

АДАПТИВНАЯ ОЦЕНКА ЧАСТОТЫ СИГНАЛА**В.В. Чудников**

chudnikov@bmstu.ru

Б.И. Шахтарин

shakhtarin@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**Аннотация**

Предложен адаптивный алгоритм оценки частот гармонических составляющих в сигнале на фоне аддитивного белого шума. Данный метод является итерационным, что отличает его от периодограммных и параметрических методов спектральной оценки. Ключевая особенность алгоритма — достаточно точная оценка только для заранее известного числа составляющих, входящих в исследуемый сигнал. В исходном дискретном сигнале с помощью метода градиентного спуска выполнен поиск частот в каждом временном отсчете. Частоты оцениваются при стремлении частотной ошибки к определенному значению. В основе поиска лежит представление значения текущего отсчета гармонического сигнала известной частоты двумя предыдущими значениями. Зная число составляющих, входящих в исходную сигнальную последовательность, можно сформировать результирующую последовательность, содержащую только остаточный шум. Приведена математическая модель алгоритма, смоделирована его работа для разных условий применения, показаны точность работы алгоритма (оценки частот) и число итераций для различных отношений сигнал/шум

Ключевые слова

Спектральная оценка, оценка частоты, спектр, комплексные синусоиды, поиск частот

Поступила 26.06.2019

© Автор(ы), 2019

Введение. Цифровые методы оценки энергетического спектра применяются в различных отраслях: при анализе данных, получаемых с сейсмических датчиков, при обработке изображений и аудиоданных, в медицинской диагностике, связной аппаратуре и т. д. Периодограммные (методы Барлетта, Уэлча, Юла — Уокера и др.), параметрические и декомпозиционные (авторегрессионные, MUSIC, ESPRIT и др.) методы спектральной оценки в последнее время широко используются при обработке данных в радиолокационных системах автомобилей для оценки положения целей

в пространстве, а также в приемных системах при локализации источника сигнала излучения [1–3]. Упомянутые методы применимы для широкополосных сигналов и сформировали классический подход к спектральной оценке при цифровой обработке сигналов.

В то же время существует группа методов, позволяющая оценивать спектральные составляющие в анализируемом сигнале [1, 4, 5]. Как правило, это итерационные адаптивные алгоритмы, в некоторых случаях дающие более точную оценку частот. Такие алгоритмы находят частое применение в телефонии и при обработке голосовых данных [6–8].

В настоящей статье приведен адаптивный алгоритм оценки частот гармонических составляющих на фоне аддитивного белого шума. Представленный метод можно использовать для спектральной оценки сигнала при заранее известном количестве синусоидальных составляющих.

Модель сигнала. Представим входной дискретный сигнал как сумму гармонических составляющих:

$$x(n) = \sum_{j=1}^M A_j e^{i \cdot 2\pi f_j n} + u(n), \quad (1)$$

где M — число составляющих; A_j и f_j — амплитуда и частота j -й гармонической составляющей; $u(n)$ — белый шум.

Используем следующее представление отсчета гармонического сигнала с частотой f_j :

$$\begin{aligned} e^{i \cdot 2\pi f_j n} &= e^{i \cdot 2\pi f_j (n-1)} e^{i \cdot 2\pi f_j} = e^{i \cdot 2\pi f_j (n-1)} \left(e^{i \cdot 2\pi f_j} + e^{-i \cdot 2\pi f_j} - e^{-i \cdot 2\pi f_j} \right) = \\ &= e^{i \cdot 2\pi f_j (n-1)} \cdot 2 \cos(2\pi f_j) - e^{i \cdot 2\pi f_j (n-2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Каждый текущий отсчет может быть представлен двумя предыдущими.

