

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ВЕЙВЛЕТ-ПАКЕТОВ

Г.П. Можаров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: mojarov\_g@mail.ru

*Рассмотрены основные разновидности адаптивных алгоритмов базисов вейвлет-преобразований. Под адаптивностью ортогональных вейвлет-преобразований понимается автоматический выбор базиса для сигналов как в частотной, так и в пространственной областях. Исследованы алгоритмы пространственной и частотной локализации двумерных вейвлет-пакетов, проведено их сравнение, а также поиск лучшего базиса на деревьях. Изложено представление о математических моделях, используемых в адаптивной фильтрации сигналов. Рассмотрены двойственные семейства базисов: ортонормированные базисы вейвлет-пакетов, разбивающие на сегменты частотную ось и равномерно сдвинутые по времени; локальные косинусные базисы, равномерно сдвинутые по частоте и делящие временную ось. Выполнено сравнение адаптивных алгоритмов вейвлет-пакетов: число базисов, перебираемых каждым алгоритмом, и вычислительная сложность. Это должно облегчить выбор базиса при практическом использовании вейвлет-пакета в конкретном приложении.*

**Ключевые слова:** адаптивный вейвлет-фильтр, блок вейвлет-фильтра, схема анализа, допустимое дерево вейвлет-пакета, квадратное дерево вейвлет-пакета, число базисов вейвлет-пакета.

## COMPARATIVE ANALYSIS OF ADAPTIVE WAVELET-PACKAGES ALGORITHMS

G.P. Mozharov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: mojarov\_g@mail.ru

*The basic versions of adaptive algorithms for wavelet-transformations bases are considered. The orthogonal wavelet-transformations adaptability is defined as an automatic choice of signal basis in both the frequency and the space domains. The algorithms of space and frequency localization of two-dimensional wavelet-packages are studied and compared as well as the search of the best basis on trees. The representation of mathematical models used in adaptive signals filtration is given. The following dual bases families are considered: orthonormal wavelet-packages bases dividing the frequency axis into segments and uniformly shifted in time; local cosine bases, uniformly frequency-shifted and dividing the time axis. The comparison of adaptive wavelet-packages algorithms is made: the number of bases searched through by each algorithm and computational complexity. It should facilitate the basis choice for a particular wavelet-package application in practice.*

**Keywords:** adaptive wavelet-filter, block of wavelet-filter, analysis scheme, admissible wavelet-package tree, square tree of wavelett-packages, number of wavelet-package bases.

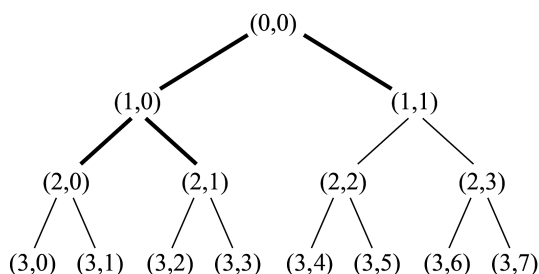
**Введение.** Быстрое вейвлет-преобразование дает разложение функции в ряд частотных диапазонов, величины которых находятся в логарифмическом отношении. Таким образом, низкие частоты объединены

в узкие диапазоны, а высокие — в широкие диапазоны. Желание иметь больший контроль над разбиением частотно-временной плоскости (например, получить меньшие диапазоны в области высоких частот) приводит к обобщению быстрого вейвлет-преобразования и к созданию более гибкой конструкции, называемой вейвлет-пакеты<sup>1</sup> [1–4].

Вейвлет-пакеты были введены как обобщение связующего звена между кратномасштабными аппроксимациями и вейвлетами. Пространство  $V_{j+1}$  кратномасштабной аппроксимации раскладывается на сумму пространства более низкого разрешения  $V_j$  и пространства подробностей  $W_j$  (т.е. пространство  $W_j$  — ортогональное дополнение к пространству  $V_j$  в пространстве  $V_{j+1}$ , тогда согласно свойствам гильбертова пространства  $V_j$  оно раскладывается в прямую сумму  $V_{j+1} = V_j \oplus W$ ). Это осуществляется разбиением ортогонального базиса  $\{\varphi_{j+1}(t - 2^{j+1}n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  пространства  $V_{j+1}$  на два новых ортогональных базиса:  $\{\varphi_j(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  пространства  $V_j$  и  $\{\psi_j(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  пространства  $W_j$ . Разложения  $\varphi_j$  и  $\psi_j$  по базису  $\{\varphi_{j+1}(t - 2^{j+1}n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  определяются парой сопряженных зеркальных фильтров.

Использование пары низкочастотных и высокочастотных фильтров для разложения пространства соответствует разделению сигнала на низкочастотную и высокочастотную компоненты. При вейвлет-преобразовании высокочастотную компоненту оставляют в покое и раскладывают низкочастотную компоненту. В пакетном вейвлет-преобразовании также раскладывают высокочастотную компоненту. Таким образом, пакетное вейвлет-преобразование способствует лучшей частотной локализации сигналов.

Пакетное вейвлет-преобразование данных не создает никаких дополнительных трудностей. Оно выполняется точно так же, как и вейвлет-преобразование, — сверткой с фильтрами  $h_n$  и  $g_n$  или их сопряженными. Пакетное вейвлет-разложение сигнала можно представить в виде схемы (рис. 1).



