

НЕЧЕТКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПОВ

Н.П. Деменков
В.А. Матвеев
И.А. Мочалов

dnp@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена нечеткая модель описания волнового твердотельного гироскопа. Для решения получаемых при этом нечетких дифференциальных уравнений с нечеткими начальными и граничными условиями использованы метод нечеткого преобразования Лапласа, нечеткий операторный метод и нечеткий метод Галеркина. В последнем случае при аппроксимации решения по тригонометрическому базису появляется полная нечеткая система линейных алгебраических уравнений, решаемая методом инверсного преобразования. Приведены результаты моделирования

Ключевые слова

Нечеткая модель волнового твердотельного гироскопа, нечеткое преобразование Лапласа, нечеткий операторный метод, нечеткий метод Галеркина, нечеткий инверсный метод

Поступила в редакцию 18.10.2017
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Введение. В отечественном и зарубежном приборостроении ведутся работы по созданию гироскопов, основанных на новых физических принципах. Одним из наиболее современных и перспективных из них является волновой твердотельный гироскоп (ВТГ), принцип действия которого основан на инерционных свойствах стоячих упругих волн, возбужденных во вращающихся осесимметричных оболочках различных типов [1–3]. Преимущества ВТГ — высокая точность, малая чувствительность к линейным перегрузкам, малое время готовности, определяемое электроникой, малая потребляемая энергия и другие причины.

Важное место в расчетах параметров ВТГ занимает математическое моделирование. Для этого используют различные модели — от традиционных уравнений математической физики для решения начальных и краевых задач до классических линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [4].

В реальности ВТГ всегда имеют неопределенности, которые обусловлены суммарным воздействием технологических дефектов при их изготовлении, неоднородностью плотности его материала, толщин оболочек, различных возмущений, вызванных побочными вибрациями и другими неконтролируемыми факторами.

В настоящее время в теории ВТГ имеет место расчет каждой компоненты, определяющей неопределенность и, как правило, для ее описания применяют детерминированные и вероятностные модели. Такой подход моделирования является достаточно сложным и не всегда адекватным. Например, при использовании

вероятностной модели накладываются жесткие ограничения на соответствующие плотности распределений, их моменты и т. д., которые на практике не всегда выполняются, что приводит к значительным ошибкам при расчете точностных параметров ВТГ. Детерминированные методы часто достаточно сложны.

При интеллектуализации мехатронных систем, включающих в себя ВТГ, большое значение приобретают нечеткие модели в описании неопределенности их функционирования. Это обусловлено возможностью представления наихудших и наилучших результатов функционирования систем в нечетких условиях. Такой подход более прост по сравнению с традиционными подходами и дает более адекватные оценки при расчете параметров резонаторов.

В настоящее время в теории нечетких множеств применительно к четким динамическим стационарным системам разработаны соответствующие им нечеткие аналоги: нечеткие уравнения в частных производных второго порядка [5–9], нечеткая начальная задача [10–14], нечеткая краевая задача [15–17], нечеткие системы линейных алгебраических уравнений [18–22] и др.

Некоторые из перечисленных аналогов используют для разработки простейших нечетких моделей резонаторов и исследования их динамики. Отметим, что в эту же тематику входят модели волновых процессов, которые с помощью уравнения Шредингера описывают квантовые состояния частиц в квантовой механике. В частности, к ним относится модель осциллятора [23].

Постановка задачи. Рассмотрим несколько простейших нечетких моделей волновых процессов, в которых нечеткость, обусловленная перечисленными выше факторами, моделирует неопределенность. В моделях, представленных ниже, индекс «н» обозначает нечеткость, а верхний индекс «h» характеризует обобщенную производную по Хукухара (Hukuhara).

Модель 1. Рассмотрим нечеткое уравнение движения кольцевого резонатора при отсутствии внутреннего трения и внешней нагрузки для частного случая, когда это уравнение имеет вид нечеткой начальной задачи второго порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n^h(\tau) + ka_n(\tau) &= 0_n, \quad k = 36/5; \\ a_n(\tau = 0) &= a_{0n}, \quad \dot{a}_n^h(\tau = 0) = 0_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_n(\tau)$ — нечеткая амплитуда перемещения стоячей волны в радиальном перемещении кольцевого резонатора; τ — безразмерное время. Необходимо найти нечеткое решение $a_n(\tau)$ модели (1).

Модель 2. В задаче по модели 1 учитывается внутреннее трение и внешняя нагрузка:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_n^h(\tau) + 2\alpha\dot{a}_n^h(\tau) + ka_n(\tau) &= 0_n, \quad \alpha = 0,5\xi k; \\ a_n(\tau = 0) &= a_{0n}, \quad \dot{a}_n^h(\tau = 0) = 0_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ξ — коэффициент демпфирования. Необходимо найти нечеткое решение $a_n(\tau)$ модели (2).

Модель 3. Имеем нелинейную нечеткую двухточечную краевую задачу первого порядка:

$$\begin{aligned} T\dot{x}_h(t) + u_h(x(t)) &= x_h^2(t); \\ u_h(x_1) = u_{1h}, u_h(x_2) &= u_{2h}, \end{aligned} \quad (3)$$

где T — динамический параметр; $x(t)$ — кусочно-линейная зависимость; t — время. Необходимо найти параметры колебательного процесса в тригонометрическом базисе.

Методы решения. Задачи (1), (2) решаются с помощью методов нечеткого преобразования Лапласа и операторного метода [24, 25], а задача (3) — с помощью нечеткого метода Галеркина. Последний метод не отражен в отечественной и зарубежной литературе и впервые применен к решению нечеткой нелинейной задачи типа (3).

Перечисленные выше методы базируются на определениях и теоремах теории нечетких множеств, таких, как определение нечеткого множества и его свойства, принцип расширения Заде, метрика Хаусдорфа нечетких множеств, нечеткие и четкие числа, интегрируемость по Риману и свойства интегрируемости нечетких функций, типы нечеткой дифференцируемости первого порядка по Сейккала (S. Seikkala) и по Баклею — Феарингу (J. Buckley, T. Feuring), типы решений начальных задач первого порядка и их взаимосвязи, типы нечеткой обобщенной производной первого и второго порядков по Хукухара и типы решений начальной и граничной задач второго порядка и другие понятия.

Нечеткое преобразование Лапласа [24]. Имеет место следующее определение.

Определение. Для нечеткой функции $f_h(t) = f(t, r) = (\underline{f}(t, r), \bar{f}(t, r))$, $r \in [0; 1]$, и действительного параметра p ее нечеткое преобразование Лапласа

$$\begin{aligned} \hat{F}(p) = L[f_h(t)] &= \int_0^\infty e^{-pt} f_h(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-pt} f_h(t) dt = \\ &= \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-pt} \underline{f}(t, r) dt, \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-pt} \bar{f}(t, r) dt \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где $L[.]$ — символ преобразования Лапласа. При этом полагается, что пределы существуют, а интегралы понимаются в смысле Римана.