Преобразуем (1) к следующему виду:

$$x(n) = A_1 e^{i \cdot 2\pi f_1 n} + \sum_{j=2}^M A_j e^{i \cdot 2\pi f_j n} + u(n). \quad (3)$$

Два предыдущих отсчета записываются аналогично:

$$\begin{aligned} x(n-1) &= A_1 e^{i \cdot 2\pi f_1 (n-1)} + \sum_{j=2}^M A_j e^{i \cdot 2\pi f_j (n-1)} + u(n-1); \\ x(n-2) &= A_1 e^{i \cdot 2\pi f_1 (n-2)} + \sum_{j=2}^M A_j e^{i \cdot 2\pi f_j (n-2)} + u(n-2). \end{aligned}$$

Используя (2), можно сформировать новую последовательность отсчетов сигнала по отношению к первой гармонической составляющей:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(n) &= x(n) - 2 \cos(2\pi f_1) x(n-1) + x(n-2) = \\ &= x(n) - 2a_{1,n-1} x(n-1) + x(n-2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $a_{1,n-1} = \cos(2\pi f_1)$ — значение, вычисленное для первой составляющей в предыдущем отсчете ($n-1$).

Подставляя (3) в (4) и используя (2), получаем

$$\begin{aligned} x^{(1)}(n) &= 2 \cos(2\pi f_j) \sum_{j=2}^M A_j e^{i2\pi f_j n} - 2 \cos(2\pi f_1) \sum_{j=2}^M A_j e^{i2\pi f_j n} + u^{(1)}(n) = \\ &= \sum_{j=2}^M \alpha_{j,1} A_j e^{i2\pi f_j n} + u^{(1)}(n), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\cos(2\pi f_1) \alpha_{k,m} = 2[\cos(2\pi f_k) - \cos(2\pi f_m)]$; $u^{(1)}(n)$ — остаточный шум.

Таким образом, полученная последовательность отсчетов представляет собой исходную последовательность без первого синусоидального сигнала. Применив аналогичные операции, можно сформировать новую последовательность с удаленной второй гармонической составляющей:

$$\begin{aligned} x^{(2)}(n) &= x^{(1)}(n) - 2 \cos(2\pi f_2) x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n-2) = \\ &= x^{(1)}(n) - 2a_{2,n-1} x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n-2) = \\ &= \sum_{j=3}^M \alpha_{j,1} \alpha_{j,2} A_j e^{i2\pi f_j n} + u^{(2)}(n), \end{aligned}$$

где $a_{2,n-1} = \cos(2\pi f_2)$.

Процесс можно повторять необходимое число раз. Полагая, что входной сигнал содержит M гармонических составляющих, к нему можно применить процедуру, удаляющую эти составляющие и формирующую сигнал, содержащий только отсчеты шума,

$$x^{(k)}(n) = \sum_{j=k+1}^M \left(\prod_{l=1}^k \alpha_{j,l} \right) A_j e^{i2\pi f_j n} + u^{(k)}(n), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Способ оценки частот. Рассматриваемый алгоритм поиска комплексных синусоид в каждой итерации использует текущий и два предыдущих отсчета входной последовательности $x(0)$, $x(1)$, ..., $x(N-1)$ для

вычисления значений $a_{k,n}$ при заранее известном числе синусоид (составляющих) M .

После того как найдены значения $a_{k,n}$, можно получить частоты синусоидальных составляющих

$$f_{k,n} = \arccos(a_{k,n})/2\pi. \quad (6)$$

Начальные условия алгоритма следующие:

$$x^{(0)}(n) = x(n); \quad x^{(k)}(0) = x(0). \quad (7)$$

Окончательная последовательность $x^{(M)}(n)$ содержит только шум, а отсчеты, получаемые на промежуточных шагах $x^{(1)}(n), x^{(2)}(n), \dots, x^{(M-1)}(n)$, содержат гармонические составляющие.

Значения $a_{k,n}$ зависят только от текущего и предыдущего отсчетов и могут быть получены методом градиентного спуска.

Для ошибки

$$e_n = e(n) = x(n) - \hat{x}(n),$$

где $\hat{x}(n) = \alpha x(n-1)$, градиент квадрата ошибки равен

$$\begin{aligned} \nabla [e(n)e^*(n)] &= -2 \left\{ e_n [x^{(k-1)}(n-1)]^* + e_n^* x^{(k-1)} \right\} = \\ &= -2 \left\{ x^{(M)}(n) [x^{(k-1)}(n-1)]^* + [x^{(M)}(n)]^* x^{(k-1)}(n-1) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где индекс $*$ означает комплексное сопряжение, а последовательность $x^{(M)}(n)$ содержит только шум.