**Рис. 1. Схема пакетного вейвлет-разложения сигнала**

<sup>1</sup>Необходимо отметить, что адаптивный выбор материнской функции вейвлет-преобразования, образующей базис вейвлет-разложения, является отдельным самостоятельным предметом исследований и в настоящей работе не рассмотрен.

Из числа всех представлений должно выбираться то, которое представляет сигнал наиболее эффективно. Под “эффективным” представлением подразумевается такое, когда сигнал содержит небольшое число коэффициентов разложения, т.е. базис для разложения должен быть таким, чтобы было мало больших коэффициентов разложения и много коэффициентов, близких к нулю. Тогда сигнал представлен меньшим числом коэффициентов. Обычно в качестве критерия для выбора самого эффективного или лучшего базиса для сигнала используется критерий минимальности энтропии. Энтропия характеризует усредненность, “размазанность” сигнала. Энтропия должна обладать свойством аддитивности по отношению к сигналам. Существует несколько вариантов определения энтропии.

**Математическая модель адаптивного вейвлет-фильтра.** Основная идея построения ортогональных систем вейвлетов с помощью кратномасштабного анализа состоит в том, что пространство  $V_{j+1}$ , в котором имеется ортонормированный базис сдвигов, раскладывается в прямую сумму пространства  $V_j$  и в несколько пространств вейвлетов  $W_j^{(v)}$ , в которых тоже есть ортонормированные базисы сдвигов. Используя эту идею, можно аналогично раскладывать в прямую сумму каждое пространство вейвлетов, в результате чего получим много вейвлет-функций, сдвиги которых образуют ортонормированный базис всего пространства. Такие базисы бывают полезными как для теоретических исследований, так и для приложений. Рассмотрим только ортогональный случай и матрицы  $M$  (для которых  $m = 2$ ), где  $M$  — фиксированная целочисленная матрица размером  $d \times d$ . Все собственные числа матрицы  $M$  по модулю больше единицы, причем в многомерном случае умножение каждой компоненты аргумента на один и тот же множитель означает, что умножается вектор аргумента на диагональную матрицу с равными диагональными элементами, т.е. выполняется одинаковое расширение по всем координатным направлениям. Для обеспечения свойства полноты при многократном умножении на матрицу должно осуществляться растяжение по всем направлениям, а  $m = |\det M|$  равно отношению частот дискретизации исходного сигнала и прорецимированного сигнала; для критически децимированных сигналов число каналов  $m$ . Пусть дан периодический кратномасштабный анализ в пространстве  $L_2(\mathbb{T}^d)$ , порожденный масштабирующей последовательностью  $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ , ортонормированная система  $\{S_n^j \varphi_j\}_{n \in D(M^j)}$ , соответствующий ортонормированный базис  $\{S_n^j \psi_j\}_{n \in D(M^j)}$  вейвлетов в пространстве  $W_j$ .

Примем  $\lambda_r^j = e^{2\pi i(M^{-j}\sigma, r)} \mu_{r+M^{*j-1}\sigma^*}^j$ , где  $\sigma, \sigma^*$  — ненулевые цифры матриц  $M, M^*$ ;  $\mu_k^j$  — множители такие, что  $\widehat{\varphi}_{j-1}(k) = \mu_k^j \widehat{\varphi}_j(k)$  для

всех  $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$  [3, 4]. Тогда имеют место равенства

$$|\mu_r^j|^2 + |\lambda_r^j|^2 = |\mu_r^j|^2 + \left| \mu_{r+M^{*j-1}\sigma^*}^j \right|^2 = |\lambda_r^j|^2 + \left| \lambda_{r+M^{*j-1}\sigma^*}^j \right|^2 = 2 \quad (1)$$

и

$$\mu_r^j \overline{\lambda_r^j} + \mu_{r+M^{*j-1}\sigma^*}^j \overline{\lambda_{r+M^{*j-1}\sigma^*}^j} = 0. \quad (2)$$

Пусть  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , обозначим мультипликаторы  $\Delta_k$  и  $\Lambda_k$ , заданные в пространстве  $L_2(\mathbb{T}^d)$  и определяемые по равенствам  $\widehat{\Delta}_k f(r) = \mu_r^k \widehat{f}(r)$ ,  $\widehat{\Lambda}_k f(r) = \lambda_r^k \widehat{f}(r)$ .

Зафиксируем натуральное число  $s$ . Для целого числа  $j \geq s$  и  $v = (v_{j-s_0+1}, \dots, v_j)$ , где  $v_k$  принимает значения 0 и 1, примем

$$\psi_j^{(v)} = \psi_j^{(v,s)} = \prod_{k=j-s+1}^j \Delta_k^{v_k} \Lambda_k^{1-v_k} \psi_j;$$

$$W_j^{(v)} = \text{span} \left\{ S_n^{j-s} \psi_j^{(v)}, n \in D(M^{*j-s}) \right\}.$$