Для выражения (4) обычно используются обозначения

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-pt} \underline{f}(t, r) dt = l[\underline{f}(t, r)], \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-pt} \bar{f}(t, r) dt = l[\bar{f}(t, r)].$$

Тогда (4) записывается в виде $L[f_h(t)] = (l[\underline{f}(t, r)], l[\bar{f}(t, r)])$, $r \in [0; 1]$. Расчеты для $L[\ddot{x}_h(t)]$ и $L[\dot{x}_h(t)]$ дают:

$$L[\ddot{x}_h(t)] = p^2 L[x_h(t)] \ominus x_h(t=t_0) - \dot{x}_h(t=t_0);$$

$$L[\dot{x}_h(t)] = p L[x_h(t)] \ominus x_h(t=t_0).$$

Здесь \ominus — разность по Хукухара, которая для двух элементов $u, v \in E$ (пространство нечетких переменных) определяет элемент $w \in E$ такой, что $u = v + w$. Производные понимаются в смысле Хукухара, но для простоты обозначений индекс «h» опущен.

Решение нечеткого уравнения модели 1. В этом уравнении используется вторая производная по Хукухара, определение которой выполняется посредством первой производной, приведенной в работе [24]. Согласно этому определению, будем иметь следующие типы нечетких задач и решений для (1): (i, i) , (i, ii) ; (ii, i) ; (ii, ii) . Здесь символ на первом месте обозначает тип первой производной по Хукухара, символ на втором месте после запятой — тип второй производной по Хукухара. Таким образом, для нечеткой начальной задачи (1) будем иметь четыре нечетких уравнения и соответственно четыре нечетких решения. В общем случае для нечеткой начальной задачи n -го порядка будем иметь 2^n нечетких уравнений и решений.

Запишем уравнение (1) в стандартной форме с учетом представления нечетких переменных в уровневой (параметрической) форме с функциями принадлежности треугольной формы:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_h(\tau) + ka_h(\tau) &= 0_h; \quad 0_h = 0(r) = (\underline{0}(r) = r-1; \overline{0}(r) = 1-r), \quad r \in [0;1]; \\ a_h(\tau=0) &= a_{0h}, \quad a_{0h} = a_0(r) = (\underline{a}_0(r) = \alpha_0 + (a_0 - \alpha_0)r; \overline{a}_0(r) = \beta_0 - (\beta_0 - a_0)r); \\ \dot{a}_h(\tau=0) &= 0_h; \quad 0_h = 0(r) = (\underline{0}(r) = r-1; \overline{0}(r) = 1-r). \end{aligned} \tag{5}$$

Далее в соответствии с дифференцируемостью по Хукухара будем иметь следующие типы нечетких уравнений и их нечеткие решения, полученные с помощью нечеткого преобразования Лапласа.

Случай 1. Если $a(\tau)$ и $\dot{a}(\tau)$ — (i) дифференцируемы, то выражение (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{a}}(\tau, r) + k\underline{a}(\tau, r) &= \underline{0}(r); \\ \ddot{\overline{a}}(\tau, r) + k\overline{a}(\tau, r) &= \overline{0}(r). \end{aligned} \tag{6}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} l[\ddot{\underline{a}}(\tau, r)] + kl[\underline{a}(\tau, r)] &= \underline{0}(r); \\ l[\ddot{\overline{a}}(\tau, r)] + kl[\overline{a}(\tau, r)] &= \overline{0}(r). \end{aligned} \tag{7}$$

Из свойств преобразования Лапласа имеем

$$\begin{aligned} l[\ddot{\underline{a}}(\tau, r)] &= p^2 l[\underline{a}(\tau, r)] - p\underline{a}_0(r) - \underline{0}(r); \\ l[\ddot{\overline{a}}(\tau, r)] &= p^2 l[\overline{a}(\tau, r)] - p\overline{a}_0(r) - \overline{0}(r). \end{aligned}$$

После постановки этих соотношений в (7) и приведения подобных членов получим

$$l[\underline{a}(\tau, r)] = \frac{2\bar{\varnothing}(r)k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}\left(p^2 + \left(\frac{1}{k^2}\right)^2\right)} + \frac{\underline{a}_0(r)p}{p^2 + \left(\frac{1}{k^2}\right)^2};$$

$$l[\bar{a}(\tau, r)] = \frac{2\bar{\varnothing}(r)k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}\left(p^2 + \left(\frac{1}{k^2}\right)^2\right)} + \frac{\bar{a}_0(r)p}{p^2 + \left(\frac{1}{k^2}\right)^2}.$$

Применив обратное l^{-1} -преобразование Лапласа, с использованием таблиц преобразования находим решение (индекс «*») для (6):

$$\underline{a}_*(t, r) = 2(r-1)k^{-\frac{1}{2}} \sin\left(k^{\frac{1}{2}}t\right) + (\alpha_0 + (a_0 - \alpha_0)r) \cos\left(k^{\frac{1}{2}}t\right);$$

$$\bar{a}_*(t, r) = 2(r-1)k^{-\frac{1}{2}} \sin\left(k^{\frac{1}{2}}t\right) + (\beta_0 - (\beta_0 - a_0)r) \cos\left(k^{\frac{1}{2}}t\right), \quad r \in [0; 1].$$
(8)

Случай 2. Если $a(\tau)$ — (i) дифференцируема, а $\dot{a}(\tau)$ — (ii) дифференцируема, то $\ddot{a}_H(\tau) = \ddot{a}(\tau, r) = (\ddot{\bar{a}}(\tau, r), \ddot{\underline{a}}(\tau, r), r \in [0; 1])$, поэтому

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{a}}(\tau, r) + k\underline{a}(\tau, r) &= \underline{0}(r); \\ \ddot{\underline{a}}(\tau, r) + k\bar{a}(\tau, r) &= \bar{0}(r). \end{aligned}$$
(9)

Преобразование Лапласа уравнений (9) имеет вид

$$\begin{aligned} l[\ddot{\bar{a}}(\tau, r)] + kl[\underline{a}(\tau, r)] &= \underline{0}(r); \\ l[\ddot{\underline{a}}(\tau, r)] + kl[\bar{a}(\tau, r)] &= \bar{0}(r). \end{aligned}$$

Вычисления компонент преобразования «l» и подстановка полученных соотношений в (9) приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} p^2 l[\bar{a}(\tau, r)] - p\bar{a}_0(r) - \bar{0}(r) + kl[\underline{a}(\tau, r)] &= \underline{0}(r); \\ p^2 l[\underline{a}(\tau, r)] - p\underline{a}_0(r) - \underline{0}(r) + kl[\bar{a}(\tau, r)] &= \bar{0}(r). \end{aligned}$$

