

## МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЗВЕНА ВТОРОГО ПОРЯДКА С КЛАССИЧЕСКИМ СУХИМ (КУЛОНОВСКИМ) ТРЕНИЕМ ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

О.Б. Белоногов

post@rsce.ru

ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королёва»,  
Королёв, Московская обл., Российская Федерация

---

### Аннотация

Приведены полученные с помощью вычислительных экспериментов действительные логарифмические амплитудно-фазовые частотные характеристики первой гармоники звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для различных вариаций безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического воздействия. Изложен предлагаемый инженерный метод частотной идентификации параметров звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для анализа и синтеза нелинейных динамических и объектов и систем управления, выполнена его апробация. Приведены полученные зависимости фазового запаздывания первой гармоники звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением от вариации безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала для нескольких выбранных делений логарифмической шкалы, лежащих влево и вправо по оси частоты, от значения частоты, при котором фазовая частотная характеристика пересекает значение  $-90^\circ$ , а также зависимости смещения вправо по оси частоты собственной частоты звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением относительно частоты, при которой фазовая частотная характеристика первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$ , от вариации безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала

### Ключевые слова

*Частотные характеристики, нелинейные динамические объекты, системы управления, частотная идентификация*

Поступила в редакцию 08.09.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

---

**Введение.** Наличие сухого (кулоновского) трения в системе управления (СУ) существенно влияет на ее статику и динамику, поэтому в электрогидромеханических СУ оно является тем фактором, который необходимо учитывать в расчетах как статических, так и динамических характеристик.

Наиболее распространенным элементом такого рода в СУ является звено второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением, которое входит в математические модели таких объектов, как электромеханические преобразователи гидравлических и газовых приводов, а также инерционные объекты

управления типа силовых гидроцилиндров, камер сгорания ракетных двигателей и т. д.

Если частотная идентификация параметров линейного колебательного элемента с вязким трением хорошо проработана и не вызывает затруднений [1, 2], то частотная идентификация параметров звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для создания математических моделей нелинейных динамических объектов и СУ вызывает затруднения вследствие особенностей его влияния на частотные характеристики.

В связи с этим в настоящей работе ставится задача разработки инженерного метода частотной идентификации параметров звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для анализа и синтеза нелинейных динамических объектов и СУ по экспериментальным частотным характеристикам.

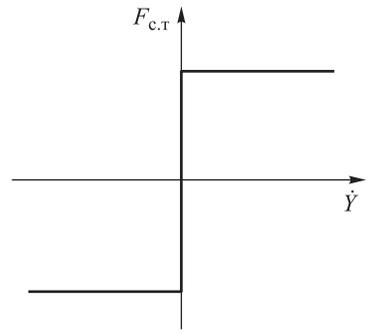
**Результаты вычислительных экспериментов.** Разработке и исследованию моногармонических и полигармонических методов расчета амплитудно-фазовых частотных характеристик (АФЧХ) и их логарифмических разновидностей (ЛАФЧХ) нелинейных динамических объектов посвящены работы [3–6], где в качестве тестовой математической модели было выбрано звено второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением, как имеющее существенную нелинейность в виде разрыва первого рода, графическая интерпретация которого представлена на рис. 1.

Математическая модель звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для условий покоя и движения представляет собой систему следующих нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= V; \\ \frac{dV}{dt} &= F_R m^{-1}, \end{aligned}$$

где  $Y$  — изменение выходного параметра звена второго порядка;  $V$  — скорость изменения выходного параметра звена второго порядка;  $m$  — безразмерная масса звена второго порядка;  $F_R$  — безразмерная движущая сила звена второго порядка, для режимов покоя и движения определяемая как

$$F_R = \begin{cases} F - F_{c.t} \operatorname{sign}(V) - K_{\pi} Y & \text{при } V \neq 0; \\ F - F_{c.t} \operatorname{sign}(F - K_{\pi} Y) - K_{\pi} Y & \text{при } V = 0 \text{ и } |F - K_{\pi} Y| > F_{c.t}; \\ 0 & \text{при } V = 0 \text{ и } |F - K_{\pi} Y| \leq F_{c.t}. \end{cases}$$



**Рис. 1.** Графическая интерпретация классического сухого (кулоновского) трения

Здесь  $K_{\Pi}$  — коэффициент позиционной нагрузки;  $F_{c.т}$  — безразмерная сила сухого трения;  $F$  — вынуждающая сила,  $F = A_F \sin(2\pi ft)$ , где  $A_F$  — амплитуда входного моногармонического сигнала;  $f$  — частота входного моногармонического сигнала;  $t$  — текущее время.