Коэффициенты $a_{k,n}$ находят, используя предыдущее значение $a_{k,n-1}$ и градиент квадрата ошибки:

$$\begin{aligned} a_{k,n} &= a_{k,n-1} + \mu \left(-\frac{1}{2} \right) \nabla \left\{ e^{(k)}(n) [x^{(k)}(n)]^* \right\} = \\ &= a_{k,n-1} + \mu \left\{ x^{(M)}(n) [x^{(k-1)}(n-1)]^* + [x^{(M)}(n)]^* x^{(k-1)}(n-1) \right\}. \end{aligned}$$

Множитель $-\frac{1}{2}$ введен для компенсации константы -2 в выражении градиента (8); μ — значение шага, его выбор влияет на сходимость алгоритма. Если значение μ слишком большое, то результат может не сходиться, если значение мало — результат будет сходиться слишком медленно.

Таким образом, алгоритм оценки частот подразумевает решение двух систем уравнений. Первая система используется для получения значений $x^{(k)}$:

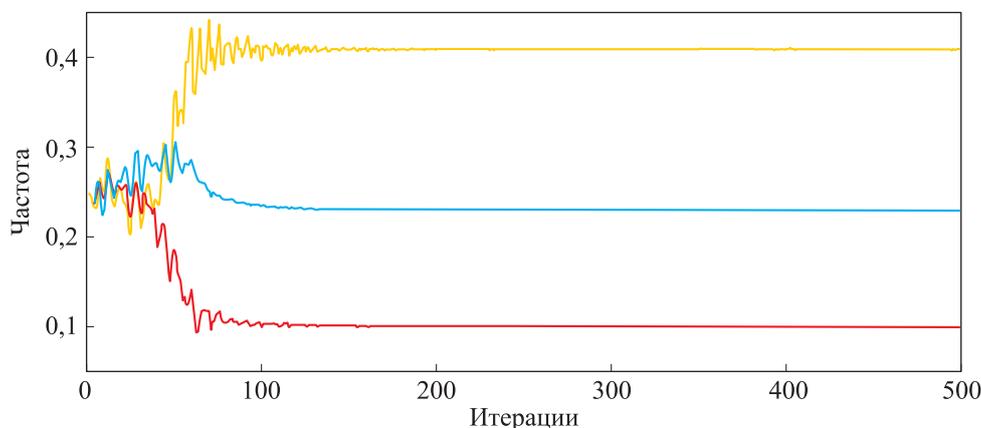


Рис. 1. Зависимости оценки частот трех гармонических составляющих от итерации при ОСШ = 30 дБ

приемлемой точности оценки частот. Результат работы алгоритма для подобного случая показан на рис. 2. Частоты трех гармонических составляющих и ОСШ соответствуют предыдущему случаю, за исключением того, что предполагаемое число составляющих $M = 2$.

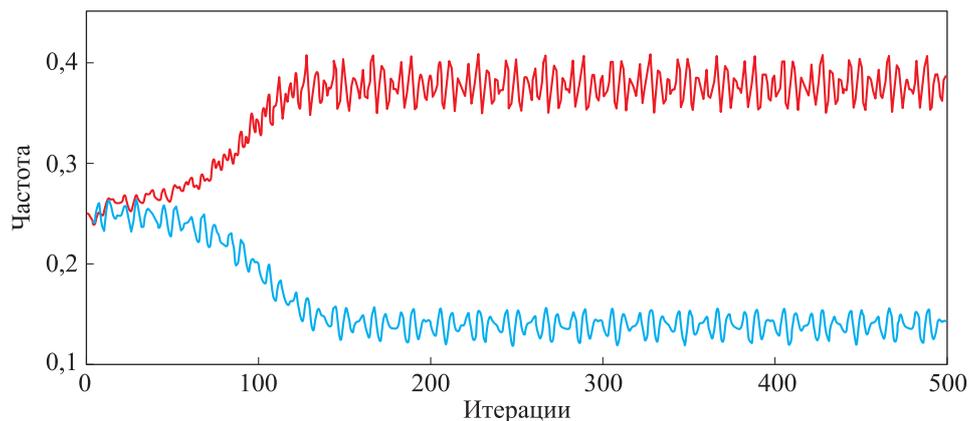


Рис. 2. Результат работы алгоритма при неправильном выборе числа гармонических составляющих

Рассматриваемый алгоритм чувствителен к ОСШ. При малом уровне ОСШ значения a_k, n могут сходиться очень медленно, либо не сходиться вообще. На рис. 3 показана работа алгоритма при ОСШ = 10 дБ.

