УДК 681.51 DOI: 10.18698/0236-3933-2017-3-20-32

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ МАТРИЧНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

Н.Е. Зубов[1, 2] nezubov@bmstu.ru
Nikolay.Zubov@rsce.ru

Е.А. Микрин[1, 2]
В.Н. Рябченко[1, 2]

[1] **ПАО «Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королёва», Королёв, Московская обл., Российская Федерация**
[2] **МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**

Аннотация

Рассмотрен детерминированный подход к параметрической идентификации линейной дискретной системы на основе матричных делителей нуля. Определены условия разрешимости поставленной задачи идентификации, приведена формулировка критерия идентифицируемости и построена формула решения (алгоритм идентификации). На числовых примерах продемонстрированы возможности подхода

Ключевые слова

Параметрическая идентификация, линейная дискретная система, матричные делители нуля

Поступила в редакцию 14.03.2016

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00046)

Введение и постановка задачи. При разработке сложных систем управления на различных этапах используют разнообразные методы, среди которых можно отметить аналитические расчеты и исследования, моделирование и натурный эксперимент. Часто возникает следующая задача: по данным натурного эксперимента сделать вывод о функционировании системы в соответствии с ее математической моделью, т. е. идентифицировать модель с реально существующей (функционирующей) системой. В наиболее широкой постановке проблемы идентификации, которая в научном плане активно развивается как у нас в стране, так и за рубежом [1–4], предполагается наличие случайных факторов, при которых точные измерения невозможны. В простой постановке *идентификацией* (*параметрической идентификацией*) линейной динамической системы, заданной в пространстве состояний, называется определение элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в уравнении динамики

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

по детерминированным данным измерений компонент вектора состояний $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Здесь $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — вектор входных величин (сигналов) системы; x_0 — начальные условия; $\mathbb{R}$ — вещественная ось.

Практически такая же простая постановка задачи предполагает использование вычислительной техники, работающей с дискретными величинами. В связи с этим вместо дифференциального уравнения (1) используют эквивалентное рекурсивное соотношение

$$x_{k+1} = \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k, \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{2}$$

или систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathbf{A}\, x_0 + \mathbf{B}u_0; \\ x_2 &= \mathbf{A}\, x_1 + \mathbf{B}u_1; \\ &\vdots \\ x_N &= \mathbf{A}\, x_{N-1} + \mathbf{B}u_{N-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где N — число шагов измерений.

Каждое уравнение системы (3) равносильно n скалярным равенствам. Таким образом, для определения $n^2 + nr$ коэффициентов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеется $N \times n$ уравнений.

Если в (2) принять $u_k = 0,$ то, записывая систему (3) в виде равенства строк с векторными компонентами или с учетом очевидных подстановок равенства

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{N-1} & x_N \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_0 & Ax_0 & \ldots & A^{N-2}x_0 & A^{N-1}x_0 \end{pmatrix},$$

можно убедиться в том, что для идентифицируемости системы (точнее, определения матрицы $\mathbf{A}$) при $N = n$ достаточно, чтобы матрицы [5]

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

или

$$\begin{pmatrix} x_0 & Ax_0 & \ldots & A^{n-2}x_0 & A^{n-1}x_0 \end{pmatrix}$$

были невырожденными, т. е.

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

или

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & Ax_0 & \ldots & A^{n-2}x_0 & A^{n-1}x_0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Однако этот частный случай редко встречается в практических задачах, и более общая ситуация приводит к необходимости решения уравнений вида

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{N-1} & x_N \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1} \end{pmatrix} + \\ &+ \mathbf{B}\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{N-2} & u_{N-1} \end{pmatrix}, \quad N \neq n. \end{aligned} \tag{6}$$

В настоящей работе рассмотрена идентификация линейной дискретной системы (2) как задача определения условий совместности или *условий разреши-*

мости, формулировки *критерия идентифицируемости* и построения формулы решения или *алгоритма идентификации* алгебраического уравнения (6). Неизвестными здесь полагаются матрицы **A** и **B**. В основу приводимых далее результатов положен *метод матричных делителей нуля* [6, 7].