Структура математической модели звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для режима движения представлена на рис. 2.

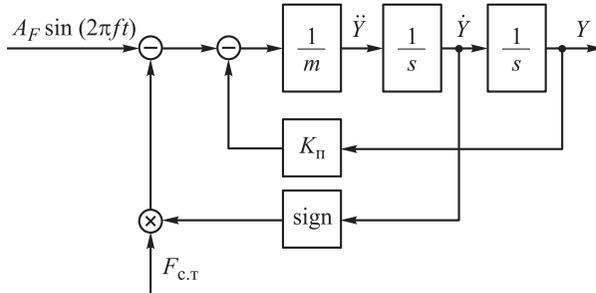


Рис. 2. Структура математической модели звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для режима движения

При разработке моногармонических и полигармонических методов расчета ЛАФЧХ (логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАФЧХ) и фазовой частотной характеристики (ФЧХ)) нелинейных динамических объектов [3–6] проведены вычислительные эксперименты, одной из целей которых было определение действительных ЛАФЧХ звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для различных вариаций безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала  $\bar{F}_{c.т} = F_{c.т}/A_F$ .

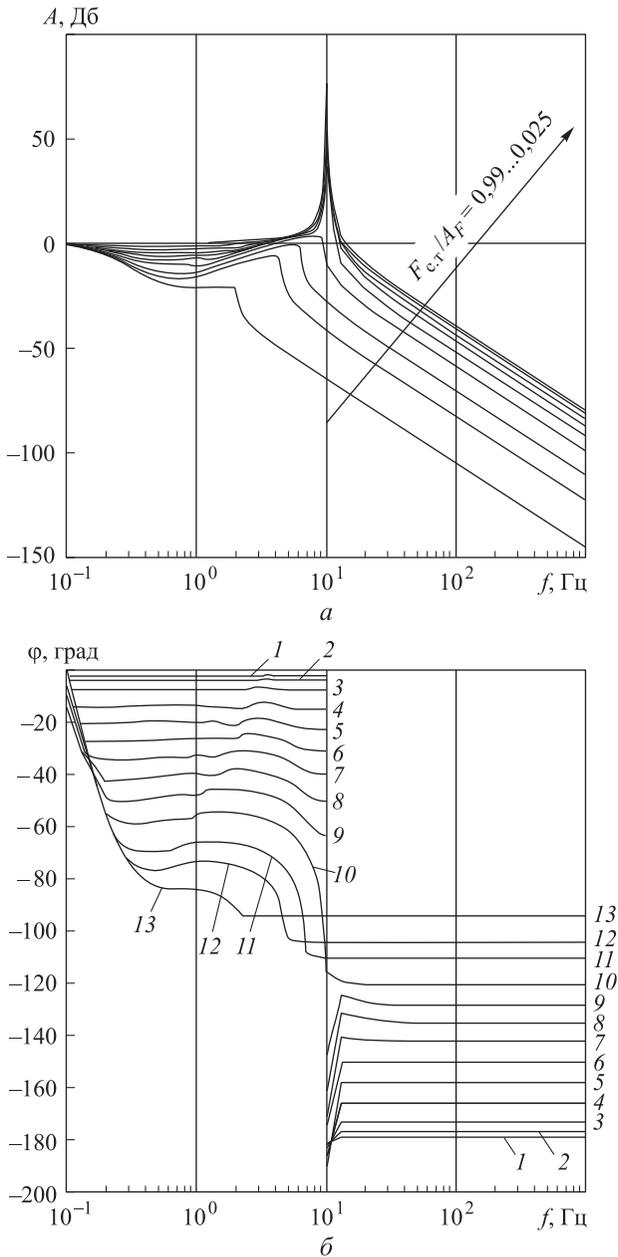
В вычислительных экспериментах использованы следующие параметры математической модели звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением:  $m = 2,533 \cdot 10^{-4}$ ;  $K_{\Pi} = 1,0$ ;  $A_F = 0,01$ . Указанные безразмерные параметры обеспечивают резонансную частоту звена приблизительно 10 Гц.

Логарифмические амплитудно-фазовые частотные характеристики звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением были рассчитаны для ряда фиксированных частот  $f$ , Гц: 0,1; 0,13; 0,2; 0,23; 0,3; 0,33; 0,4; 0,43; 0,5; 0,53; 0,6; 0,63; 0,7; 0,73; 0,8; 0,83; 0,9; 0,93; 1,0; 1,3; 1,4; 1,5; 2,0; 2,3; 3,0; 3,3; 4,0; 4,3; 5,0; 5,3; 6,0; 6,3; 7,0; 7,3; 8,0; 8,3; 9,0; 9,3; 10; 13; 20; 23; 30; 33; 40; 43; 50; 53; 60; 63; 70; 73; 80; 83; 90; 93; 100; 130; 200; 230; 300; 330; 400; 430; 500; 530; 600; 630; 700; 730; 800; 830; 900; 930; 1000.

Значения безразмерной силы сухого трения  $F_{c.т}$  в вычислительных экспериментах: 0,00025; 0,005; 0,001; 0,002; 0,003; 0,004; 0,005; 0,006; 0,007; 0,008; 0,009; 0,0095; 0,0099.

Результаты вычислительных экспериментов по определению ЛАФЧХ и ФЧХ первой гармоники выходного периодического сигнала звена второго порядка с

классическим сухим (кулоновским) трением с погрешностью вычислений  $\epsilon = 0,01$  для значений вариации силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала  $\bar{F}_{c.t} = F_{c.t}/A_F$  представлены на рис. 3.



**Рис. 3.** Логарифмическая амплитудно-частотная (а) и фазовая частотная (б) характеристики первой гармоники выходного периодического сигнала звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением:

- 1 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,025$ ; 2 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,05$ ; 3 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,1$ ; 4 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,2$ ; 5 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,3$ ; 6 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,4$ ; 7 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,5$ ;  
 8 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,6$ ; 9 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,7$ ; 10 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,8$ ; 11 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,9$ ; 12 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,95$ ; 13 —  $\bar{F}_{c.t} = 0,99$

Дополнительно были проведены вычислительные эксперименты при значениях  $K_{\Pi} = 2,0$ ,  $K_{\Pi} = 0,5$  и  $m = 2,533 \cdot 10^{-2}$ . В результате анализа ЛАФЧХ первой гармоники звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением было установлено следующее:

1) величина и положение резонансного пика амплитудно-частотной характеристики первой гармоники звена на оси частот существенно зависят от значения вариации силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического воздействия  $\bar{F}_{c,т}$  и при его увеличении смещаются в область низких частот относительно собственной частоты звена;

2) частота, при которой фазовая частотная характеристика первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$ , также существенно зависят от значения вариации силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического воздействия  $\bar{F}_{c,т}$  и при его увеличении также смещается в область низких частот относительно собственной частоты звена;

3) при увеличении значения вариации безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного гармонического воздействия  $\bar{F}_{c,т}$  ФЧХ первой гармоники звена стремится к вырождению в прямую линию, параллельную оси частот со значением  $-90^\circ$ .

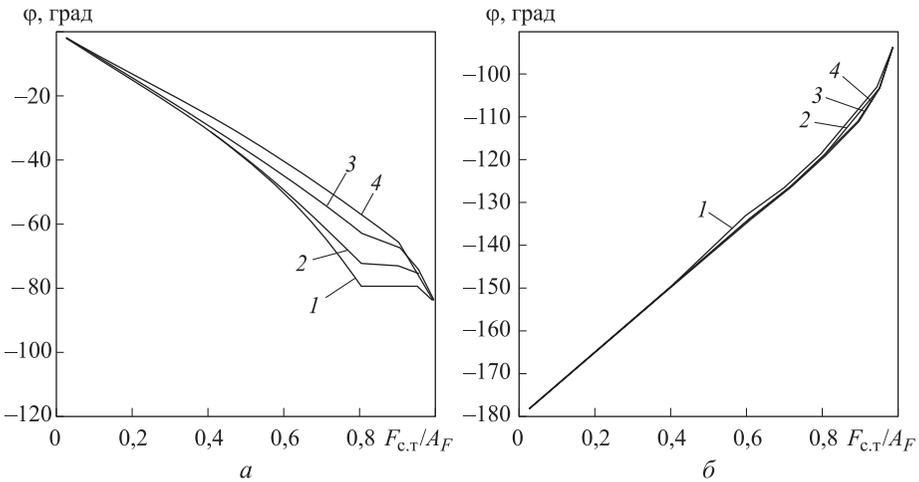
Собственная частота звена, как и для линейного колебательного элемента, определяется по выражению

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{m/K_{\Pi}}}.$$

**Метод идентификации параметров звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением.** Анализ зависимостей полученных результатов вычислительных экспериментов показал, что метод идентификации параметров звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением удобнее проводить по ЛАФЧХ этого объекта, как наиболее информативных. Поскольку резонансный пик логарифмической частотной характеристики может отсутствовать или быть не ярко выражен, а также может не приходиться точно на деление логарифмической шкалы оси частоты, за отправную точку для идентификации принята частота, при которой ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$ .

Для удобства проведения идентификации по ЛАФЧХ рассматриваемого звена в качестве единицы измерения частоты принято одно деление логарифмической шкалы (д.л.ш.).

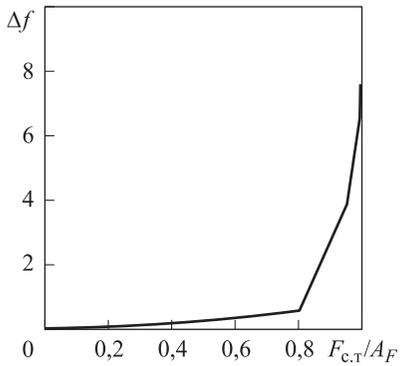
Зависимость фазового запаздывания первой гармоники рассматриваемого звена от вариации безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического воздействия  $\bar{F}_{c,т}$  для нескольких выбранных значений делений логарифмической шкалы, лежащих влево по оси частоты, от значения частоты, при котором ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$  (выбранными значениями для идентификации являются  $\pm 1$  д.л.ш.,  $\pm 2$  д.л.ш.,  $\pm 4$  д.л.ш. и  $\pm 6$  д.л.ш.), приведена на рис. 4, а.



**Рис. 4.** Зависимость фазового запаздывания первой гармоники звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением от амплитуды  $\bar{F}_{c,т}$  для нескольких выбранных значений делений логарифмической шкалы, лежащих влево (а) и вправо (б) по оси частоты, от значения частоты, при котором ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$ :

1 — 1 д.л.ш.; 2 — 2 д.л.ш.; 3 — 4 д.л.ш.; 4 — 6 д.л.ш

Зависимость фазового запаздывания первой гармоники рассматриваемого звена от вариации безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала  $\bar{F}_{c,т}$  для нескольких выбранных значений делений логарифмической шкалы, лежащих вправо по оси частоты, от значения частоты, при котором ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$ , представлена на рис. 4, б.



**Рис. 5.** Зависимость смещения  $\Delta f$  вправо по оси частоты собственной частоты звена относительно частоты, при которой ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$ , от вариации силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала  $\bar{F}_{c,т}$  приведена на рис. 5.

Согласно зависимостям, приведенным на рис. 4, зависимость фазового запаздывания частотной характеристики первой гармоники звена для нескольких выбранных значений делений логарифмической шкалы, лежащих вправо по оси частоты, от частоты, при которой ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$  (см. рис. 4, б), имеет меньшее расхождение, чем зависимости фазового запазды-

вания частотной характеристики первой гармоники звена для нескольких выбранных значений делений логарифмической шкалы, лежащих влево по оси частоты, от частоты, при которой ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$  (см. рис. 4, а), поэтому идентификация, проводимая по зависимостям, приведенным на рис. 4, б, более точна и удобна. Однако она не всегда возможна, поэтому в определенных случаях приходится использовать зависимость, приведенную на рис. 4, а.