Складывая и вычитая полученные уравнения, после преобразования найдем

$$l[x(\tau, r)] = \frac{2m_0k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}\left(p^2 + \left(\frac{1}{k^2}\right)^2\right)} + \frac{x_0p}{p^2 + \left(\frac{1}{k^2}\right)^2}, \quad x(\cdot) = \bar{a}(\cdot) + \underline{a}(\cdot);$$

$$x_0 = \bar{a}_0 + \underline{a}_0; \quad m_0 = \bar{0} + \underline{0};$$

$$l[y(\tau, r)] = \frac{0,5y_0}{p-k^2} + \frac{0,5y_0}{p+k^2}; \quad y(\cdot) = \bar{a}(\cdot) - \underline{a}(\cdot); \quad y_0 = \bar{a}_0 - \underline{a}_0.$$

После применения обратного l^{-1} -преобразования Лапласа с использованием таблиц имеем

$$x(\tau, r) = \bar{a}(\tau, r) + \underline{a}(\tau, r) = 2m_0 k^{\frac{1}{2}} \sin\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right) + x_0 \cos\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right);$$

$$y(\tau, r) = \bar{a}(\tau, r) - \underline{a}(\tau, r) = y_0 \operatorname{ch}\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right),$$

отсюда

$$\begin{aligned} \bar{a}_*(\tau, r) &= 0,5[x(\tau, r) + y(\tau, r)]; \\ \underline{a}_*(\tau, r) &= 0,5[x(\tau, r) - y(\tau, r)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Случай 3. Если $a(\tau)$ — (ii) дифференцируема, а $\dot{a}(\tau)$ — (i) дифференцируема, то

$$\begin{aligned} a_n(\tau) &= a(\tau, r) = (\bar{a}(\tau, r), \underline{a}(\tau, r)); \\ \ddot{a}_n(\tau) &= \ddot{a}(\tau, r) = (\ddot{\bar{a}}(\tau, r), \ddot{\underline{a}}(\tau, r)), \quad r \in [0; 1], \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{a}}(\tau, r) + k\bar{a}(\tau, r) &= \underline{0}(r); \\ \ddot{\underline{a}}(\tau, r) + k\underline{a}(\tau, r) &= \bar{0}(r). \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} p^2 l[\underline{a}(\tau, r)] - p\underline{a}_0(r) - \underline{0}(r) + kl[\bar{a}(\tau, r)] &= \underline{0}(r); \\ p^2 l[\bar{a}(\tau, r)] - p\bar{a}_0(r) - \bar{0}(r) + kl[\underline{a}(\tau, r)] &= \bar{0}(r), \end{aligned}$$

отсюда

$$l[x(\tau, r)] = \frac{2m_0}{p^2 + k} + \frac{x_0 p}{p^2 + k}, \quad m_0 = \bar{0} + \underline{0};$$

$$l[y(\tau, r)] = \frac{2n_0}{p^2 + k} + \frac{y_0 p}{p^2 + k}; \quad n_0 = \bar{0} - \underline{0}.$$

После применения обратного l^{-1} -преобразования Лапласа получим

$$x(\tau, r) = m_0 k^{\frac{1}{2}} \sin\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right) + x_0 \cos\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right);$$

$$y(\tau, r) = n_0 k^{\frac{1}{2}} \sin\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right) + y_0 \cos\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right),$$

таким образом, решение имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{a}_*(\tau, r) &= 0,5(x(\tau, r) + y(\tau, r)); \\ \underline{a}_*(\tau, r) &= 0,5(x(\tau, r) - y(\tau, r)).\end{aligned}\tag{11}$$

Случай 4. Если $a(\tau)$ — (ii) дифференцируема, а $\dot{a}(\tau)$ — (ii) дифференцируема, то

$$\begin{aligned}a_{\text{н}}(t) &= a(t, r) = (\bar{a}(t, r), \underline{a}(t, r)), \ddot{a}_{\text{н}}(\tau) = \ddot{a}(t, r) = \\ &= (\ddot{\bar{a}}(t, r), \ddot{\underline{a}}(t, r)), r \in [0; 1],\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{a}}_{\text{н}}^h(\tau) + k\bar{a}_{\text{н}}(\tau) &= \underline{0}_{\text{н}}; \\ \ddot{\underline{a}}_{\text{н}}^h(\tau) + k\underline{a}_{\text{н}}(\tau) &= \bar{0}_{\text{н}}.\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}p^2 l[\bar{a}(\tau, r)] - p\bar{a}_0(r) - \bar{0}(r) + kl[\bar{a}(\tau, r)] &= \underline{0}(r); \\ p^2 l[\underline{a}(\tau, r)] - p\underline{a}_0(r) - \underline{0}(r) + kl[\underline{a}(\tau, r)] &= \bar{0}(r),\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}l[\bar{a}(\tau, r)] &= \frac{\bar{0} + \underline{0}}{p^2 + k} + \frac{\bar{a}_0 p}{p^2 + k}; \\ l[\underline{a}(\tau, r)] &= \frac{\bar{0} + \underline{0}}{p^2 + k} + \frac{\underline{a}_0 p}{p^2 + k}.\end{aligned}$$

После применения обратного l^{-1} -преобразования Лапласа запишем

$$\begin{aligned}\bar{a}_*(\tau, r) &= (\bar{0} + \underline{0})k^{\frac{1}{2}} \sin\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right) + \bar{a}_0 \cos\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right); \\ \underline{a}_*(\tau, r) &= (\bar{0} + \underline{0})k^{\frac{1}{2}} \sin\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right) + \underline{a}_0 \cos\left(k^{\frac{1}{2}}\tau\right).\end{aligned}\tag{12}$$

Примечание 1. Во всех случаях при $r = 1$ имеем четкий вариант и, очевидно, для (8)–(12) должно выполняться соотношение $\underline{a}_*(t, r = 1) = \bar{a}_*(t, r = 1) = a_0 \cos\left(k^{\frac{1}{2}}t\right)$, которое совпадает с решением, приведенным в работе [1].

Решение нечеткого уравнения модели 2. Запишем уравнение (2) в стандартной форме типа (5):

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\text{н}}(\tau) + \xi k \dot{a}_{\text{н}}(\tau) + ka_{\text{н}}(\tau) &= 0_{\text{н}}; \\ a_{\text{н}}(\tau = 0) &= a_{0\text{н}}; \dot{a}_{\text{н}}(\tau = 0) = 0_{\text{н}}.\end{aligned}\tag{13}$$

Нечеткие переменные $0_{\text{н}}$ и $a_{0\text{н}}$ определены в (5). Для решения (13) используем нечеткое преобразование Лапласа. Всего, как и для модели 1, будем иметь четыре случая, связанные с типом дифференцирования по Хукухара.