Методическая основа работы. Рассмотрим матричное уравнение вида

$$\mathbf{XZ}+\mathbf{YQ}=\mathbf{C}, \tag{7}$$

где $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$ — заданные в общем случае комплексные матрицы; $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ — искомые матрицы. Условно уравнение (7) можно называть *правосторонним* уравнением.

Рассмотрим процедуру получения решения (7) на основе метода канонизации [6].

Метод канонизации оперирует понятиями так называемых матричных канонизаторов и делителей нуля. Напомним, что *делителями* (*левым* $\mathbf{A}_L^{\perp}$ и *правым* $\mathbf{A}_R^{\perp}$) *нуля* максимального ранга и *канонизаторами* (*левым* $\mathbf{A}^L$ и *правым* $\mathbf{A}^R$) некоторой матрицы $\mathbf{A}$ размерами $m\times n$ и рангом r называются матрицы, удовлетворяющие блочному матричному равенству

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}^L\\ \mathbf{A}_L^{\perp}\end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix}\mathbf{A}^R & \mathbf{A}_R^{\perp}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & 0_{r\times(n-r)}\\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{I}_r$ — единичная матрица рангом r.

Сводным канонизатором (*полуобратной матрицей*) называют матрицу, получаемую из левого и правого канонизаторов по формуле $\mathbf{A}^- = \mathbf{A}^R\mathbf{A}^L$ и удовлетворяющую условиям регулярности фон Неймана $\mathbf{AAA}=\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^-\mathbf{AA}^- = \mathbf{A}^-$.

Формулы решения левосторонних и правосторонних линейных матричных уравнений методом канонизации приведены в таблице, где $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\eta}$ — матрицы, имеющие подходящие размеры и произвольные элементы.

Формулы решения левосторонних и правосторонних линейных матричных уравнений методом канонизации

Формула	Условие разрешимости	Формульное представление
	Левостороннее уравнение	
$\mathbf{AX}=\mathbf{C}$	$\mathbf{A}_L^{\perp}\mathbf{C}=0$	$\mathbf{X}=\mathbf{A}^-\mathbf{C}+\mathbf{A}_R^{\perp}\boldsymbol{\mu}$
	Правостороннее уравнение	
$\mathbf{XB}=\mathbf{C}$	$\mathbf{CB}_R^{\perp}=0$	$\mathbf{X}=\mathbf{CB}^-+\boldsymbol{\eta}\mathbf{B}_L^{\perp}$

Отметим, что изучаемое уравнение (6) с точностью до обозначений имеет вид правостороннего уравнения (7). Перепишем (7) в эквивалентном виде

$$\mathbf{XZ}=\mathbf{C}-\mathbf{YQ} \tag{9}$$

и рассмотрим его как уравнение относительно неизвестной матрицы $\mathbf{X}$. В соответствии с формулами, приведенными в таблице, уравнение (9) разрешимо, если выполняется условие

$$(\mathbf{C}-\mathbf{YQ})\mathbf{Z}_R^{\perp}=0. \tag{10}$$

Условие (10) можно рассматривать как ограничение на выбор неизвестной матрицы $\mathbf{Y}$. Действительно, запишем (10) в виде правостороннего уравнения, но теперь уже относительно матрицы $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{YQZ}_R^{\perp}=\mathbf{CZ}_R^{\perp}. \tag{11}$$

Уравнение (11) оказывается разрешимым, если выполняется тождество

$$\mathbf{CZ}_R^{\perp}\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)_R^{\perp}=0. \tag{12}$$

Здесь $\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)_R^{\perp}$ — правый делитель нуля произведения матриц $\mathbf{QZ}_R^{\perp}$.

При выполнении условия (12) множество решений уравнения (11) имеет вид

$$\mathbf{Y}=\mathbf{CZ}_R^{\perp}\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)^{-}\boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}. \tag{13}$$

Здесь $\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)^{-}$, $\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}$ — символы, обозначающие сводный канонизатор и левый делитель нуля произведения матриц $\mathbf{QZ}_R^{\perp}$.