Поскольку эти последовательности  $\{\mu_r^j\}$ ,  $\{\lambda_r^j\}$   $M^j$ -периодичны по нижнему индексу, имеем

$$\begin{aligned} \omega_r^j \psi_j^{(v)}(x) &= \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^{de}} \prod_{k=j-s+1}^j (\mu_{M^j l+r}^k)^{v_k} (\lambda_{M^j l+r}^k)^{1-v_k} \widehat{\psi}_j(M^j l+r) e^{2\pi i(M^{-j} l+r, x)} = \\ &= \prod_{k=j-s+1}^j (\mu_r^k)^{v_k} (\lambda_r^k)^{1-v_k} \omega_r^j \psi_j(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Установим включение  $W_j^{(v)} \subset W_j$ . Покажем, что  $W_j^{(v)} \perp W_j^{(v')}$  при  $v \neq v'$  и система функций  $\left\{ S_{j-s}^n \psi_j^{(v)} \right\}_{n=0}^{2^{j-s}-1}$  является ортонормированным базисом пространства  $W_j^{(v)}$  при каждом  $v$ . Для этого достаточно установить при  $v \neq v'$

$$\left\langle \omega_r^{j-s} \psi_j^{(v)}, \omega_r^{j-s} \psi_j^{(v')} \right\rangle = 0 \quad (4)$$

и

$$\left\| \omega_r^{j-s} \psi_j^{(v)} \right\|^2 = 2^{-j+s}. \quad (5)$$

Для доказательства равенств (4), (5) проведем индукцию по числу  $s$  [3–5]. Пусть  $s = 1$ . Используя (3), определяем

$$\begin{aligned} \left\langle \omega_r^{j-1} \psi_j^{(v)}, \omega_r^{j-1} \psi_j^{(v')} \right\rangle &= \left\langle \omega_r^j \psi_j^{(v)}, \omega_r^j \psi_j^{(v')} \right\rangle + \left\langle \omega_{r'}^j \psi_j^{(v)}, \omega_{r'}^j \psi_j^{(v')} \right\rangle = \\ &= (\mu_r^j)^{v_j} \left( \overline{\mu_r^j} \right)^{v'_j} (\lambda_r^j)^{1-v_j} \left( \overline{\lambda_r^j} \right)^{1-v'_j} \left\| \omega_r^{j-s} \psi_j \right\|^2 + \\ &+ (\mu_{r'}^j)^{v_j} \left( \overline{\mu_{r'}^j} \right)^{v'_j} (\lambda_{r'}^j)^{1-v_j} \left( \overline{\lambda_{r'}^j} \right)^{1-v'_j} \left\| \omega_{r'}^{j-s} \psi_j \right\|^2, \end{aligned}$$

где  $r' = \mathbf{M}^{*j-s_0}\sigma^* + r$ . С учетом  $\|\omega_r^j \psi_j\|^2 = 2^{-j}$  и равенств (1), (2), получаем равенства (4), (5) для  $s = 1$ . Теперь предположим, что равенства (4), (5) верны для всех  $s < s_0$ . Пусть  $v = (v_{j-s_0+1}, \dots, v_j)$ ,  $v' = (v'_{j-s_0+1}, \dots, v'_j)$ , примем  $\gamma = (v_{j-s_0+2}, \dots, v_j)$ ,  $\gamma' = (v'_{j-s_0+2}, \dots, v'_j)$ ,  $\kappa = v_{j-s_0+1}$ ,  $\kappa' = v'_{j-s_0+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \left\langle \omega_r^{j-s_0} \psi_j^{(v)}, \omega_r^{j-s_0} \psi_j^{(v')} \right\rangle = \\ & = \left\langle \omega_r^{j-s_0+1} \psi_j^{(v)}, \omega_r^{j-s_0+1} \psi_j^{(v')} \right\rangle = \left\langle \omega_{r'}^{j-s_0+1} \psi_j^{(v)}, \omega_{r'}^{j-s_0+1} \psi_j^{(v')} \right\rangle = \\ & = (\mu_r^{j-s_0+1})^\kappa \left( \overline{\mu_r^{j-s_0+1}} \right)^{\kappa'} (\lambda_r^{j-s_0+1})^{1-\kappa} \left( \overline{\lambda_r^{j-s_0+1}} \right)^{1-\kappa'} \times \\ & \times \left\langle \omega_r^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma)}, \omega_r^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma')} \right\rangle + (\mu_{r'}^{j-s_0+1})^\kappa \left( \overline{\mu_{r'}^{j-s_0+1}} \right)^{\kappa'} \times \\ & \times (\lambda_{r'}^{j-s_0+1})^{1-\kappa} \left( \overline{\lambda_{r'}^{j-s_0+1}} \right)^{1-\kappa'} \left\langle \omega_{r'}^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma)}, \omega_{r'}^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma')} \right\rangle, \end{aligned}$$

где  $r' = \mathbf{M}^{*j-s_0}\sigma^* + r$ . Согласно индукционному предположению

$$\left\langle \omega_k^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma)}, \omega_k^{j-s_0+1} \psi_j^{(\gamma')} \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{при } \gamma \neq \gamma'; \\ 2^{j-s_0+1}, & \text{при } \gamma = \gamma'. \end{cases}$$

Следовательно, используя равенства (1), (2), получаем равенства (4), (5) при  $s = s_0$ . Таким образом, доказано, что  $W_j = \bigoplus_v W_j^{(v)}$  и система функций  $\left\{ S_N^{j-s}, \psi_j^{(v)} \right\}_{n,v}$  является ортонормированным базисом пространства  $W_j$  [6]. Эта система и называется вейвлет-пакетом.