Случай 1. Если $a(\tau)$ и $\dot{a}(\tau)$ — (i) дифференцируемы, то

$$\begin{aligned} \ddot{a}(\tau, r) + \xi k \dot{a}(\tau, r) + k a(\tau, r) &= \underline{0}(r); \\ \ddot{\bar{a}}(\tau, r) + \xi k \dot{\bar{a}}(\tau, r) + k \bar{a}(\tau, r) &= \bar{0}(r). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} l[\ddot{a}(\tau, r)] + \xi k l[\dot{a}(\tau, r)] + k l[a(\tau, r)] &= \underline{0}(r); \\ l[\ddot{\bar{a}}(\tau, r)] + \xi k l[\dot{\bar{a}}(\tau, r)] + k l[\bar{a}(\tau, r)] &= \bar{0}(r). \end{aligned} \tag{14}$$

Из свойств преобразования Лапласа имеем

$$\begin{aligned} l[\ddot{a}(\tau, r)] &= p^2 l[a(\tau, r)] - p a_0(r) - \underline{0}(r); \quad l[\dot{a}(\tau, r)] = p l[a(\tau, r)] - a_0(r); \\ l[\ddot{\bar{a}}(\tau, r)] &= p^2 l[\bar{a}(\tau, r)] - p \bar{a}_0(r) - \bar{0}(r); \quad l[\dot{\bar{a}}(\tau, r)] = p l[\bar{a}(\tau, r)] - \bar{a}_0(r). \end{aligned}$$

После постановки этих соотношений в (14) и преобразования полученных выражений получим

$$\begin{aligned} l[a(\tau, r)] &= \frac{2 \cdot \underline{0}(r)}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} + \frac{a_0(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}; \\ l[\bar{a}(\tau, r)] &= \frac{2 \cdot \bar{0}(r)}{(p + \alpha)^2 + \omega^2} + \frac{\bar{a}_0(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

где $\alpha = 0,5\xi k$; $\omega = (k - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$.

После применения обратного l^{-1} -преобразования Лапласа находим

$$\begin{aligned} \underline{a}_*(\tau, r) &= 2 \cdot \underline{0}(r) \omega^{-1} e^{-\alpha\tau} \sin(\omega\tau) + \underline{a}_0 e^{-\alpha\tau} \cos(\omega\tau); \\ \bar{a}_*(\tau, r) &= 2 \cdot \bar{0}(r) \omega^{-1} e^{-\alpha\tau} \sin(\omega\tau) + \bar{a}_0 e^{-\alpha\tau} \cos(\omega\tau), \end{aligned} \tag{15}$$

где $0_n = 0(r) = (\underline{0}(r) = r - 1; \bar{0}(r) = 1 - r)$;

$$a_{0n} = a_0(r) = (\underline{a}_0(r) = \alpha_0 + (a_0 - \alpha_0)r; \bar{a}_0(r) = \beta_0 - (\beta_0 - a_0)r); \quad r \in [0; 1].$$

Случаи 2–4 для модели 2 реализуются по методике, аналогичной методике, используемой в случаях 2–4 для модели 1.

Примечание 2. При $r = 1$ из (15) имеем соотношение $\underline{a}_*(\tau, r = 1) = \bar{a}_*(\tau, r = 1) = a_0 e^{-\alpha\tau} \cos(\omega\tau)$, которое совпадает с четким решением, приведенным в работе [1].

Операторный метод [25]. Метод основан на известном факте эквивалентного представления линейных дифференциальных и интегральных уравнений в операторной форме. Например, в простейшем случае имеем

$$\begin{aligned} \dot{y}(x) &= y(x); \\ y(x = 0) &= y_0 \in R_1; \quad \Leftrightarrow (1 - J)y(x) = y_0, \end{aligned}$$

где $Jy(\cdot) = \int_0^x y(s) ds$ — оператор.

Для уравнений второго порядка типа (5), которые возникли при моделировании волновых процессов, запишем

$$\begin{aligned} \ddot{y}(x) + ky(x) = \sigma, \quad \sigma = 0 \\ y(0) = y_0; \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \end{aligned} \Leftrightarrow (1 + kJ^2) y(x) = y_0 + \dot{y}_0 x + 0,5\sigma x^2. \quad (16)$$

Здесь $J^2 y(\cdot) = \int_0^x \int_0^z y(s) ds dz$ — оператор.

Для случая 1, когда $a(\tau)$ и $\dot{a}(\tau)$ — (i) дифференцируемы, будем иметь систему нечетких дифференциальных уравнений, которая в соответствии с (16) может быть представлена в эквивалентной операторной форме

$$\begin{aligned} \underline{\ddot{a}}(\tau, r) + k\underline{a}(\tau, r) &= \underline{0}(r); \\ \overline{\ddot{a}}(\tau, r) + k\overline{a}(\tau, r) &= \overline{0}(r); \\ a(\tau = 0, r) = a_0(r) &= (\underline{a}_0(r) = \alpha_0 + (a_0 - \alpha_0)r; \overline{a}_0(r) = \beta_0 + (\beta_0 - a_0)r); \\ \dot{a}(\tau = 0, r) = \dot{a}_0(r) &= 0(r) = (\underline{0}(r) = r - 1; \overline{0}(r) = 1 - r); \quad r \in [0; 1]; \\ (1 + kJ^2) \underline{a}(\tau, r) &= \underline{a}_0(\tau = 0, r) + \dot{\underline{a}}_0(r)x + 0,5 \cdot \underline{0}(r)x^2; \\ \Leftrightarrow (1 + kJ^2) \overline{a}(\tau, r) &= \overline{a}_0(\tau = 0, r) + \dot{\overline{a}}_0(r)x + 0,5 \cdot \overline{0}(r)x^2; \\ J^2 \underline{a}(\tau, r) &= \int_0^\tau \int_0^z \underline{a}(t, r) dt dz; \quad J^2 \overline{a}(\tau, r) = \int_0^\tau \int_0^z \overline{a}(t, r) dt dz. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее возьмем обратный оператор $(1 + kJ^2)^{-1}$ от обеих частей (17), в результате получим

$$\begin{aligned} \underline{a}(\tau, r) &= (1 + kJ^2)^{-1} (\underline{a}_0(\cdot)\tau^0 + \underline{0}(r)\tau^1 + 0,5 \cdot \underline{0}(\cdot)\tau^2); \\ \overline{a}(\tau, r) &= (1 + kJ^2)^{-1} (\overline{a}_0(\cdot)\tau^0 + \overline{0}(r)\tau^1 + 0,5 \cdot \overline{0}(\cdot)\tau^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Находим $(1 + kJ^2)^{-1}$ путем деления уголком (столбиком) двух многочленов $J^0 = 1$ и $1 + kJ^2$, тогда запишем

$$(1 + kJ^2)^{-1} = \frac{1}{(1 + kJ^2)} = S = 1 - kJ^2 + k^2 J^4 - k^3 J^6 + k^4 J^8 - \dots \quad (19)$$