Подставляя решение (13) в соотношение (9), получаем уравнение

$$\mathbf{XZ}=\mathbf{C}-\left(\mathbf{CZ}_R^{\perp}\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)_+^{-}\boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}\right)\mathbf{Q}, \tag{14}$$

которое всегда оказывается разрешимым относительно матрицы $\mathbf{X}$, поскольку выполнены условия выбора (11), (12). При этом формула его решения имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{X}&=\left[\mathbf{C}-\left(\mathbf{CZ}_R^{\perp}\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)_+^{-}\boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}\right)\mathbf{Q}\right]\mathbf{Z}^{-}+\boldsymbol{\chi}\mathbf{Z}_L^{\perp}=\\&=\mathbf{C}\left(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_R^{\perp}\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)^{-}\mathbf{Q}\right)\mathbf{Z}^{-}-\boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{QZ}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}\mathbf{QZ}^{-}+\boldsymbol{\chi}\mathbf{Z}_L^{\perp},\end{aligned}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица подходящего размера.

Повторяя аналогичные операции в отношении уравнения (7), переписанного в виде $\mathbf{YQ}=\mathbf{C}-\mathbf{XZ}$, можно получить эквивалентное (12) условие разрешимости

$$\mathbf{CQ}_R^{\perp}\left(\mathbf{ZQ}_R^{\perp}\right)_R^{\perp}=0 \tag{16}$$

и эквивалентные (13) и (15) формулы решения

$$\begin{aligned}\mathbf{X}&=\mathbf{CQ}_R^{\perp}\left(\mathbf{ZQ}_R^{\perp}\right)^{-}+\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{ZQ}_R^{\perp}\right)_L^{\perp};\\\mathbf{Y}&=\mathbf{C}\left(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_R^{\perp}\left(\mathbf{ZQ}_R^{\perp}\right)^{-}\mathbf{Z}\right)\mathbf{Q}^{-}-\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{ZQ}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}\mathbf{ZQ}^{-}+\boldsymbol{\varphi}\mathbf{Q}_L^{\perp}.\end{aligned} \tag{17}$$

Отметим, что аналогичные результаты могут быть получены при рассмотрении уравнения (7) в блочно-матричном виде

$$\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Z}\\ \mathbf{Q}\end{pmatrix}=\mathbf{C}$$

с использованием метода блочного решения алгебраических задач [6], в котором при решении уравнений общего вида фактически рассматривается канонизация блочной матрицы. Очевидно, что различные формы конечных решений (13), (15), (17) определяются неединственностью тройки матриц

$$\left(\begin{pmatrix}\mathbf{Z}\\ \mathbf{Q}\end{pmatrix}_L^{\perp}, \begin{pmatrix}\mathbf{Z}\\ \mathbf{Q}\end{pmatrix}_R^{\perp}, \begin{pmatrix}\mathbf{Z}\\ \mathbf{Q}\end{pmatrix}^{-}\right).$$

Обратимся к задаче идентификации в смысле разрешения уравнения (6) относительно матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Формулировка подхода к идентификации. Предположим, что наблюдения за системой (2) ведутся на протяжении N шагов. В целях компактности записываемых формул введем обозначения для известных по постановке задачи матриц

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{N-1} &= \begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \dots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix};\\
\mathbf{X}_{N} &= \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} & x_{N}\end{pmatrix};\\
\mathbf{U} &= \begin{pmatrix}u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{N-2} & u_{N-1}\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{18}$$

и перепишем уравнение (6) с учетом матриц (18) в виде

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{A}\mathbf{X}_{N-1} + \mathbf{B}\mathbf{U}. \tag{19}$$

Условие разрешимости уравнения (19) относительно неизвестных матриц **A** и **B** согласно (12) и (16) можно сформулировать в эквивалентных формах

$$\mathbf{X}_N\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_R^{\perp} = 0; \tag{20}$$

$$\mathbf{X}_N\mathbf{U}_{N-1}^{\perp R}\left(\mathbf{X}\mathbf{U}_{N-1}^{\perp R}\right)_R^{\perp} = 0. \tag{21}$$

Другими словами, уравнение (6) является совместным, а система (2) — идентифицируемой, если известные матрицы (18) удовлетворяют эквивалентным алгебраическим соотношениям (20), (21).