На рис. 4 показаны зависимости СКО определения частоты и числа итераций от ОСШ. Видно, что с ростом ОСШ монотонно убывает и ошибка определения частоты. Число итераций при росте ОСШ сначала резко уменьшается, а начиная с 30 дБ, уже от него практически не зависит. При ОСШ < 10 дБ значения ошибки не сходятся.

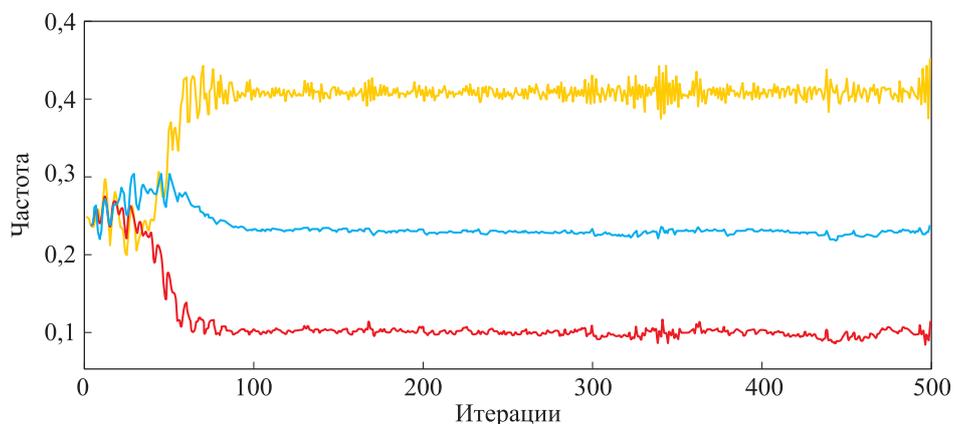


Рис. 3. Зависимости оценки частот от числа итераций при ОСШ = 10 дБ

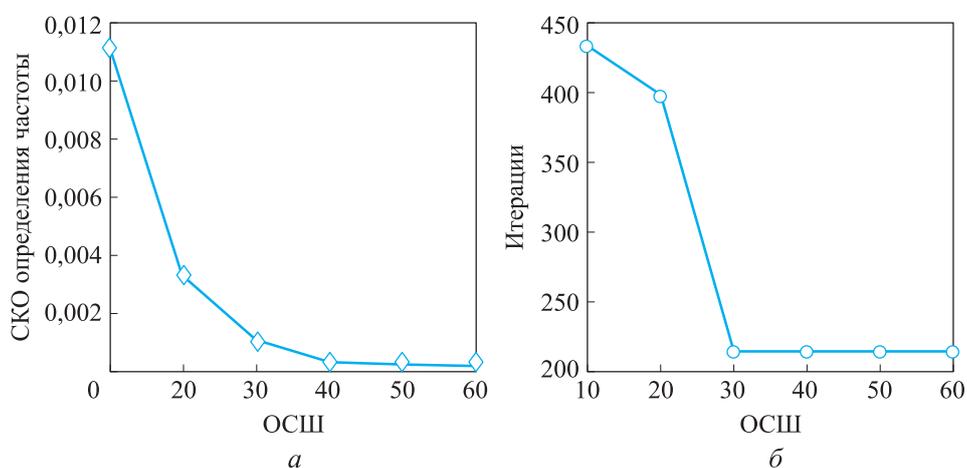


Рис. 4. Зависимости СКО определения частоты (а) и числа итераций (б) от ОСШ

Заключение. Несмотря на особенности (необходимость знать число составляющих, выбор значения шага μ , работа при ОСШ > 10 дБ), алгоритм дает относительно неплохую оценку частот, что позволяет применять его в различных сферах, связанных с обработкой цифровых сигналов. Это может быть, например, определение первых гармоник тональных составляющих в речевом сигнале или поиск пилотных поднесущих в радиоприемной аппаратуре. Относительно простая вычислительная сложность позволяет реализовать данный метод на микропроцессорных системах (сигнальных процессорах) либо в программируемой логике.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Tsui J., Cheng C.H. Digital techniques for wideband receivers. SciTech Publishing, 2015.