После подстановки полученного выражения в (18) имеем

$$\begin{aligned} \underline{a}(\tau, r) &= S [\underline{a}_0(r)\tau^0 + \dot{\underline{a}}_0(r)\tau^1 + 0,5 \cdot \underline{0}(r)\tau^2]; \\ \overline{a}(\tau, r) &= S [\overline{a}_0(r)\tau^0 + \dot{\overline{a}}_0(r)\tau^1 + 0,5 \cdot \overline{0}(r)\tau^2]. \end{aligned} \quad (20)$$

Вычисляем каждую компоненту $S(\underline{a}_0(r)\tau^0)$, $S(\underline{0}(r)\tau)$, $S(0,5 \cdot \underline{0}(r)\tau^2)$ в (20), для чего находим вспомогательные величины:

$$J^2 \tau^0 = \int_0^\tau \left[\int_0^z s^0 ds \right] dz = \int_0^\tau z dz = 0,5\tau^2 = (2!)^{-1} \tau^2;$$

$$J^4 \tau^0 = \int_0^\tau \left[\int_0^z 0,5 \tau^2 ds \right] dz = 0,5 \int_0^\tau (3!)^{-1} z^3 dz = (4!)^{-1} \tau^4;$$

$$J^6 \tau^0 = (6!)^{-1} \tau^6;$$

$$J^8 \tau^0 = (8!)^{-1} \tau^8.$$

Поставляя эти соотношения в (19), получаем

$$\begin{aligned} S(\underline{a}_0 \tau^0) &= (1 - kJ^2 + k^2 J^4 - k^3 J^6 + k^4 J^8 - \dots) \underline{a}_0 \tau^0 = \\ &= \left(1 - k(2!)^{-1} \tau^2 + k^2(4!)^{-1} \tau^4 - k^3(6!)^{-1} \tau^6 + k^4(8!)^{-1} \tau^8 - \dots \right) \underline{a}_0, \end{aligned}$$

где $\underline{a}_0 = \alpha_0 + (a_0 - \alpha_0)r$, $r \in [0; 1]$.

Аналогичные вычисления позволяют найти

$$\begin{aligned} S(\underline{0}(r) \tau) &= (1 - kJ^2 + k^2 J^4 - k^3 J^6 + k^4 J^8 - \dots) \underline{0}(r) \tau = \\ &= \left(\tau - k(3!)^{-1} \tau^3 + k^2(5!)^{-1} \tau^5 - k^3(7!)^{-1} \tau^7 + k^4(9!)^{-1} \tau^9 - \dots \right) \underline{0}(r); \end{aligned}$$

$$(\underline{0}(r) = r - 1); r \in [0; 1];$$

$$\begin{aligned} S(0,5 \cdot \underline{0}(r) \tau^2) &= (1 - kJ^2 + k^2 J^4 - k^3 J^6 + k^4 J^8 - \dots) 0,5 \cdot \underline{0}(r) \tau^2 = \\ &= \left((2!)^{-1} \tau^2 - k(4!)^{-1} \tau^4 + k^2(6!)^{-1} \tau^6 - k^3(8!)^{-1} \tau^8 + k^4(10!)^{-1} \tau^{10} - \dots \right) \underline{0}(r); \end{aligned}$$

$$(\underline{0}(r) = r - 1); r \in [0; 1];$$

В результате определим

$$\begin{aligned} \underline{a}_*(\tau, r) &= [(\alpha_0 - 2) - (\underline{a}_0 - (\alpha_0 - 2))r] \times \\ &\times \left[1 - k(2!)^{-1} \tau^2 + k^2(4!)^{-1} \tau^4 - k^3(6!)^{-1} \tau^6 + k^4(8!)^{-1} \tau^8 - \dots \right]. \end{aligned}$$

После аналогичных вычислений для верхней функции запишем

$$\begin{aligned} \bar{a}_*(\tau, r) &= [(\beta_0 + 2) + (\bar{a}_0 - (\beta_0 + 2))r] \times \\ &\times \left[1 - k(2!)^{-1} \tau^2 + k^2(4!)^{-1} \tau^4 - k^3(6!)^{-1} \tau^6 + k^4(8!)^{-1} \tau^8 - \dots \right]. \end{aligned}$$

При $r = 1$ имеет место соотношение $\bar{a}_*(\tau, r = 1) = \underline{a}_*(\tau, r = 1) = a_0 \cos \left(k^{\frac{1}{2}} \tau \right)$,

которое совпадает с четким решением, приведенным в работе [4].

Нечеткий метод Галеркина. Рассмотрим нечеткое нелинейное дифференциальное уравнение любого порядка, систему нечетких дифференциальных уравнений или нечеткие уравнения в частных производных

$$Du_n = f_n, \quad Vu_n = 0_n, \quad (21)$$

где D — дифференциальный оператор; u_n — неизвестная нечеткая функция; f_n — известная нечеткая функция правой части операторного уравнения (20); V — оператор граничных условий.

Нечеткая приближенная функция $u_n(\cdot)$ находится в виде разложения $u_n(x) = \sum_{k=0}^n C_{kn} \varphi_k(x)$, где $C_{kn}, k = \overline{1, n}$ — нечеткие коэффициенты, подлежащие определению; $\{\varphi_k(\cdot)\}_{k=0}^n$ — четкая линейно-независимая полная координатная система функций, удовлетворяющая однородным граничным условиям $V\varphi_k(\cdot) = 0$, поэтому и $u_n(\cdot)$ также удовлетворяет условию $Vu_n(\cdot) = 0_n$.

Нечеткие коэффициенты находим из условия ортогональности Du_n и $\varphi_k(\cdot)$:

$$(Du_n, \varphi_k) = \int_{x=x_0}^{x=x_1} \left[D \left(\sum_{k=0}^n C_{kn} \varphi_k(x) \right) \right] \varphi_i(x) dx, \quad i = \overline{1, n},$$

где (\cdot, \cdot) — символ скалярного произведения. Это приводит к полной нечеткой системе линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ) относительно $C_{kn}, k = \overline{1, n}$:

$$\sum_{k=0}^n C_{kn} (Du_n, \varphi_m) = (f_n, \varphi_m), \quad m = \overline{0, n}, \quad (22)$$

или в матричной форме

$$A_n C_n = B_n. \quad (23)$$

Здесь $C_n = (C_{0n}, C_{1n}, \dots, C_{nn})^T$ — нечеткий вектор, подлежащий определению; $B_n = (B_{0n}, B_{1n}, \dots, B_{nn})^T$ — нечеткий вектор правой части в (23); $B_m = (f_n, \varphi_m), m = \overline{1, n}$; $A_n = (a_{kmn})$ — матрица с нечеткими элементами $a_{kmn} = (Du_n, \varphi_m), k, m = \overline{0, n}$.