Если условия (20), (21) выполняются, то формулы решения (*алгоритм идентификации* по рекурсивным данным) в соответствии с (13), (15), (17) имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{X}_N\left\{\mathbf{I} - \mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-}\mathbf{U}\right\}\mathbf{X}_{N-1}^{-} - \boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_L^{\perp}\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{-} + \boldsymbol{\chi}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp L};\\
\mathbf{B} &= \mathbf{X}_N\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-} + \boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_L^{\perp}
\end{aligned} \tag{22}$$

или

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_N \mathbf{U}_R^{\perp}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)^{-} + \boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_L^{\perp};$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{X}_N\left(\mathbf{I} - \mathbf{U}_R^{\perp}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)^{-}\mathbf{X}_{N-1}\right)\mathbf{U}^{-} - \boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}^{-} + \boldsymbol{\varphi}\mathbf{U}_L^{\perp}. \qquad (23)$$

Здесь $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — произвольные матрицы подходящего размера.

Ясно, что однозначность решений (отсутствие произвола в (22), (23)) существует, когда искомые матрицы выражаются формулами

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_N\left(\mathbf{I} - \mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-}\mathbf{U}\right)\mathbf{X}_{N-1}^{-};$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{X}_N\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-} \qquad (24)$$

или

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_N\mathbf{U}_R^{\perp}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)^{-};$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{X}_N\left(\mathbf{I} - \mathbf{U}_R^{\perp}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)^{-}\mathbf{X}_{N-1}\right)\mathbf{U}^{-}, \qquad (25)$$

и достигается, если строго выполняются тождества

$$\mathbf{X}_{N-1}^{\perp L} = 0, \quad \left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_L^{\perp} = 0; \qquad (26)$$

$$\mathbf{U}_L^{\perp} = 0, \quad \left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_L^{\perp} = 0. \qquad (27)$$

Тогда это и есть алгебраическая форма *критерия идентифицируемости*.

Поясним сделанное утверждение. Согласно (18), (26) и (27) линейная рекурсивная система (2) идентифицируема тогда и только тогда, когда не только матрицы

$$\mathbf{X}_{N-1} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix};$$
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{N-2} & u_{N-1}\end{pmatrix} \qquad (28)$$

не имеют линейно зависимых строк (т. е. их левые делители нуля равны нулю), но не имеют линейно зависимых строк и произведения матриц

$$\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{N-2} & u_{N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix}_R^{\perp};$$
$$\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots & u_{N-2} & u_{N-1}\end{pmatrix}_R^{\perp}.$$

В указанном выше частном случае (4), (5), когда матрица $\mathbf{X}_{N-1}$ (28) имеет квадратный вид $(N = n)$, согласно (26) для идентифицируемости системы (2), действительно, необходимо и достаточно обеспечить невырожденность матрицы $\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{N-2} & x_{N-1}\end{pmatrix} \neq 0$.

Объединение выражений (22), (23), (26) и (27) в силу их эквивалентности позволяет записать формулы решения задачи идентификации в более компактном виде

$$\mathbf{A}=\mathbf{X}_N\mathbf{U}_R^{\perp}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)^{-}+\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_L^{\perp};$$
$$\mathbf{B}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-}+\boldsymbol{\mu}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_L^{\perp}. \qquad (29)$$

Тогда *критерий идентифицируемости матрицы* $\mathbf{A}$ запишется в виде условия

$$\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}=0, \qquad (30)$$

а *критерий идентифицируемости матрицы* $\mathbf{B}$ — в виде условия

$$\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_L^{\perp}=0. \qquad (31)$$

При удовлетворении соответствующих критериев (30), (31) идентифицируемые матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяются по выражениям

$$\mathbf{A}=\mathbf{X}_N\mathbf{U}_R^{\perp}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)^{-}; \qquad (32)$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-}. \qquad (33)$$

Рассмотрим некоторые характерные примеры решения задачи идентификации на основе полученных соотношений, при этом в силу эквивалентности условий разрешимости задачи идентификации (20), (21) в дальнейшем будем использовать, например, условие (21).

Расчетные примеры. Пусть требуется идентифицировать матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ линейной MIMO-системы, представимой уравнением (2), по дискретно заданным последовательностям сигналов

$$\mathbf{X}_{N-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}; \qquad (34)$$

$$\mathbf{X}_N=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}. \qquad (35)$$

Вычислим канонизатор и делители нуля

– матрицы $\mathbf{X}_{N-1}$

$$\mathbf{X}_{N-1}^{\perp L}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{X}_{N-1}^{-}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}; \qquad (36)$$

– матрицы $\mathbf{U}$

$$\mathbf{U}_L^{\perp}=0,\quad \mathbf{U}_R^{\perp}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{U}^{-}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}; \qquad (37)$$

– произведений матриц

$$\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_L^{\perp}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix};$$
$$\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_R^{\perp}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}; \qquad (38)$$

– матрицы

$$\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_L^{\perp}=0;$$
$$\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_R^{\perp}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}. \qquad (39)$$

Подставляя соответствующие матрицы из (35), (37), (38) в условие (21), получаем нулевую результирующую матрицу $\mathbf{X}_N\mathbf{U}_R^{\perp}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_R^{\perp}=0.$ Таким образом, задача идентификации является разрешимой.

С учетом (38) и (39) критерий идентифицируемости матрицы $\mathbf{B}$ (31) выполняется и матрица может быть вычислена по формуле (33):

$$\mathbf{B}=\mathbf{X}_N\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Однако критерий идентифицируемости матрицы $\mathbf{A}$ (30) не выполняется $\left(\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right)$, тогда согласно формуле (29) имеем

$$\mathbf{A}=\mathbf{X}_N\mathbf{U}_R^{\perp}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)^{-}+\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_L^{\perp}=$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_1\\ \eta_2 & \eta_2\end{pmatrix}. \qquad (40)$$

Действительно, при любых элементах η_1,η_2 пара матриц

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_1\\ \eta_2 & \eta_2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

при заданных сигналах (34), (35) обращает уравнение (2) в тождество

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_1 \\ \eta_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что числовые последовательности (34), (35) были получены при моделировании переходной характеристики системы с матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что исходная матрица $\mathbf{A}$ принадлежит найденному множеству (40).

Усложним задачу. Предположим, что доступны следующие данные:

$$\mathbf{X}_{N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad (41)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad (42)$$

$$\mathbf{X}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (43)$$

Канонизация матриц $\mathbf{X}_{N-1}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}$ и $\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}$ приводит к равенствам

$$\mathbf{X}_{N-1}^{\perp L} = 0, \quad \mathbf{X}_{N-1}^{\perp R} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{N-1}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{U}_L^{\perp} = 0, \quad \mathbf{U}_R^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_L^{\perp} = 0, \qquad \left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_R^{\perp} = 0;$$

$$\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)^{-} = \left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_L^{\perp} = 0, \qquad \left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)_R^{\perp} = 0;$$

$$\left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-} = \left(\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае матрицы $\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}$ и $\mathbf{U}\mathbf{X}_{N-1}^{\perp R}$ имеют нулевые матрицы в качестве левых делителей нуля и, следовательно, в соответствии с условием разрешимости (21) и критериями идентифицируемости (30), (31), решение задачи идентификации согласно (32), (33) имеет однозначный вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 12 & -3 & 5 \\ -4 & 15 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -9 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Если вместо последовательности (42) задана, например, матрица

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то эта матрица имеет ненулевой левый делитель нуля (линейно зависимые строки): $\mathbf{U}_L^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Кроме того, условие разрешимости (21) при неизменных матрицах (41), (43)

$$\mathbf{X}_N\mathbf{U}_R^{\perp}\left(\mathbf{X}_{N-1}\mathbf{U}_R^{\perp}\right)_R^{\perp} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \neq 0$$

не выполняется, что в свою очередь означает принципиальную неразрешимость задачи идентификации по имеющимся данным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Идентификация* положения равновесной ориентации Международной космической станции как задача матричного пополнения с устойчивостью / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, М.Ш. Мисриханов, В.Н. Рябченко, С.Н. Тимаков, Е.А. Черемных // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 130–144.

2. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Тимаков С.Н.* Применение адаптивного полосового фильтра в качестве наблюдателя в контуре управления Международной космической станции // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 88–100.

3. *Aarts R.G.* System identification and parameter estimation. Twente University, 2012.

4. *Bedoui S., Ltaief M., Abderrahim K.* New results on discrete-time delay systems identification // International Journal of Automation and Computing. 2012. Vol. 9. No. 6. P. 570–577. DOI: 10.1007/s11633-012-0681-x
URL: https://link.springer.com/article/10.1007/s11633-012-0681-x

5. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.

6. *Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. № 5. С. 196–240.

7. *Терминальное* релейно-импульсное управление линейными стационарными динамическими системами / Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, М.Ш. Мисриханов, А.С. Олейник, В.Н. Рябченко // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 134–149.

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4а), профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Микрин Евгений Анатольевич — академик РАН, д-р техн. наук, генеральный конструктор ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4а), заведующий кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4а), профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Об одном подходе к идентификации дискретной системы на основе матричных делителей нуля // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 3. С. 20–32. DOI: 10.18698/0236-3933-2017-3-20-32

AN APPROACH TO DISCRETE SYSTEM IDENTIFICATION BASED ON MATRIX ZERO DIVISORS

N.E. Zubov[1, 2]

nezubov@bmstu.ru
Nikolay.Zubov@rsce.ru

E.A. Mikrin[1, 2]
V.N. Ryabchenko[1, 2]

[1] **S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Korolev, Moscow Region, Russian Federation**
[2] **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

Abstract

The purpose of this work was to consider a deterministic approach to parametric identification of linear discrete systems based on matrix zero divisors. We determined the conditions for the solvability of the identification problem. Moreover, we formulated the identifiability criterion and built the solution formula (identification algorithm). By numerical examples we demonstrated the possibilities of the approach

Keywords

Parametric identification, linear discrete system, matrix zero divisors

REFERENCES

[1] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N., Timakov S.N., Cheremnykh E.A. Identification of the position of an equilibrium attitude of the International Space Station as a problem of stable matrix completion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 2, pp. 291–305. DOI: 10.1134/S1064230712010133
Available at: https://link.springer.com/article/10.1134/S1064230712010133

[2] Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N., Timakov S.N. The use of an adaptive bandpass filter as an observer in the control loop of the International Space Station. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, no. 4, pp. 560–572.
DOI: 10.1134/S1064230712030124
Available at: https://link.springer.com/article/10.1134/S1064230712030124

[3] Aarts R.G. System identification and parameter estimation. Twente University, 2012.

[4] Bedoui S., Ltaief M., Abderrahim K. New results on discrete-time delay systems identification. *Int. Journal of Automation and Computing*, 2012, vol. 9, no. 6, pp. 570–577.
DOI: 10.1007/s11633-012-0681-x
Available at: https://link.springer.com/article/10.1007/s11633-012-0681-x

[5] Graupe D. Identification of systems. Krieger Pub. Co., 1976. 288 p.

[6] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Algebraic and matrix methods in theory of linear MIMO-systems. *Vestnik IGEU*, 2005, no. 5, pp. 196–240 (in Russ.).

[7] Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Oleynik A.S., Ryabchenko V.N. Terminal bang-bang impulsive control of linear time invariant dynamic systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 3, pp. 430–444.
DOI: 10.1134/S1064230714030174
Available at: https://link.springer.com/article/10.1134/S1064230714030174

Zubov N.E. — Dr. Sc. (Eng.), Deputy Director for Science, Research and Development Centre, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (Lenina ul. 4a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Professor of Automatic Control System Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Mikrin E.A. — Academician of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sc. (Eng.), General Designer of S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (Lenina ul. 4a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Head of Automatic Control System Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Ryabchenko V.N. — Dr. Sc. (Eng.), Leading Researcher, Research and Development Centre, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (Lenina ul. 4a, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Professor of Automatic Control System Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. An Approach to Discrete System Identification Based on Matrix Zero Divisors. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2017, no. 3, pp. 20–32. DOI: 10.18698/0236-3933-2017-3-20-32