- [2] Alessio S.M. Digital signal processing and spectral analysis for scientists. Springer, 2016.
- [3] Blackman R.B., Tukey J.W. The measurement of power spectra. Dover, 1958.
- [4] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 1969, vol. 57, no. 8, pp. 1408–1418. DOI: 10.1109/PROC.1969.7278
- [5] Rambach K. Direction of arrival estimation using a multiple-input-multiple-output radar with applications to automobiles. Institut für Signalverarbeitung und Systemtheorie der Universität Stuttgart, 2017.
- [6] Widrow B., Stearns S.D. Adaptive signal processing. Prentice Hall, 1985.
- [7] Cowan C.F.N., Grant P.M., eds. Adaptive filters. Prentice Hall, 1985.
- [8] Cheung J.Y. A direct adaptive frequency estimation technique. *Proc. 30th MWSCAS*. New York, IEEE, 1987, pp. 804–807.

Чудников Валерий Владимирович — аспирант кафедры «Автономные информационные и управляющие системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Шахтарин Борис Ильич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Автономные информационные и управляющие системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Чудников В.В., Шахтарин Б.И. Адаптивная оценка частоты сигнала. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2019, № 6, с. 41–49.
DOI: 10.18698/0236-3933-2019-6-41-49

ADAPTIVE SIGNAL FREQUENCY ESTIMATION

V.V. Chudnikov
B.I. Shakhtarin

chudnikov@bmstu.ru
shakhtarin@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper introduces an adaptive algorithm for estimating the frequencies of harmonic components in the signal against the background of additive white noise. This method is iterative, which distinguishes it from the periodogram and parametric spectral estimation methods. The key feature of the algorithm is that it gives a reasonably accurate estimation only for the preset number of harmonic components included in the signal under study. In the original discrete signal, a frequency search was performed at

Keywords

Spectrum estimation, frequency estimation, spectrum, complex sinusoidal, frequency searching

each time sample using the gradient descent method. Frequency estimation is made when the frequency error value tends to a certain value. The search is based on the representation of the value of the current sample of the harmonic signal of a known frequency through the two previous values. Knowing the number of components included in the original signal sequence, it is possible to form the resulting sequence containing only residual noise samples. A mathematical model of the algorithm is given, its work is simulated for different conditions of application, the accuracy of the algorithm, i.e., frequency estimation, and the number of iterations for various signal-to-noise ratios are shown

Received 26.06.2019

© Author(s), 2019

REFERENCES

- [1] Tsui J., Cheng C.H. Digital techniques for wideband receivers. SciTech Publishing, 2015.
- [2] Alessio S.M. Digital signal processing and spectral analysis for scientists. Springer, 2016.
- [3] Blackman R.B., Tukey J.W. The measurement of power spectra. Dover, 1958.
- [4] Capon J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis. *Proc. IEEE*, 1969, vol. 57, no. 8, pp. 1408–1418. DOI: 10.1109/PROC.1969.7278
- [5] Rambach K. Direction of arrival estimation using a multiple-input-multiple-output radar with applications to automobiles. Institut für Signalverarbeitung und Systemtheorie der Universität Stuttgart, 2017.
- [6] Widrow B., Stearns S.D. Adaptive signal processing. Prentice Hall, 1985.
- [7] Cowan C.F.N., Grant P.M., eds. Adaptive filters. Prentice Hall, 1985.
- [8] Cheung J.Y. A direct adaptive frequency estimation technique. *Proc. 30th MWSCAS*. New York, IEEE, 1987, pp. 804–807.

Chudnikov V.V. — Post-Graduate Student, Department of Autonomous Data Processing and Control Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Shakhtarin B.I. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Autonomous Data Processing and Control Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Chudnikov V.V., Shakhtarin B.I. Adaptive signal frequency estimation. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Instrument Engineering*, 2019, no. 6, pp. 41–49 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3933-2019-6-41-49