В практических задачах кроме критерия (21) часто используют следующие критерии: нечеткий квадратичный $Du_n - f_n^2$; модульный $|Du_n - f_n|$ и др.

В теории НСЛАУ принято рассматривать следующие системы. Если матрица A_n в (23) содержит элементы с функцией принадлежности синглетон (*singleton*), а вектор B_n — нечеткие компоненты с треугольными функциями принадлежности, тогда (23) принято называть НСЛАУ. В этом случае решение системы имеет тип «сильное/слабое». Если элементы матрицы A_n и вектор B_n в (23) содержат нечеткие компоненты, то (23) называют полной (*fully*) НСЛАУ [19, 21].

Полную систему будем решать методом обратной матрицы. Для этого пусть нечеткие компоненты в (23) имеют треугольные функции принадлежности и

являются положительными нечеткими числами. Такие числа обычно изображаются в виде тройки чисел (для простоты обозначений индексы номеров элементов в (23) опущены):

$$a_n = (a_1 / a_2 / a_3), b_n = (b_1 / b_2 / b_3), c = (c_1 / c_2 / c_3),$$

$a_i, b_i, c_i, i = 1, 3$ — концевые точки; a_2, b_2, c_2 — ядра нечетких чисел.

В этих обозначениях (23) будет иметь вид

$$A_n C_n = B_n \Leftrightarrow (A_1 / A_2 / A_3)(C_1 / C_2 / C_3) = (B_1 / B_2 / B_3),$$

отсюда

$$\begin{cases} A_1 C_1 = B_1; \\ A_1 C_2 + A_2 C_1 = B_2; \\ A_1 C_3 + A_3 C_1 = B_3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1^* = A_1^{-1} B_1; \\ C_2^* = A_1^{-1} (B_2 - A_2 C_1); \\ C_3^* = A_1^{-1} (B_3 - A_3 C_1), \end{cases}$$

где $C_i^*, i = \overline{1,3}$ — решение полной НСЛАУ (23). В результате нечеткое решение уравнения (21) имеет вид $u_n^*(x) = (C_n^*, \varphi)$, C_n^*, φ — векторы.

Для иллюстрации нечеткого метода Галеркина рассмотрим простейший пример расчета параметров колебательного процесса для нечеткой нелинейной двухточечной граничной задачи первого порядка, которая возникает в системе автоматической оптимизации [26]:

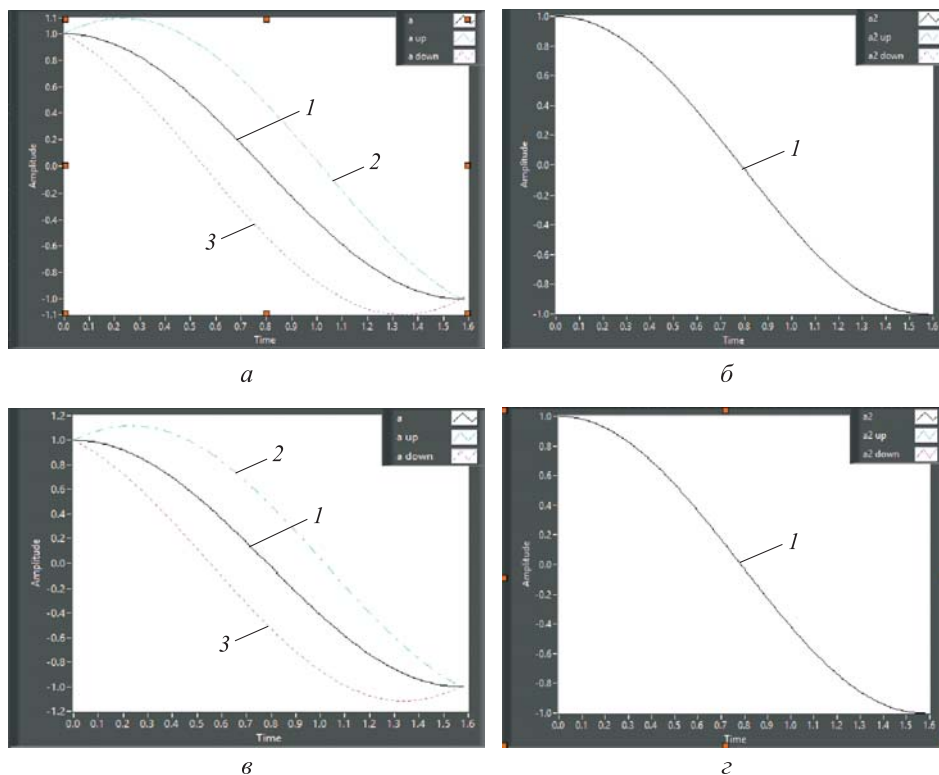
$$\begin{cases} Du_n = f_n; \\ Bu_n = 0_n; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\dot{u}_n(x(t)) + u_n(x(t)) = x_n^2(t); \\ u_n(x_1) = u_{1n}, u_n(x_2) = u_{2n}; \\ -0,5\tilde{T} \leq x \leq 0,5\tilde{T} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_n(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x \Rightarrow A_n C_n = B_n, \dim A_n = (2 \times 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_*(r) = (C_{1*}(r), C_{2*}(r))^m \Rightarrow u_n(x, r) = C_{1*}(r) \sin \omega x + C_{2*}(r) \cos \omega x.$$

В случае когда оператор D задает нечеткое уравнение в частных производных с соответствующими краевыми условиями, тогда по нечеткому методу Галеркина для гармонического базиса он модифицируется в нечеткую систему дифференциальных уравнений. В частности, для кольцевой модели резонатора это приводит к системе из двух уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. В результате при модификации этой системы появляются восемь нечетких дифференциальных уравнений, входящих в нечеткую систему. Увеличение размерности нечетких уравнений по сравнению с размерностью четкого аналога является одной из причин сложности решения нечетких уравнений.

Моделирование нечетких систем. Цель моделирования заключается в сравнении различных случаев нечетких решений, которые были получены для модели 1 уравнением (1) с помощью нечеткого преобразования Лапласа. Эти решения для случаев 1–4 представлены на рисунке.



Зависимости $a(\tau, r)$ для различных случаев дифференцируемости по Хукухара при $a = 1$;

$$r = 0,5; \alpha_0 = 1; \beta_0 = 1:$$

$a - a(\tau), \dot{a}(\tau) - (i)$ дифференцируемы; $б - a(\tau) - (i), \dot{a}(\tau) - (ii)$ дифференцируемы; $в - a(\tau) - (ii), \dot{a}(\tau) - (i)$ дифференцируемы; $г - a(\tau), \dot{a}(\tau) - (ii)$ дифференцируемы; 1 — $a(\tau)$; 2 — $\bar{a}(\tau)$; 3 — $\underline{a}(\tau)$

Выводы. Методом нечеткого преобразования Лапласа решено нечеткое уравнение движения кольцевого резонатора при отсутствии внутреннего трения и внешней нагрузки (модель 1), а также при их наличии (модель 2).

