta_0} f_2(\eta t); \\ P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1. \end{aligned} \quad (9)$$

В рассматриваемой постановке  $z_{1m}/z_{2m} \approx 1$ , а параметры  $\delta_0/l \ll 1$ ,  $z_{m1}/\delta_0 \ll 1$ ,  $z_{m2}/\delta_0 \ll 1$ , т. е. члены при данных параметрах в (8) и (9) можно опустить, в результате получим уравнения динамики слоя вязкой жидкости

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}; \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0; \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0 \quad (10)$$

и соответствующие краевые условия

$$\begin{aligned} U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{z_{1m}}{z_{2m}} \frac{1}{\eta} \frac{df_1(\omega t)}{dt} \text{ при } \zeta = 1; \\ U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{1}{\eta} \frac{df_2(\eta t)}{dt} \text{ при } \zeta = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1.$$

Принимая во внимание указанные замечания, нормальное напряжение  $q_{zz}$  в переменных (7) запишем как

$$q_{zz} = -(\rho v z_{2m} \eta l^2 / \delta_0^3) P \Big|_{\xi=0}. \quad (12)$$

Согласно второму уравнению в (10), давление жидкости в канале является функцией продольной координаты и времени, т. е. оно изменяется вдоль канала от одного поперечного сечения к другому, но не изменяясь в каждом из них. Учитывая это и решая задачу (10) и (11), определяем закон распределения безразмерного давления жидкости в узком канале в следующем виде:

$$P = \frac{6(\xi^2 - 1)}{\eta} \left[ \frac{z_{1m}}{z_{2m}} \frac{df_1}{dt} - \frac{df_2}{dt} \right]. \quad (13)$$

Согласно (13), давление жидкости в сечении канала определяется законами движения его стенок и удаленностью сечения от центра канала. Максимальное давление будет в центре канала, а на торцах давление уменьшается до нуля (уровня давления в торцевых полостях).

Подставляя (13) в (12), учитывая (3), (2) и (1), получаем уравнение нелинейных колебаний стенки канала, вызванных ее взаимодействием с вибрирующим штампом через слой вязкой жидкости,

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + K_2 \frac{dz_2}{dt} + n_1 z_2 + n_3 z_2^3 = K_1 \frac{dz_1}{dt}, \quad (14)$$

а учитывая заданный закон движения штампа, уравнение запишем в виде

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + K_2 \frac{dz_2}{dt} + n_1 z_2 + n_3 z_2^3 = z_{1m} \omega K_1 \cos \omega t. \quad (15)$$

Здесь  $K_1 = K_2 = K = 8l^3 b \rho v (\delta_0)^{-3}$  — коэффициенты демпфирования вязкой жидкости за счет ее выдавливания стенками из узкой щели, образованной ими.

Отметим, что множитель  $z_{1m} \omega$  представляет собой амплитуду виброскорости движения штампа, следовательно, правая часть (15) есть вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону с амплитудой  $z_{1m} \omega K_1$ , а полученное уравнение представляет собой уравнение осциллятора Дуффинга [22]. Далее при расчетах полагаем, что амплитуда виброскорости  $z_{1m} \omega$  задается, исходя из скорости 1 м/с, т. е.  $z_{1m} \omega = k \cdot 1$  (м/с), где  $k$  — коэффициент, определяющий виброперегрузку по скорости.



Известно [23, 24], что при малых амплитудах колебаний и коэффициентах затухания решением уравнения Дуффинга являются ангармонические колебания. Для решения уравнения (15) воспользуемся методом гармонического баланса [23, 24] и ограничимся исследованием основного гидроупругого отклика нижней стенки канала на частоте, близкой к частоте вынуждающей силы. Другими словами, частоту вынужденных колебаний стенки, поддерживаемой пружиной с кубической нелинейностью, принимаем равной частоте вынуждающей силы, а искомое решение представляем гармоническим, т. е.  $\eta \approx \omega$  и  $z_2 = z_{2m} \cos(\omega t - \varphi)$ . Выполняя процедуру линеаризации (15) методом гармонического баланса [23, 24], получаем алгебраическую систему

$$z_{2m} \left( n_1 - m_2 \omega^2 \right) + \frac{3}{4} n_3 z_{2m}^3 = z_{1m} \omega K \cos \varphi; \quad K \omega z_{2m} = z_{1m} \omega K \sin \varphi. \quad (16)$$

Возводя в квадрат правую и левую части уравнений, а затем суммируя их, получаем уравнение для определения основного гидроупругого отклика стенки:

$$\left( \left( n_1 - m_2 \omega^2 \right) + \frac{3}{4} n_3 z_{2m}^2 \right)^2 z_{2m}^2 + (K \omega z_{2m})^2 = (z_{1m} \omega K)^2. \quad (17)$$

Из (17) с учетом ранее сделанных замечаний можно записать основной гидроупругий отклик стенки канала, опирающейся на пружину с кубической нелинейностью и совершающей нелинейные колебания с частотой вынуждающей силы — ее нелинейную амплитудную частотную характеристику

$$z_{2m} = \frac{kK/m_2}{\sqrt{(\omega_*^2 - \omega^2)^2 + (K\omega/m_2)^2}}, \quad (18)$$

которая может быть приведена к виду

$$\omega^2 = \omega_*^2 - (1/2)(K/m_2)^2 \pm \sqrt{z_{2m} m_2 - \omega_*^2 (K/m_2)^2 + (1/4)(K/m_2)^4}, \quad (19)$$

где  $\omega_*^2(z_{2m}) = (n_1/m_2) + (3/4) z_{2m}^2 n_3/m_2$ .

Первое слагаемое  $\omega_*$  в (19) определяет так называемую скелетную кривую, соответствующую уравнению Дуффинга, из которого исключены демпфирующий член и вынуждающая сила, т. е. для рассматриваемой задачи в (15) (или в (19))  $K = 0$ . Другими словами, скелетная кривая — это кривая собственных незатухающих колебаний нелинейной консервативной системы с кубической нелинейностью.

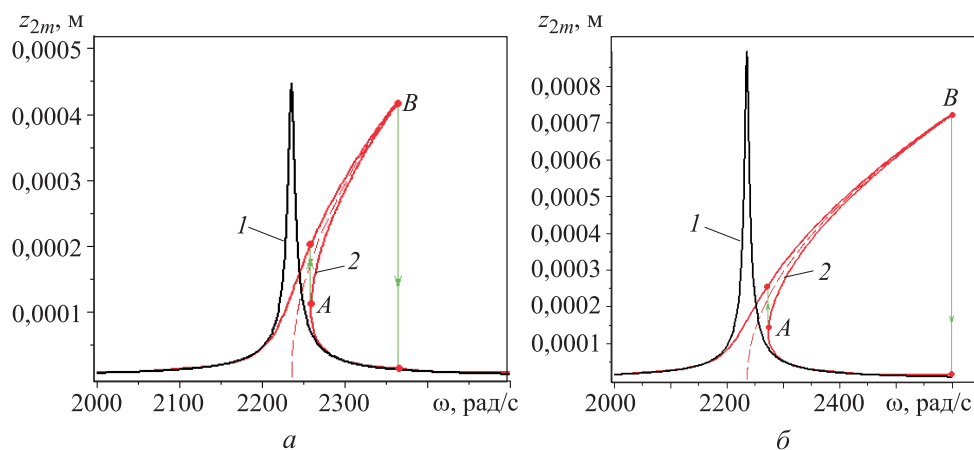


Кроме того, из системы (16) можно получить фазовую характеристику рассматриваемой стенки канала:

$$\operatorname{tg} \varphi = (K\omega/m_2)(\omega_*^2 - \omega^2)^{-1}. \quad (20)$$

В правую и левую части выражения (18) входит амплитуда колебаний нижней стенки, что затрудняет его прямое использование, однако нелинейный гидроупругий отклик пластины можно построить численно, используя (19). Отметим, что при  $n_3 = 0$  имеем случай, когда нижняя стенка канала опирается на линейную пружину, совершая гармонические колебания, возбуждаемые вибрацией штампа. При этом (18) будет являться линейной амплитудной характеристикой, однозначно связывающей амплитуду и частоту колебаний стенки.

Для иллюстрации полученных результатов приведем пример численного расчета нелинейного и линейного гидроупругих откликов нижней стенки канала по (19) и (18) для амплитуды виброскорости штампа  $z_{1m}\omega = 1$  м/с при следующих геометрических и физико-механических параметрах канала и вязкой жидкости в нем:  $l = 0,1$  м;  $\delta_0 = 0,05$  м;  $b = 0,5$  м;  $m_2 = 2$  кг;  $n_1 = 10^7$  кг/с<sup>2</sup>;  $n_3 = 9 \cdot 10^{12}$  кг/(м<sup>2</sup> · с<sup>2</sup>);  $\rho = 1,84 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu = 2,53 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с. По результатам расчетов построены кривые гидроупругого отклика стенки канала (рис. 2).



**Рис. 2.** Гидроупругий отклик стенки канала при  $k = 1$  (а) и  $k = 2$  (б):

1 — линейная опорная пружина ( $n_3 = 0$ ); 2 — пружина с жесткой кубической нелинейностью ( $n_3 > 0$ ); штриховая — скелетная кривая  $\omega_*$ .

**Заключение.** Как следует из расчетов, учет кубической нелинейности опорной пружины стенки канала приводит к изгибу амплитудной характеристики на основном резонансе, а увеличение амплитуды виброскорости

штампа ведет к увеличению амплитуд колебаний на основном резонансе и изгиба кривой гидроупругого отклика. Кроме того, результаты расчетов позволяют определить частоты, на которых амплитуды нелинейных колебаний могут изменяться скачкообразно. Данные частоты соответствуют диапазону между точками *A* и *B* (см. рис. 2), в которых при увеличении (или уменьшении) частоты колебаний штампа наблюдается скачкообразное изменение амплитуд колебаний нижней стенки, так как известно [22, 24], что нижняя часть нелинейной характеристики гидроупругого отклика между точками *A* и *B* является неустойчивой. Направления скачков амплитуды указаны стрелками. При этом увеличение амплитуды вибро- скорости штампа увеличивает диапазон указанных частот.

Предложена математическая модель для исследования нелинейных гидроупругих колебаний стенки канала, поддерживаемой пружиной с жесткой кубической нелинейностью. Показано, что для узкого канала, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, уравнение движения рассматриваемой стенки сводится к уравнению Дуффинга, в котором коэффициент демпфирования определяется вязкостью жидкости и геометрическими размерами канала. Определен нелинейный гидроупругий отклик стенки канала, заполненного вязкой жидкостью на основном резонансе. Приведенный пример расчета показал возможность определения частотного диапазона, в котором наблюдается скачкообразное изменение амплитуд колебаний стенки. Предложенная модель может быть использована для оценки колебаний элементов приборов и агрегатов, установленных на нелинейно-упругих основаниях и контактирующих со слоем вязкой жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Топильская С.В., Бородулин Д.С., Корнюхин А.В. Экспериментальная оценка допустимых механических воздействий на динамически настраиваемый гироскоп. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2018, № 4 (121), с. 69–79. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2018-4-69-79>
- [2] Тиняков Ю.Н., Николаева А.С. О расчете мембран датчиков давления. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2015, № 6 (105), с. 135–142. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2015-6-135-142>
- [3] Аббакумов Е.И., Гордеев Б.А., Ерофеев В.И. и др. Исследования гидравлических виброопор с различными рабочими жидкостями. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2002, № 2, с. 33–36.
- [4] Андрейченко К.П., Смарунь А.Б. Моделирование аксиального гидромеханического эффекта в гироскопах со сферическим гидродинамическим подвесом. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2011, № 3, с. 27–33.

- [5] Цинь Ц., Подчезерцев В.П. Влияние конструктивных особенностей и параметров газового заполнения на характеристики динамически настраиваемых гироскопов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2017, № 2 (131), с. 4–20. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2017-2-4-20>
- [6] Добрянский В.Н., Рабинский Л.Н., Радченко В.П. и др. Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приемопередающего модуля активной фазированной антенной решетки. *Труды МАИ*, 2018, № 101. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98252>
- [7] Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proc. Roy. Soc. A*, 1921, vol. 98, no. 690, pp. 205–216. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>
- [8] Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, no. 7, pp. 743–761. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>
- [9] Morozov D., Indeitsev D., Michailov A. Added mass study of plane structures at their various motions. *Materials Physics and Mechanics*, 2019, vol. 41, no. 1, pp. 116–124. DOI: [https://doi.org/10.18720/MPM.4112019\\_19](https://doi.org/10.18720/MPM.4112019_19)
- [10] Amabili M. Vibrations of circular plates resting on a sloshing liquid: solution of the fully coupled problem. *J. Sound Vib.*, 2001, vol. 245, no. 2, pp. 261–283. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3560>
- [11] Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface. *J. Sound Vib.*, 2013, vol. 332, no. 12, pp. 3064–3085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
- [12] Вельмисов П.А., Покладова Ю.В. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод–датчик давления». *Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки*, 2011, № 1, с. 137–144.
- [13] Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическая модель вибрационного устройства. *Автоматизация процессов управления*, 2014, № 3, с. 58–67.
- [14] Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: extension of Lamb's model. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 326, no. 1-2, pp. 332–339. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>
- [15] Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвигаемым слоем жидкости, находящимся между ними. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2010, № 4, с. 23–32.
- [16] Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками. *Изв. РАН. МЖГ*, 2011, № 3, с. 42–55.
- [17] Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler — Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, vol. 45, no. 2, pp. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.12.003>

- [18] Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic response and energy harvesting potential of flexible piezoelectric beams in viscous flow. *Phys. Fluids*, 2012, vol. 24, no. 5, art. 054106. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4719704>
- [19] Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и поперечные колебания упругозакрепленной стенки клиновидного канала, установленного на вибрирующем основании. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2018, № 3, с. 28–36. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0235711918030045>
- [20] Попов В.С., Попова А.А. Моделирование взаимодействия стенки канала с упругозакрепленным торцевым уплотнением. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2020, т. 12, № 2, с. 387–400. DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-2-387-400>
- [21] Попова А.А. Математическая модель колебаний диска, имеющего упругую связь с жесткой восстанавливающей силой. *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках*, 2018, № 3, с. 13–24.
- [22] Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1979.
- [23] Krack M., Gross J. Harmonic balance for nonlinear vibration problems. Nature Switzerland AG, Springer, 2020.
- [24] Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М., Наука, 1991.
- [25] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Дрофа, 2003.

**Могилевич Лев Ильич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, г. Саратов, Политехническая ул., д. 77); профессор, Филиал СамГУПС в г. Саратове (Российская Федерация, 410004, г. Саратов, Интернациональный пр-д, д. 1а).

**Попов Виктор Сергеевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, г. Саратов, Политехническая ул., д. 77); профессор, ИПТМУ РАН (Российская Федерация, 410028, г. Саратов, Рабочая ул., д. 24).

**Попова Анна Александровна** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ» СГТУ имени Гагарина Ю.А. (Российская Федерация, 410054, г. Саратов, Политехническая ул., д. 77).

**Христофорова Алевтина Владимировна** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математика» СГУ (Российская Федерация, 410012, г. Саратов, Астраханская ул., д. 83).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. и др. Математическое моделирование нелинейных колебаний стенки канала, взаимодействующей с вибрирующим штампом через слой вязкой жидкости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2022, № 2 (139), с. 26–41.

DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2022-2-26-41>

---

**MATHEMATICAL SIMULATION OF NONLINEAR VIBRATIONS  
OF A CHANNEL WALL INTERACTING  
WITH A VIBRATING DIE VIA VISCOUS LIQUID LAYER**

**L.I. Mogilevich<sup>1,2</sup>**

mogilevich@info.sgu.ru

**V.S. Popov<sup>1,3</sup>**

vic\_p@bk.ru

**A.A. Popova<sup>1</sup>**

anay\_p@bk.ru

**A.V. Khristoforova<sup>4</sup>**

alevtinahristoforova@yandex.ru

<sup>1</sup> SSTU, Saratov, Russian Federation

<sup>2</sup> SSTU Branch in Saratov, Saratov, Russian Federation

<sup>3</sup> IPTMU RAS, Saratov, Russian Federation

<sup>4</sup> SSU, Saratov, Russian Federation

---

**Abstract**

The article considers the developed mathematical model and investigates the dynamics of the interaction of a channel wall supported by a nonlinear spring with a vibrating opposite wall through a viscous fluid layer filling the channel. A flat slotted channel formed by two absolutely rigid rectangular walls, parallel to each other was investigated. One of the channel dimensions in the plan was much larger than the other, which leads to the transition to a plane problem. The bottom channel wall rested on a spring with a cubic nonlinear characteristic, and the upper wall was a die oscillating according to a given law. The gap between the walls was assumed to be much smaller than the channel longitudinal dimension, and the amplitudes of wall vibrations were much less than the channel gap. The movement of the viscous fluid in the channel was considered to be creeping. The mathematical model of the channel under consideration consisted of an equation of the dynamics of a single-mass system with a spring having a cubic nonlinearity, as well as the Navier — Stokes and continuity equations, supplemented by the boundary conditions for fluid nonslip on the channel walls and its free outflow at the ends. The steady-state nonlinear vibrations of the bottom channel wall at the fundamental frequency were studied, and its hydroelastic response was determined. The proposed model can be used to study nonlinear vibrations of elastically fixed elements that are in contact with liquid and are parts of modern devices and assemblies

**Keywords**

*Modeling, nonlinear vibrations, cubic nonlinearity, viscous fluid, harmonic balance method, hydroelastic response*

Received 16.07.2021

Accepted 02.11.2021

© Author(s), 2022

## REFERENCES

- [1] Topil'skaya S.V., Borodulin D.S., Korn'yukhin A.V. Experimental estimation of allowable mechanical impact on dynamically adjusted gyroscope. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2018, no. 4 (121), pp. 69–79 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2018-4-69-79>
- [2] Tinyakov Yu.N., Nikolaeva A.S. Computation of pressure sensor membrane. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2015, no. 6 (105), pp. 135–142 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2015-6-135-142>
- [3] Abbakumov E.I., Gordeev B.A., Erofeev V.I., et al. Study on hydraulic vibrosupports with different working liquids. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2002, no. 2, pp. 33–36 (in Russ.).
- [4] Andreichenko K.P., Smarun' A.B. Simulation of the axial hydromechanical effect in gyroscopes with a spherical hydrodynamic suspension. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2011, vol. 40, no. 3, pp. 216–221. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618811020038>
- [5] Qin Z., Podchezertsev V.P. Influence of design features and gas filling parameters on dynamically tuned gyroscope characteristics. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2017, no. 2 (113), pp. 4–20 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0236-3933-2017-2-4-20>
- [6] Dobryanskiy V.N., Rabinskiy L.N., Radchenko V.P., et al. Width evaluation of contact zone between flat-oval cooling channels and transmitting module case of active phased-array antenna. *Trudy MAI*, 2018, no. 101 (in Russ.). Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98252>
- [7] Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proc. Roy. Soc. A*, 1921, vol. 98, no. 690, pp. 205–216. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>
- [8] Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, no. 7, pp. 743–761. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>
- [9] Morozov D., Indeitsev D., Michailov A. Added mass study of plane structures at their various motions. *Materials Physics and Mechanics*, 2019, vol. 41, no. 1, pp. 116–124. DOI: [https://doi.org/10.18720/MPM.4112019\\_19](https://doi.org/10.18720/MPM.4112019_19)
- [10] Amabili M. Vibrations of circular plates resting on a sloshing liquid: solution of the fully coupled problem. *J. Sound Vib.*, 2001, vol. 245, no. 2, pp. 261–283. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3560>
- [11] Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface. *J. Sound Vib.*, 2013, vol. 332, no. 12, pp. 3064–3085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.01.007>
- [12] Vel'misov P.A., Pokladova Yu.V. On some mathematical models of mechanical system “pipeline–pressure” sensor. *Vestnik SamGTU. Ser. Tekhnicheskie nauki* [Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series], 2011, no. 1, pp. 137–144 (in Russ.).