**Реализация вейвлет-преобразования сигнала.** Вейвлет-анализ выполняется с помощью древовидно соединенных двухканальных блоков фильтров. Пусть глубина дерева  $d$ , тогда сигнал имеет длину  $2^d$ . Если это не выполняется, можно добавить недостающие отсчеты, например, дописать сигнал нулями. Функции из вейвлет-пакета сконструированы путем обобщения дерева набора фильтров с использованием связи вейвлетов и зеркально-сопряженных фильтров. Разбиение частотной оси вейвлет-пакетами выполняется подходящей последовательностью итерированных сверток с зеркально-сопряженными фильтрами. Например, быстрые численные разложения по вейвлет-пакетам реализуются с дискретными наборами фильтров.

Вейвлет-анализ сигнала осуществляется путем его пропускания через каскадно-соединенные двухканальные схемы “анализа” (рис. 2). При этом каскадирование проводится по низкочастотной области. Причина этого в неявном предположении, что данная область содержит больше информации об исходном сигнале. В результате получается “однобокое” дерево. Оно означает, что сигнал является низкочастотным на большом интервале времени, а высокочастотные компоненты

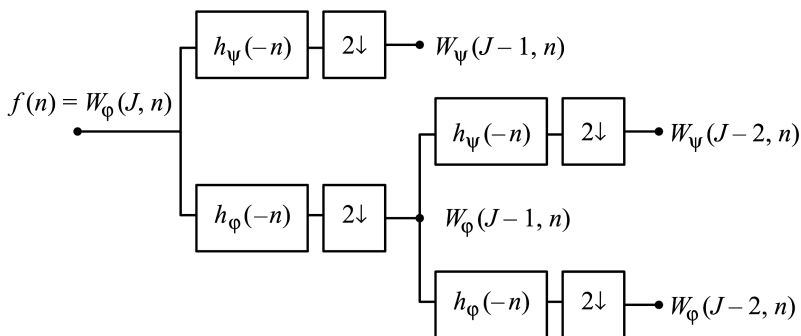


Рис. 2. Двухступенчатая схема вейвлет-анализа сигнала

появляются на коротком интервале. Однако для некоторых сигналов это предположение не выполняется. Метод вейвлет-пакетов основан на определении того, по какой области на данном уровне выгоднее выполнять каскадирование. Для этого вначале осуществляется каскадирование по субполосам. В результате получается так называемое полное, сбалансированное дерево. Далее на основе введенной функции стоимости определяется наилучший путь по этому дереву. Если исходный блок вейвлет-фильтров был ортогональным, то и схема, соответствующая любой конфигурации дерева, будет ортогональной, так как она есть не что иное, как каскадное соединение ортогональных блоков [6].

**Двоичное дерево вейвлет-пакета.** Вместо разбиения аппроксимационных пространств  $V_j$  для построения пространств подробностей  $W_j$  и вейвлет-базиса, можно принять  $U_j = W_j$  и разбить эти пространства подробностей, чтобы получить новые базисы. Рекурсивное расщепление векторных пространств представлено в виде двоичного дерева. Если сигналы аппроксимируются с масштабом  $2^L$ , то с корнем дерева связывается пространство аппроксимации  $V_L$ , которое допускает ортогональный базис из масштабирующих функций  $\{\varphi_L(t - 2^L n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , где  $\varphi_L(t) = 2^{-L/2} \varphi(2^L t)$ . Любой узел двоичного дерева помечается индексами  $(j, p)$ , где  $j - L \geq 0$  — глубина узла на дереве;  $p$  — число узлов, находящихся слева на той же глубине  $j - L$  (рис. 3, а).

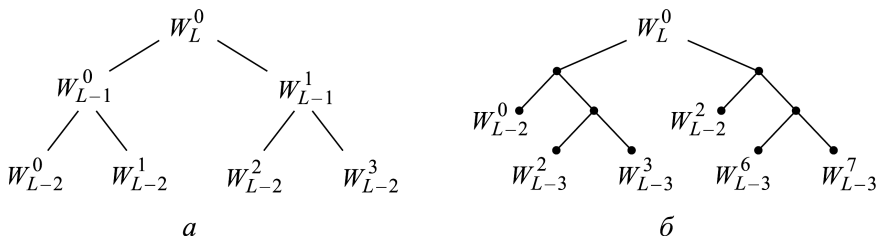


Рис. 3. Двоичное (а) и допустимое (б) деревья пространств вейвлет-пакетов

С каждым узлом  $(j, p)$  связывается пространство  $W_j^p$ , которое допускает ортонормированный базис  $\{\psi_j^p(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  при движении вниз по дереву. На корне имеем  $W_L^0 = V_L$  и  $\psi_L^0 = \varphi_L$ . Предположим, что уже построено пространство  $W_j^p$  и его ортонормированный базис  $\mathcal{B}_j^p = \{\psi_j^p(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  в узле  $(j, p)$ . Два вейвлет-пакета ортогональных базисов в порожденных узлах описываются соотношениями расщепления:  $\psi_{j+1}^{2p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \psi_j^p(t - 2^j n)$  и

$$\psi_{j+1}^{2p+1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n] \psi_j^p(t - 2^j n). \quad \text{Поскольку пространство } \{\psi_j^p(t - 2^j n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ ортонормировано, то } h[n] = \langle \psi_{j+1}^{2p}(u), \psi_j^p(u - 2^j n) \rangle, \\ g[n] = \langle \psi_{j+1}^{2p+1}(u), \psi_j^p(u - 2^j n) \rangle.$$

Доказано  $\mathcal{B}_{j+1}^{2p} = \{\psi_{j+1}^{2p}(t - 2^{j+1} n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  и  $\mathcal{B}_{j+1}^{2p+1} = \{\psi_{j+1}^{2p+1}(t - 2^{j+1} n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  — ортонормированные базисы двух ортогональных пространств  $W_{j+1}^{2p}$  и  $W_{j+1}^{2p+1}$  таких, что [7]

$$W_j^{2p} \oplus W_j^{2p+1} = W_{j+1}^p. \quad (6)$$

Рекурсивное расщепление (6) определяет двоичное дерево пространств вейвлет-пакета, где каждый узел-родитель делится на два ортогональных подпространства.

Вычислительная сложность алгоритма для одномерного сигнала длиной  $N$  и максимальной глубиной  $d$  одиночного дерева составит  $O(Nd)$ .

**Допустимое дерево.** Допустимым деревом называется любое двоичное дерево, каждый узел которого имеет либо 0, либо 2 рожденных узла (рис. 3, б). Пусть  $\{j_i, p_i\}_{1 \leq i \leq I}$  — листья допустимого двоичного дерева. Применяя рекурсивное расщепление (6) вдоль ветвей допустимого дерева, убеждаемся, что пространства  $\{W_{j_i}^{p_i}\}_{1 \leq i \leq I}$  взаимно ортогональны и в сумме дают  $W_L^0$ :  $W_L^0 = \bigoplus_{i=1}^I W_{j_i}^{p_i}$ . Поэтому объединение

соответствующих базисов вейвлет-пакетов  $\{\psi_{j_i}^{p_i}(t - 2^{j_i} n)\}_{n \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq I}$  определяет ортогональный базис  $W_L^0 = V_L$ . Таким образом, получается базис, адаптированный к сигналу. Отметим, что адаптация не требует обучения или знания статистических свойств сигнала. Вейвлет-преобразование — частный случай этого базиса. Адаптивность достигается за счет увеличения вычислительной стоимости.

Для одномерного сигнала длиной  $N$  и дерева максимальной глубиной  $d$  вычислительная сложность алгоритма допустимого двоичного дерева составляет  $O(Nd^2)$ .

**Частотно-временное дерево.** Такое дерево еще называют сбалансированным. Частотно-временное дерево имеет структуру квадродерева. Каждый родительский узел содержит две пары потомков: временные и частотные сегменты.

Для кодирования изображений алгоритм частотно-временного дерева несложно перенести на двумерный случай. Тогда получается пространственно-частотное дерево.

Для одномерного сигнала длиной  $N$  и дерева максимальной глубиной  $d$  вычислительная сложность алгоритма частотно-временного дерева составит  $O(N2^d)$ .

Недостаток рассмотренного алгоритма — принципиальное ограничение двоичной сегментацией во времени и, как следствие, чувствительность временной сегментации к сдвигам исходного сигнала. Для ликвидации этой чувствительности применяется алгоритм, основанный на динамическом программировании — дерево гибкой пространственной сегментации. Этот алгоритм включает в себя как частные случаи все рассмотренные выше алгоритмы, основным его недостатком является невозможность простого перенесения алгоритма на двумерный случай для кодирования изображений.

**Число базисов вейвлет-пакета.** Число различных ортогональных базисов вейвлет-пакета для пространства  $V_L$  равно числу допустимых двоичных деревьев. Существует более чем  $2^{2^{J-1}}$  различных ортонормированных базисов вейвлет-пакета, содержащихся во всем двоичном дереве вейвлет-пакета глубиной  $J = d$ .

Число  $B_d$  базисов вейвлет-пакета во всем двоичном дереве вейвлет-пакета удовлетворяет неравенству  $2^{2^{d-1}} \leq B_d \leq 2^{\frac{5}{4}2^{d-1}}$ . Этот результат доказывается индукцией по параметру  $d$  (глубина дерева вейвлет-пакета). Число  $B_d$  различных ортонормированных базисов равно числу различных допустимых двоичных деревьев наибольшей глубины  $d$ , узлы которых имеют либо 0, либо 2 рожденных узла. При  $d = 0$  дерево уменьшается до своего корня, отсюда  $B_0 = 1$ .

Отметим, что множество деревьев глубиной, не большей  $d + 1$ , состоит из деревьев глубиной самое меньшее 1 и самое большее  $d + 1$ , а также из одного дерева глубиной 0, что соответствует корню. Дерево глубиной самое меньшее 1 имеет левое и правое поддеревья, которые представляют собой допустимые деревья глубиной не больше  $d$ . Априори конфигурация этих деревьев произвольна, и существует такое число  $B_d$  допустимых деревьев глубиной  $d$ , что  $B_{d+1} = B_d^2 + 1$ . Поскольку  $B_1 = 2$  и  $B_{d+1} \geq B_d^2$ , то по индукции доказываем следующее:  $B_d \geq 2^{2^{d-1}}$ . Кроме того,  $\log_2 B_{d+1} = 2 \log_2 B_d + \log_2 (1 + B_d^{-2})$ . Если  $d \geq 1$ , то  $B_d \leq 2$  и  $\log_2 B_{d+1} \leq 2 \log_2 B_d + \frac{1}{4}$ . Поскольку  $B_1 = 2$ ,



$$\log_2 B_{d+1} \leq 2^J + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{d-1} 2^j \leq 2^d + \frac{2^d}{4}, \text{ откуда } B_d \leq 2^{\frac{5}{4}2^{d-1}}.$$

При дискретных сигналах длиной  $N$  дерево вейвлет-пакета имеет глубину самое большее  $d = \log_2 N$ . Поэтому число базисов вейвлет-пакета удовлетворяет неравенству  $2^{N/2} \leq B_{\log_2 N} \leq 2^{5N/8}$ .

Разложение изображения  $f[n]$  по сепарабельному локальному косинусному семейству  $\mathcal{B}$  требует  $O(2^{-2j} N^2 \log_2(2^{-j} N))$  операций при сепарабельном выполнении быстрого одномерного локального косинусного преобразования. Для всего локального косинусного квадратного дерева глубиной  $J = d$  эти вычисления выполняются при  $0 \leq p, q < 2^j$  и  $0 \leq j \leq d$ , что требует  $O(N^2 d \log_2 N)$  умножений и сложений. Исходное изображение восстанавливается по локальным косинусным коэффициентам в листьях любого допустимого поддерева за число  $O(N^2 \log_2 N)$  вычислений.

**Выбор адаптивных алгоритмов вейвлет-фильтров.** Хотя вейвлет-пакеты являются более гибким средством декомпозиции сигналов, чем вейвлет-преобразование, они не изменяются, следовательно, и не адаптируются во времени (пространстве). Важные классы сигналов (речь, изображения) не стационарны во времени и требуют более гибкого разложения. Например, для изображения адаптация может быть достигнута путем выполнения пространственной сегментации и применения алгоритма одиночного дерева к каждому сегменту [6, 8–11]. Это приводит к пространственно изменяющимся вейвлет-пакетам. Быстрый алгоритм, позволяющий достигнуть подобного разбиения, получил название алгоритма двойного дерева.

Алгоритм двойного дерева основан на совместном поиске наилучшей (бинарной) пространственной сегментации и частотного разбиения для каждого сегмента сигнала. В таком алгоритме используется теория пространственно изменяющихся блоков фильтров. В результате выполнения алгоритма получается оптимальное двоичное дерево разбиения по частоте и по времени полной глубины. В этом его отличие от алгоритма одиночного дерева, где обрезанное дерево имеет, как правило, неполную глубину.

Недостаток рассмотренного алгоритма — принципиальное ограничение двоичной сегментации во времени, а также чувствительность временной сегментации к сдвигам исходного сигнала. Для устранения чувствительности так же, как и в частотно-временном дереве применяется дерево гибкой пространственной сегментации. При этом разбиение в частотной области остается бинарным, так как используется двухканальный блок фильтров [6].

Сравнение алгоритмов одиночного дерева, двойного дерева и частотно-временного дерева проведем по следующим параметрам:

размерность библиотеки базисных функций, из которых осуществляется поиск наилучшей; вычислительная сложность; эффективность кодирования реальных изображений.

На вершине дерева — исходный сигнал, а ниже — его пакетные вейвлет-коэффициенты. Левые ветви указывают на аппроксимирующие коэффициенты, а правые — идут к детализирующим коэффициентам предыдущего узла. Обычное вейвлет-разложение — левая часть пакетного дерева. Вейвлет-коэффициентов достаточно для восстановления сигнала и можно разложить высокочастотные коэффициенты деталей или отказаться от этого. Таким образом, появляется гораздо больше возможностей выбора базиса для разложения — от “минимального” вейвлет-разложения до полного пакетного разложения на всех уровнях, т.е. существует много вариантов, чтобы разложить сигнал.

Число базисов вейвлет-пакета было определено выше. Для одномерного сигнала длиной  $N$  при применении двухканального блока фильтров число базисов  $\mathcal{B}(N)$ , перебираемых алгоритмом одиночного дерева, вычисляется рекурсивно:  $\mathcal{B}(N) = (\mathcal{B}(N/2))^2 + 1$ ,  $\mathcal{B}(2) = 2$ . Это вытекает из следующих соображений. Любое двоичное дерево может быть представлено в виде суммы двух субдеревьев высотой на 1 меньше. Если число базисов в этих субдеревьях составляет  $\mathcal{B}(N/2)$ , то число базисов во всем дереве  $\mathcal{B}(N) = (\mathcal{B}(N/2))^2 + 1$ .

Для упрощения анализа алгоритма двойного дерева предположим, что используются фильтры Хаара, так как в этом случае не требуется применение граничных фильтров. Аналогично предыдущему случаю может быть показано, что число перебираемых базисов  $\mathcal{D}(N) = (\mathcal{D}(N/2))^2 + \mathcal{B}(N) - \mathcal{B}(N/2)$ , с  $\mathcal{D}(N) = 2$ , а  $\mathcal{B}(N) - \mathcal{B}(N/2)$  — число “новых” базисов одиночного дерева при отсутствии пространственной сегментации.

Число базисов для частотно-временного дерева может быть вычислено аналогично (для фильтров Хаара):  $\mathcal{B}_f^t(N) = 2(\mathcal{B}_f^t(N/2))^2 - (\mathcal{B}_f^t(N/4))^4$ ,  $\mathcal{B}_f^t(N) = 2$ . При использовании других фильтров число базисов увеличивается за счет периодического расширения сигнала и становится равным  $\mathcal{B}_f^t(N) = 2(\mathcal{B}_f^t(N/2))^2$ .

Для алгоритма гибкой временной сегментации число базисов

$$\mathcal{B}_F(N) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 N \rfloor} (\mathcal{B}(2^i) - \mathcal{B}(2^{i-1})) \mathcal{B}_F(N - 2^i), \mathcal{B}_F(2) = 2 \text{ и } \mathcal{B}_F(1) = 0.$$

Базисы вейвлет-пакетов характеризуются разбиением частотной оси на интервалы разных размеров. Поэтому такие базисы особенно хорошо приспособлены для разложения сигналов, которые имеют разное поведение на разных частотных интервалах. Если функция  $f$  обладает изменяющимися во времени свойствами, то ее целесообразно раскладывать по блочным базисам, которые разбивают временную

ось на интервалы размерами, соответствующими структуре сигнала. Косинусные базисы — наиболее применяемые блочные базисы.

Допустимое поддерево для локального косинусного квадратного дерева имеет узлы, порождающие 0 или 4 узла. Применяя свойство разложения  $W_j^{p,q} = W_{j+1}^{2p,2q} \oplus W_{j+1}^{2p+1,2q} \oplus W_{j+1}^{2p,2q+1} \oplus W_{j+1}^{2p+1,2q+1}$  вдоль ветвей допустимого квадратного дерева, получаем, что расположенные в листьях пространства  $W_j^{p_i,q_i}$  раскладывают пространство  $W_0^{0,0}$  на ортогональные подпространства. Ввиду этого объединение соответствующих двумерных локальных косинусных базисов  $\mathcal{B}_{j_i}^{p_i,q_i}$  — ортогональный базис  $W_0^{0,0}$ . Пусть есть больше чем  $2^{4^{J-1}} = 2^{N^2/16\eta^2}$  различных допустимых деревьев максимальной глубиной  $d = \log_2 \frac{N}{2\eta}$ . Эти базисы разбивают плоскость изображения на квадраты различных размеров. Этот локальный косинусный базис выбран с помощью лучшего базисного алгоритма. Число базисов, перебираемых различными алгоритмами, приведено ниже:

Дерево:

одиночное .....	$\mathcal{B} = (\mathcal{B}(N/2))^2 + 1, \mathcal{B}(2) = 2S(N) = [S(N/2)]^2 + 1,$ $S(2) = 2$
двоичное .....	$\mathcal{D}(N) = (\mathcal{D}(N/2))^2 + \mathcal{B}(N) - \mathcal{B}(N/2)$
частотно-временное .....	$\mathcal{B}_f^t(N) = 2 \left( \mathcal{B}_f^t(N/2) \right)^2 - \left( \mathcal{B}_f^t(N/4) \right)^4$
гибкой временной сегментации	$\mathcal{B}_F(N) = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2 N \rfloor} (\mathcal{B}(2^i) - \mathcal{B}(2^{i-1})) \mathcal{B}_F(N - 2^i)$

Следовательно, для одномерного сигнала длиной  $N$  и дерева максимальной глубиной  $d$  вычислительная сложность алгоритма одиночного, двоичного и частотно-временного дерева будет составлять  $O(Nd)$ ,  $O(Nd^2)$  и  $O(N2^d)$  соответственно. Вычислительная сложность алгоритма гибкой сегментации равна  $O(NMd)$ , где  $M$  — максимальное число сегментов ( $N = ML$ ). Разложение изображения  $f[n]$  по сепарабельному локальному косинусному семейству  $\mathcal{B}_j^{p,q}$  требует  $O(2^{-2j} N^2 \log_2(2^{-j} N))$  операций при сепарабельном выполнении быстрого одномерного локального косинусного преобразования. Для всего локального косинусного квадратного дерева глубиной  $d$  эти вычисления выполняются при  $0 \leq p, q < 2^j$  и  $0 \leq j \leq d$ , что требует  $O(N^2 d \log_2 N)$  умножений и сложений. Исходное изображение восстанавливается по локальным косинусным коэффициентам в листьях любого допустимого поддерева за число  $O(N^2 \log_2 N)$  вычислений.

**Заключение.** Рассмотренные алгоритмы позволяют выполнять адаптацию в частотной области (вейвлет-пакеты — алгоритм одиночного дерева); сначала во временной, а затем в частотной (алгоритм

двоичного дерева) областях, одновременно в двух областях (алгоритм частотно-временного дерева). Пространственная и частотная локализации двумерных вейвлет-пакетов выводятся из частотно-временного анализа. Базисы вейвлет-пакетов характеризуются разбиением частотной оси на интервалы разных размеров. Поэтому такие базисы особенно хорошо приспособлены для разложения сигналов, имеющих поведение на различных частотных интервалах. Если сигнал обладает изменяющимися во времени свойствами, то его следует раскладывать по блочным базисам, которые разбивают временную ось на интервалы размерами, соответствующими структуре сигнала. Недостаток алгоритмов вейвлет-пакетов — ограничение на бинарное разбиение во временной области.

Сигнал хорошо аппроксимируется базисом вейвлет-пакета, если в любом частотном интервале структуры с высокой энергией имеют одинаковую частотно-временную протяженность. Сдвиг по времени вейвлет-пакета, который покрывает этот частотный интервал, хорошо приспособлен для аппроксимации всех структур сигнала этого частотного диапазона, появляющихся в различные моменты времени. Если сигнал содержит разные типы структур высокой энергии, локализованных в различные моменты времени, но в одном частотном интервале, то не существует базиса вейвлет-пакетов, который был бы хорошо адаптирован ко всем из них.

Локальный косинусный базис разбивает временную ось на отрезки различных размеров. Поэтому лучший локальный косинусный базис адаптирует временное разбиение к изменениям частотно-временных структур сигнала. По сравнению с вейвлет-пакетами выигрываем во временной адаптации, но теряем в частотной гибкости. Поэтому лучший локальный косинусный базис хорошо адаптирован для аппроксимации сигналов, свойства которых могут изменяться во времени, но который не содержит структур очень разной временной и частотной протяженности в любой заданный момент времени.

В двумерном случае лучший локальный косинусный базис разбивает изображение на квадратные окна, размеры которых хорошо адаптированы к пространственным изменениям локальных структур изображения. Как и в одномерном случае, лучший локальный косинусный базис дает эффективное представление, если изображение не включает структур очень разной частоты в одной и той же пространственной области. Таким образом, перспективы применения того или иного алгоритма зависят от конкретного приложения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев А.М., Можаров Г.П., Сюзев В.В.* Многопроцессорные вычислительные системы: теоретический анализ, математические модели и применение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 334 с.

2. Андреев А.М., Можаров Г.П. Анализ основных параметров компьютерных систем методом спектральной теории графов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журн. 2011. № 10 URL: <http://technomag.edu.ru/doc/232774.html> (77-30569/232774)
3. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006. 616 с.
4. Skopina M. Multiresolution analysis of periodic functions // East J. Approx. 1997. Vol. 3. No. 2. P. 203–224.
5. Максименко И.Е., Скопина М.А. Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15. № 2. С. 1–39.
6. Можаров Г.П. Основы цифровой вейвлет-обработки сигналов и изображений. Номер государственной регистрации 0321400743. [Электронное издание] М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 198 с.
7. Skopina M. On construction of multivariate wavelets with vanishing moments // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2006. Vol. 20. No. 3. P. 375–390.
8. Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры; пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 487 с.
9. Сюзев В.В. Основы теории цифровой обработки сигналов. М.: РТСофт, 2014. 752 с.
10. Чуи К. Введение в вейвлеты; пер. с англ.; под ред. Я.М. Жилейкина. М.: Мир, 2001. 412 с.
11. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам; пер. с англ.; под ред. А.П. Петухова. М.: РХД, 2001. 464 с.

## REFERENCES

- [1] Andreev A.M., Mozharov G.P., Syuzev V.V. Mnogoprotsessornye vychislitel'nye sistemy: teoreticheskiy analiz, matematicheskie modeli i primeneniye [Multiprocessing Computing Systems: the Theoretical Analysis, Mathematical Models and Application]. Moscow, MGТУ im. N.E. Bauman Publ., 2011. 334 p.
- [2] Andreev A.M., Mozharov G.P. Analiz of Key Parametres of Computer Systems a Method of the Spectral Theory of Counts. *Nauka i obrazovanie. MGТУ im. N.E. Bauman* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2011, no. 10. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/232774.html>
- [3] Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.A. Teoriya vspleskov [The Theory of Splashes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 616 p.
- [4] Skopina M. Multiresolution Analysis of Periodic Functions. *East J. Approx.*, 1997, vol. 3, no. 2, pp. 203–224.
- [5] Maksimenko I.E., Skopina M.A. Multidimensional Periodic Splashes. *Algebra and Analiz*, 2003, vol. 15, no. 2, pp. 1–39.
- [6] Mozharov G.P. Introduction of digital wavelet-processing of signals and images: the manual on discipline of “System of real time”: the electronic educational edition. Number of the state registration 0321400743, the registration certificate no. 35273. Moscow, MGТУ im. N.E. Bauman, 2014. 198 p.
- [7] Skopina M. On Construction of Multivariate Wavelets with Vanishing Moments. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2006, vol. 20, no. 3, pp. 375–390.
- [8] Frazier Michael W. An Introduction to Wavelets through Linear Algebra. Springer, 1999.
- [9] Syuzev V.V. Osnovy teorii tsifrovoy obrabotki signalov [Introduction of the Theory of Digital Processing of Signals]. Moscow, RTSoft Publ, 2014. 752 p.
- [10] Chui C.K. An Introduction to Wavelets. Academic Press, 1992.
- [11] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia, SIAM, 1992. 464 p.

Статья поступила в редакцию 03.06.2015

Можаров Геннадий Петрович — канд. техн. наук, доцент кафедры “Компьютерные системы и сети” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Mozharov G.P. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Computer Systems and Networks department, Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Можаров Г.П. Сравнительный анализ адаптивных алгоритмов вейвлет-пакетов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 1. С. 75–88.

DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-75-88

**Please cite this article in English as:**

Mozharov G.P. Comparative analysis of adaptive wavelet-packages algorithms. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 1, pp. 75–88.

DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-75-88