Рассмотрен операторный метод решения нечеткого уравнения модели 1. Оно получается в виде рядов, которые при их суммировании и задании одиночной функции принадлежности совпадают с соответствующим четким решением.

Применение нечеткого метода Галеркина продемонстрировано на примере получения периодического решения для нечеткой нелинейной задачи первого порядка. Возникающая при этом полная система нечетких алгебраических уравнений по определению коэффициентов нечеткого разложения решения по тригонометрическому базису решена инверсным методом.

Некоторые из предложенных нечетких моделей представлены в графических формах. Они отражают результаты моделирования нечетких волновых процессов модели 1.

Заключение. Предложенные методы решения нечеткой начальной задачи второго порядка для кольцевого резонатора также могут быть использованы для оболочечной и дисковой моделей резонаторов.

Весьма актуальна задача реализации нечеткого метода Галеркина при разложении искомого решения по тригонометрическому базису с нестационарными нечеткими коэффициентами.

В связи с тем, что модели волновых процессов в виде уравнений в частных производных занимают значительное место в теории волновых твердотельных гироскопов представляет теоретический и практический интерес разработка и моделирование соответствующих нечетких аналогов.

Цифровая обработка сигналов при реализации навигационного алгоритма на базе ВТГ осуществляется при значительном уровне различного рода помех. В связи с этим актуальной задачей является разработка нечетких модификаций фильтров типа нечеткого метода наименьших квадратов, нечеткого фильтра Калмана, нечетких сглаживающих фильтров и других, а также исследование их эффективности по сравнению с эффективностью их четких аналогов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А. Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. М.: Физматлит, 2008. 240 с.
2. Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника, 2014. 174 с.
3. Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов / М.А. Басараб, Б.С. Лунин, В.А. Матвеев и др. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 4. С. 80–96.
4. Басараб М.А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А. Методы моделирования и цифровой обработки сигналов в гироскопии. М.: Физматлит, 2008. 248 с.
5. Allahviranloo T., Kermani M.A. Numerical methods for fuzzy linear partial differential equations under new definition for derivative // Iran Journal of Fuzzy Systems. 2010. Vol. 7. No. 3. P. 33–50.
6. Corveleyn S. The numerical solution of elliptic partial differential equations with fuzzy coefficients. PhD thesis. University of Leuven, 2014. 184 p.
7. Pownuk A. Numerical solutions of fuzzy partial differential equations and its applications in computational mechanic // M. Nikraves, L.A. Zadh, V. Korotkikh, eds. Fuzzy partial equations and relational equations. Springer, 2004. P. 308–347.
8. Arara A., Benchohra M., Nthouyas S.R., Ouahab A. Fuzzy solutions for hyperbolic partial differential equations // International Journal of Applied Mathematical Sciences. 1998. Vol. 2. No. 2. P. 241–248.
9. Buckley J.J., Feuring T. Introduction of fuzzy partial and differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 1999. Vol. 105. Iss. 2. P. 241–248. DOI: 10.1016/S0165-0114(98)00323-6
10. Vorobiev D., Seikkala T. Towards the theory of fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 2002. Vol. 125. Iss. 2. P. 231–237. DOI: 10.1016/S0165-0114(00)00131-7
11. Buckley J.J., Feuring T. Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 2000. Vol. 110. Iss. 1. P. 43–54. DOI: 10.1016/S0165-0114(98)00141-9
12. Kaleva O. The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 1990. Vol. 35. Iss. 3. P. 389–396. DOI: 10.1016/0165-0114(90)90010-4

13. Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я. Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. 1 // Информационные технологии. 2015. Т. 21. № 3. С. 171–178.
14. Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я. Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Ч. 2 // Информационные технологии. 2015. Т. 21. № 4. С. 243–250.
15. Khalilpour K., Allahviranloo T. An initial — value method for two-point fuzzy boundary value problems // World Applied Science Journal. 2001. Vol. 13. No. 10. P. 2142–2155.
16. Ormand A., Gouyandeh Z. Solving two-point fuzzy boundary value problems using variational iteration method // CACSA. 2013. Vol. 2013. P. 1–13. DOI: 10.5899/2013/cacsa-00006
17. Liu H.K. Comparison result of two-point fuzzy boundary value problems // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2011. Vol. 51. P. 697–703.
18. Мочалов И.А., Хрисат М.С. Оценивание параметров модели по нечетким случайным данным // Информационные технологии. 2014. № 2. С. 14–22.
19. Friedman M., Ming M., Kandel A. Fuzzy linear systems // Fuzzy Sets and Systems. 1998. Vol. 96. Iss. 2. P. 201–209. DOI: 10.1016/S0165-0114(96)00270-9
20. Dehghan M., Hashemi B. Iterative solution of fuzzy linear systems // Applied Mathematics and Computation. 2006. Vol. 175. Iss. 1. P. 645–674. DOI: 10.1016/j.amc.2005.07.033
21. Allahviranloo T., Salahshour S., Homayoun-nejad M., Baleanu D. General solutions of fuzzy linear systems // Abstract and Applied Analysis. 2013. Vol. 2013. Art. 593274. DOI: 10.1155/2013/593274 URL: <https://www.hindawi.com/journals/aaa/2013/593274>
22. Murnganandam S., Razak A.K. Matrix inversion method for solving fully fuzzy linear systems with triangular fuzzy numbers // International Journal of Computer Application. 2013. Vol. 65. No. 4. P. 9–11.
23. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 368 с.
24. El Jaoui E., Melliani S., Chadli S. Solving second order fuzzy differential equations by the fuzzy Laplace transform method // Advances in Difference Equations. 2015. Vol. 66. DOI: 10.1186/s13662-015-0414-x
25. Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadehet A. A new method for solving linear differential equations // Computing. 2011. Vol. 92. Iss. 2. P. 181–197. DOI: 10.1007/s00607-010-0136-6
26. Деменков Н.П., Мочалов И.А. Динамика нечеткой системы автоматической оптимизации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 1. С. 59–74. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-59-74

Деменков Николай Петрович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Матвеев Валерий Александрович (1939–2017) — д-р техн. наук, профессор, работал в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Мочалов Иван Александрович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана» (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Деменков Н.П., Матвеев В.А., Мочалов И.А. Нечеткие методы моделирования волновых твердотельных гироскопов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2018. № 3. С. 33–50. DOI: 10.18698/0236-3933-2018-3-33-50