- [13] Ankilov A.V., Vel'misov P.A., Tamarova Yu.A. Mathematical model of a vibration device. *Avtomatizatsiya protsessov upravleniya* [Automation of Control Processes], 2014, no. 3, pp. 58–67 (in Russ.).
- [14] Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: extension of Lamb's model. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 326, no. 1-2, pp. 332–339.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>
- [15] Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Dynamics of interaction of elastic elements of a vibrating machine with the compressed liquid layer lying between them. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2010, vol. 39, no. 4, pp. 322–331.  
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618810040047>
- [16] Mogilevich L.I., Popov V.S. Investigation of the interaction between a viscous incompressible fluid layer and walls of a channel formed by coaxial vibrating discs. *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, no. 3, pp. 375–388. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462811030033>
- [17] Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler — Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, vol. 45, no. 2, pp. 317–329. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2013.12.003>
- [18] Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic Response and energy harvesting potential of flexible piezoelectric beams in viscous flow. *Phys. Fluids*, 2012, vol. 24, no. 5, art. 054106. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4719704>
- [19] Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Longitudinal and transverse oscillations of an elastically fixed wall of a wedge-shaped channel installed on a vibrating foundation. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2018, vol. 47, no. 3, pp. 227–234.  
DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618818030093>
- [20] Popov V.S., Popova A.A. Modeling of a channel wall interaction with an end seal flexibly restrained at the edge. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer Research and Modeling], 2020, vol. 12, no. 2, pp. 387–400 (in Russ.).  
DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-2-387-400>
- [21] Popova A.A. Mathematical model of spring-disk system with hardening restoring force. *Matematicheskoe modelirovanie, kom'yuternyy i naturnyy eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2018, no. 3, pp. 13–24 (in Russ.).
- [22] Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 1979.
- [23] Krack M., Gross J. *Harmonic balance for nonlinear vibration problems*. Nature Switzerland AG, Springer, 2020.
- [24] Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1991.
- [25] Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow, Drofa Publ., 2003.

**Mogilevich L.I.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, SSTU (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation); Professor, SSTU Branch in Saratov (Internacional'niy proezd 1a, Saratov, 410004 Russian Federation).



**Popov V.S.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, SSTU (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation); Professor, IPTMU RAS (Rabochaya ul. 24, Saratov, 410028 Russian Federation).

**Popova A.A.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, SSTU (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

**Khristoforova A.V.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematics, SSU (Astrakhanskaya ul. 83, Saratov, 410012 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., et al. Mathematical simulation of nonlinear vibrations of a channel wall interacting with a vibrating die via viscous liquid layer. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2022, no. 2 (139), pp. 26–41 (in Russ.).

DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2022-2-26-41>