Метод идентификации параметров звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением при известных значениях амплитуды входного воздействия  $A_F$  и коэффициента позиционной нагрузки  $K_n$  (как правило, определяется из статических характеристик) заключается в следующей последовательности действий:

1) определение по ФЧХ звена частоты  $f_{-90}$ , при которой ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$ ;

2) определение по ФЧХ звена значений фазового запаздывания на частотах, соответствующих смещениям на числе делений логарифмической шкалы (см. рис. 4, а), расположенных влево по оси частоты, от частоты  $f_{-90}$  и значений фазового запаздывания на частотах, соответствующих смещениям на числе делений логарифмической шкалы (см. рис. 4, а), находящихся вправо по оси частоты, от частоты  $f_{-90}$ ;

3) определение вариаций безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала  $\bar{F}_{c.t.i}$  (см. рис. 4), соответствующих фазовым запаздываниям, полученным по (2);

4) расчет среднего арифметического значения  $\bar{F}_{c.t.}$  по выражению

$$\bar{F}_{c.t.} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{F}_{c.t.i}}{n} \quad (1)$$

и проведение анализа с выбором окончательного значения  $\bar{F}_{c.t.}$ ;

5) вычисление безразмерной силы сухого трения по формуле

$$F_{c.t.} = \bar{F}_{c.t.} A_F; \quad (2)$$

6) определение смещения  $\Delta f$  собственной частоты (см. рис. 5) звена относительно частоты  $f_{-90}$ ;

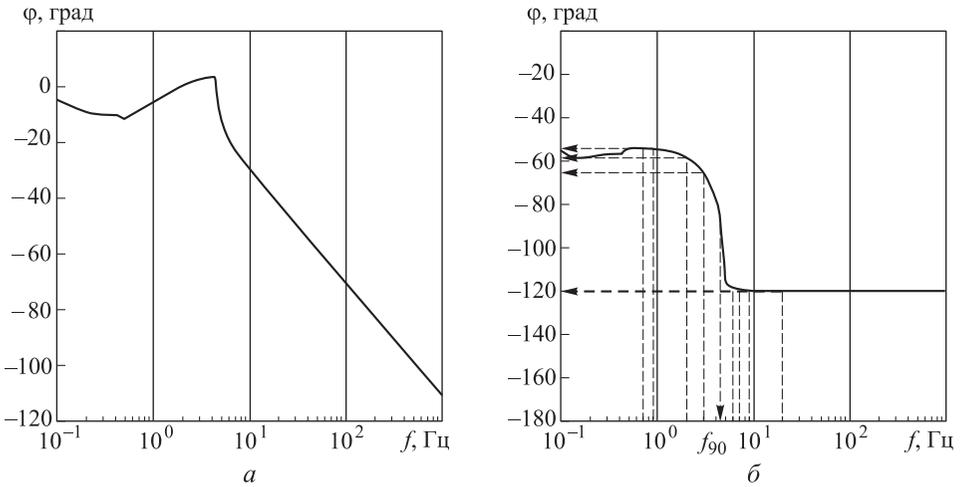
7) нахождение собственной частоты звена как

$$f = f_{-90} + \Delta f; \quad (3)$$

8) определение безразмерной массы звена по выражению

$$m = \frac{K_n}{4\pi^2 f^2}. \quad (4)$$

**Апробация разработанного метода идентификации.** Тестовые ЛАЧХ и ФЧХ звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением, построенные при значениях параметров  $m = 1,0132 \cdot 10^{-3}$ ,  $F_{c.t.} = 0,8$ ,  $K_n = 1,0$ ,  $A_F = 0,01$ , представлены на рис. 6.



**Рис. 6.** Тестовые ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) первой гармоники выходного периодического сигнала звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением

Значение  $K_{\Pi}$  определяется из статических характеристик, поэтому в рассматриваемом случае полагаем его известным. Значение  $A_F$  также является известным при определении ЛАФЧХ.

Используя цифровые данные расчета или ФЧХ, с помощью линейной интерполяции определяем частоту, при которой ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$ , т. е.  $f_{90} = 4,47$  Гц. Далее находим частоты, соответствующие ближайшим к значению  $f_{90}$  значениям выбранных делений логарифмической шкалы. Определяем значения фазового запаздывания на частотах в соответствии с выбранными значениями смещений влево ( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ) и вправо ( $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ ) по оси частоты от частоты  $f_{90}$ :  $\varphi_1 = -65,2232^\circ$ ;  $\varphi_2 = -58,3704^\circ$ ;  $\varphi_3 = -54,3135^\circ$ ;  $\varphi_4 = -54,0877^\circ$ ;  $\varphi_5 = -118,1480^\circ$ ;  $\varphi_6 = -118,9350^\circ$ ;  $\varphi_7 = -119,5225^\circ$ ;  $\varphi_8 = -120,0389^\circ$ . Этот процесс проиллюстрирован на рис. 6, б.

По зависимостям, приведенным на рис. 4, определяем значения вариаций безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала:  $\bar{F}_{c.T1} = 0,777$ ;  $\bar{F}_{c.T2} = 0,74$ ;  $\bar{F}_{c.T3} = 0,71$ ;  $\bar{F}_{c.T4} = 0,77$ ;  $\bar{F}_{c.T5} = 0,82$ ;  $\bar{F}_{c.T6} = 0,815$ ;  $\bar{F}_{c.T7} = 0,815$ ;  $\bar{F}_{c.T8} = 0,8$ .

Вычисляем среднее арифметическое значение  $\bar{F}_{c.T}$  по выражению (1):

$$\bar{F}_{c.T} = \frac{0,777 + 0,74 + 0,71 + 0,77 + 0,82 + 0,815 + 0,815 + 0,8}{8} = 0,780873.$$

Учитывая, что среднее значение  $\bar{F}_{c.T}$  не является наиболее точным и его следует использовать только при ограниченном частотном диапазоне исходных данных, для дальнейшей идентификации выбираем значение  $\bar{F}_{c.T} = \bar{F}_{c.T8} = 0,8$  как наиболее точное (см. рис. 3, б, рис. 4, б и рис. 6, б).

Рассчитываем безразмерную силу сухого трения по выражению (2):  $F_{c.T} = \bar{F}_{c.T} A_F = 0,8 \cdot 1 = 0,8$ . По зависимости, представленной на рис. 5, определяем смещение собственной частоты звена относительно частоты  $f_{90}$   $\Delta f = 0,53$  Гц.

Находим собственную частоту звена по выражению (3)  $f = 4,47 + 0,53 = 5$  Гц и безразмерную массу звена по выражению (4)

$$m = \frac{1}{4 \cdot 3,141593 \cdot 3,141593 \cdot 5 \cdot 5} = 1,0132 \cdot 10^{-3}.$$

Полученные значения  $m$  и  $\bar{F}_{с.т}$  полностью соответствуют исходным значениям.

**Заключение.** Предложен разработанный инженерный метод частотной идентификации параметров звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением по экспериментальным или расчетным ЛАФЧХ и проведения его апробация.

Получены действительные ЛАФЧХ первой гармоники звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для различных вариаций безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала.

Анализ результатов вычислительных экспериментов показал, что частотные характеристики первой гармоники звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением существенно зависят от вариации безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала, что при его увеличении выражается в смещении резонансного пика амплитудно-частотной характеристики и точки пересечения ФЧХ значения  $-90^\circ$  в область низких частот, а также к смещению ФЧХ от значения  $0^\circ$  к значению  $-90^\circ$  до точки пересечения ФЧХ значения  $-90^\circ$  и от значения  $-180^\circ$  к значению  $-90^\circ$  за точкой пересечения ФЧХ значения  $-90^\circ$ .

Получены зависимости фазового запаздывания первой гармоники звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением от вариации безразмерной силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала для нескольких выбранных делений логарифмической шкалы, лежащих влево и вправо по оси частоты, от значения частоты, при котором ФЧХ пересекает значение  $-90^\circ$ .

Получена зависимость смещения вправо по оси частоты собственной частоты звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением относительно частоты, при которой ФЧХ первой гармоники звена пересекает значение  $-90^\circ$ , от вариации силы сухого трения и амплитуды входного моногармонического сигнала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилов А.А., Солодовников А.И. Экспериментальное определение частотных характеристик автоматических систем. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1963. 252 с.
2. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. М.: Машиностроение, 1976. 424 с.
3. Белоногов О.Б. Моногармонический метод автоинтегрирования с локальным осреднением коэффициентов Фурье для расчета частотных характеристик динамических объектов и систем управления // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2013. № 4 (20). С. 53–56.

4. Белоногов О.Б. Моногармонический метод автоинтегрирования с полным осреднением коэффициентов Фурье для расчета частотных характеристик динамических объектов и систем управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2013. № 4. С. 3–13.

5. Белоногов О.Б., Попов Д.Н. Разработка и исследование полигармонического метода автоинтегрирования для расчета амплитудно-фазовых частотных характеристик динамических объектов и систем управления // Космическая техника и технологии. 2014. № 3 (6). С. 50–56.

6. Белоногов О.Б. Исследование полигармонического метода расчета частотных характеристик нелинейных динамических объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 79–87. DOI: 10.1134/S1064230714060045

**Белоногов Олег Борисович** — канд. техн. наук, начальник сектора ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4а).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Белоногов О.Б. Метод идентификации параметров звена второго порядка с классическим сухим (кулоновским) трением для анализа и синтеза нелинейных динамических объектов и систем управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 3. С. 118–128. DOI: 10.18698/0236-3933-2017-3-118-128

**METHOD FOR IDENTIFICATION OF SECOND-ORDER LINK PARAMETERS WITH CLASSICAL DRY (COULOMB) FRICTION FOR ANALYSIS AND SYNTHESIS OF NONLINEAR DYNAMIC OBJECTS AND CONTROL SYSTEMS**

**O.V. Belonogov**

post@rsce.ru

**S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Korolev, Moscow Region, Russian Federation**

---

**Abstract**

By computational experiments we obtained the real logarithmic amplitude-phase frequency characteristics of the first harmonic of the second-order link with classical dry (Coulomb) friction for the different variations of the dimensionless force of dry friction and the amplitude of the input monoharmonic effect. The study focuses on the proposed engineering method for frequency identification of second-order link parameters with classical dry (Coulomb) friction for the analysis and synthesis of nonlinear dynamic objects and control systems, and its approbation is performed as well. The study shows the obtained dependences of the phase delay of the first harmonic of the second-order link with classical dry (Coulomb) friction on the variation of the dimensionless force of dry friction and the amplitude of the input monoharmonic signal for several selected logarithmic scale divisions lying to the left and right along the frequency axis from the frequency at which the phase frequency response crosses the value  $-90^\circ$ . The work also gives the dependence of the shift to the right along the frequency

**Keywords**

*Frequency response characteristics, nonlinear dynamic objects, control systems, frequency identification*

axis of the natural frequency of the second-order link with classical dry (Coulomb) friction relative to the frequency at which the phase frequency characteristic of the first harmonic of the link crosses the value  $-90^\circ$ , on the variation of the dimensionless force of dry friction and amplitude of the input monoharmonic signal

## REFERENCES

- [1] Vavilov A.A., Solodovnikov A.I. Eksperimental'noe opredelenie chastotnykh kharakteristik avtomaticheskikh system [Experimental determination of automatic system frequency response]. Moscow–Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1963. 252 p.
- [2] Popov D.N. Dinamika i regulirovanie gidro- i pnevmosistem [Dynamics and regulation of hydraulic and pneumo-systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976. 424 p.
- [3] Belonogov O.B. Monoharmonical autointegrating method with local Fourier coefficients smoothing for computing frequency response characteristics of dynamic objects and rocket control systems. *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkina*, 2013, no. 4 (20), pp. 53–56 (in Russ.).
- [4] Belonogov O.B. Monoharmonic method of autointegration with full averaging of Fourier coefficients for calculation of frequency response of dynamic objects and control systems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2013, no. 4, pp. 3–13 (in Russ.).
- [5] Belonogov O.B., Popov D.N. Development and study of a polyharmonic autointegration method for calculating amplitude-phase-frequency characteristics of dynamic objects and control systems. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologii* [Space Engineering and Technology], 2014, no. 3 (6), pp. 50–56 (in Russ.).
- [6] Belonogov O.B. Investigation of the polyharmonic method for calculating frequency responses of nonlinear dynamic plants. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, no. 1, pp. 77–85. DOI: 10.1134/S1064230714060045  
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1134/S1064230714060045>

**Belonogov O.B.** — Cand. Sc. (Eng.), Head of the Sector, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (Lenina ul. 4a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation).

### Please cite this article in English as:

Belonogov O.B. Method for Identification of Second-Order Link Parameters with Classical Dry (Coulomb) Friction for Analysis and Synthesis of Nonlinear Dynamic Objects and Control Systems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2017, no. 3, pp. 118–128.  
DOI: 10.18698/0236-3933-2017-3-118-128