FUZZY METHODS OF HEMISPHERICAL RESONATOR GYROSCOPE SIMULATION

N.P. Demenkov

dnp@bmstu.ru

V.A. Matveev

I.A. Mochalov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The study deals with a fuzzy simulation describing a hemispherical resonator gyroscope. We used the following methods to solve resulting fuzzy differential equations with fuzzy initial and boundary conditions: fuzzy Laplace transform, fuzzy operator and fuzzy Galerkin. In the last case, when we use a trigonometric basis to approximate the solution, there appears a fully fuzzy system of linear algebraic equations that may be solved through the fuzzy inverse method. We present our simulation results

Keywords

Fuzzy model of a wave solid-state gyroscope, fuzzy transformation of Laplace, fuzzy operator method, fuzzy method of Galerkin, fuzzy inverse method

Received 18.10.2017

© BMSTU, 2018

REFERENCES

- [1] Matveev V.A., Lunin B.S., Basarab M.A. Navigatsionnye sistemy na volnovykh tverdotel'nykh giroskopakh [Navigation systems based on hemispherical resonator gyro]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 240 p.
- [2] Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A. Volnovoy tverdotel'nyy giroskop. Teoriya i tekhnologiya [Hemispherical resonator gyro. Theory and technology]. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2014. 174 p.
- [3] Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., et al. Miniature gyroscope based on elastic waves in solids for small spacecraft. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2014, no. 4, pp. 80–96 (in Russ.).
- [4] Basarab M.A., Kravchenko V.F., Matveev V.A. Metody modelirovaniya i tsifrovoy obrabotki signalov v girokopii [Modelling and digital processing methods of signals in gyroscopy]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 248 p.
- [5] Allahviranloo T., Kermani M.A. Numerical methods for fuzzy linear partial differential equations under new definition for derivative. *Iran Journal of Fuzzy Systems*, 2010, vol. 7, no. 3, pp. 33–50.
- [6] Corveleyn S. The numerical solution of elliptic partial differential equations with fuzzy coefficients. PhD thesis. University of Leuven, 2014. 184 p.
- [7] Pownuk A. Numerical solutions of fuzzy partial differential equations and its applications in computational mechanic. M. Nikraves, L.A. Zadh, V. Korotkikh, eds. In: *Fuzzy partial equations and relational equations*. Springer, 2004, pp. 308–347.

- [8] Arara A., Benchohra M., Nthouyas S.R., Ouahab A. Fuzzy solutions for hyperbolic partial differential equations. *International Journal of Applied Mathematical Sciences*, 1998, vol. 2, no. 2, pp. 241–248.
- [9] Buckley J.J., Feuring T. Introduction of fuzzy partial and differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 1999, vol. 105, iss. 2, pp. 241–248. DOI: 10.1016/S0165-0114(98)00323-6
- [10] Vorobiev D., Seikkala T. Forwards the theory of fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, vol. 125, iss. 2, pp. 231–237. DOI: 10.1016/S0165-0114(00)00131-7
- [11] Buckley J.J., Feuring T. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, vol. 110, iss. 1, pp. 43–54. DOI: 10.1016/S0165-0114(98)00141-9
- [12] Kaleva O. The Cauchy problem for fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, vol. 35, iss. 3, pp. 389–396. DOI: 10.1016/0165-0114(90)90010-4
- [13] Mochalov I.A., Khrisat M.S., Shikhab Eddin M.Ya. Fuzzy differential equations in control. Part I. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2015, vol. 21, no. 3, pp. 171–178 (in Russ.).
- [14] Mochalov I.A., Khrisat M.S., Shikhab Eddin M.Ya. Fuzzy differential equations in control. Part II. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2015, vol. 21, no. 4, pp. 243–250 (in Russ.).
- [15] Khalilpour K., Allahviranloo T. An initial — value method for two-point fuzzy boundary value problems. *Word Applied Science Journal*, 2001, vol. 13, no. 10, pp. 2142–2155.
- [16] Ormand A., Gouyandeh Z. Solving two-point fuzzy boundary value problems using variational iteration method. *CACSA*, 2013, vol. 2013, pp. 1–13. DOI: 10.5899/2013/cacsa-00006
- [17] Liu H.K. Comparison result of two-point fuzzy boundary value problems. *Word Academy of Science, Engineering and Technology*, 2011, vol. 51, pp. 697–703.
- [18] Mochalov I.A., Khrisat M.S. Estimation parameter model using fuzzy random data. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2014, no. 2, pp. 14–22 (in Russ.).
- [19] Friedman M., Ming M., Kandel A. Fuzzy linear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, vol. 96, iss. 2, pp. 201–209. DOI: 10.1016/S0165-0114(96)00270-9
- [20] Dehghan M., Hashemi B. Iterative solution of fuzzy linear systems. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, vol. 175, iss. 1, pp. 645–674. DOI: 10.1016/j.amc.2005.07.033
- [21] Allahviranloo T., Salahshour S., Homayoun-nejad M., Baleanu B. General solutions of fuzzy linear systems. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, vol. 2013, art. 593274. DOI: 10.1155/2013/593274 Available at: <https://www.hindawi.com/journals/aaa/2013/593274>
- [22] Murnganandam S., Razak A.K. Matrix inversion method for solving fully fuzzy linear systems with triangular fuzzy numbers. *International Journal of Computer Application*, 2013, vol. 65, no. 4, pp. 9–11.
- [23] Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006. 368 p.
- [24] El Jaoui E., Melliani S., Chadli S. Solving second order fuzzy differential equations by the fuzzy Laplace transform method. *Advances in Difference Equations*, 2015, vol. 66. DOI: 10.1186/s13662-015-0414-x
- [25] Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadehet A. A new method for solving linear differential equations. *Computing*, 2011, vol. 92, iss. 2, pp. 181–197. DOI: 10.1007/s00607-010-0136-6

[26] Demenkov N.P., Mochalov I.A. Fuzzy system dynamics of automatic optimization. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 1, pp. 59–74 (in Russ.).

DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-59-74

Demenkov N.P. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Matveev V.A. (1939–2017) — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Bauman Moscow State Technical University.

Mochalov I.A. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Demenkov N.P., Matveev V.A., Mochalov I.A. Fuzzy Methods of Hemispherical Resonator Gyroscope Simulation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2018, no. 3, pp. 33–50 (in Russ.).

DOI: 10.18698/0236-3933-2018-3-33-50



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышла в свет монография (2-е издание) под редакцией

А.С. Бугаева, С.И. Ивашова

«Биорадиолокация»

Освещены вопросы радиолокации биологических объектов (биорадиолокации) — метода, который может быть использован для обнаружения живых людей, находящихся за преградами, и дистанционного определения параметров их дыхания и сердцебиения. Биорадиолокация может найти применение в различных областях: спасательных операциях; антитеррористической борьбе; медицине и др. Описаны физические основы процесса биорадиолокации, особенности биорадиолокаторов с непрерывным и импульсным зондирующими сигналами, а также методы расчета и моделирования процессов в биорадиолокации. Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
+7 (499) 263-60-45
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru