

Л. Н. Лысенко, Ф. В. Звягин

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПОЛЕТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРБИТ, ПРОХОДЯЩИХ В ОКРЕСТНОСТЯХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ

Предпринята попытка изложения основ баллистического обеспечения межпланетных полетов с использованием орбит, проходящих в окрестностях точек либрации. Показано, что соответствующие “быстрые” алгоритмы могут быть получены в рамках общей задачи трех тел при записи уравнений движения в координатах Якоби. Рассмотрены области возможных движений, а для задач баллистического обеспечения оперативного управления указаны пути определения уточненного положения точек либрации системы Земля–планета. Разработанное программно-математическое обеспечение, апробированное на решении модельных задач, позволило получить ряд неизвестных ранее результатов, имеющих практическое значение.

E-mail: sm3@sm.bmstu.ru; pk-bmstu@ya.ru

Ключевые слова: баллистическое обеспечение полета, полетные схемы, межпланетные полеты, сфера влияния, точки либрации.

Баллистические схемы межпланетных полетов с использованием орбит, проходящих в окрестности точек либрации, определяющих положение относительного равновесия системы Земля–планета, принято считать весьма перспективными с позиций решения многих задач использования и освоения дальнего космоса. Первой экспедицией, при осуществлении которой КА был выведен на орбиту в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце–Земля, стал проект ISEE (International Sun–Earth Explorer), реализованный в 1978 г. Проект базировался на использовании двух КА (ISEE-1 и ISEE-2), выведенных на высокоэллиптические орбиты, и третьего КА (ISEE-3), обращающегося по орбите с амплитудой по оси аппликат порядка 120 000 км и по оси ординат около 666 670 км относительно точки либрации L_1 .

В декабре 1995 г. NASA совместно с ESA в космическое пространство была выведена гелиоисследовательская обсерватория под названием SOHO, орбитальная схема полета которой представляла собой копию полетной схемы аппарата ISEE-3.

Далее, в июне 2001 г. NASA был осуществлен проект MAP, в котором были использованы результаты советского периода разработки проекта “Реликт-2” (1990), неосуществленного в силу сложившейся в СССР политико-экономической ситуации.

Временной период 2001–2004 гг. характеризовался успешным проведением межпланетной экспедиции Genesis, исследовательской частью которого явился сбор и доставка на Землю заряженных частиц солнечного ветра.

Наконец в мае 2009 г. ESA был осуществлен проект, в котором на периодические орбиты в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце–Земля одной ракетой-носителем были выведены сразу два аппарата “Планк” и “Гершель”, первый из которых предназначается для изучения реликтового излучения, второй — для проведения инфракрасной съемки Вселенной.

Современные планы реализации межпланетных миссий космических агентств как отдельных стран, так и международного сообщества сегодня включают в себя осуществление ряда проектов по продолжению ранее выполненных исследований космического пространства, а также организацию интерферометрических измерений со сверхбольшой базой в целях поиска в звездных системах планет, сходных с Землей.

Реализованные и планируемые к осуществлению проекты полетных схем с использованием коллинеарных точек либрации на базе орбит типа Лиссажу, т.е. возмущенных ляпуновских орбит (плоских гало-орбит) с кратным соотношением частот обращения в плоскости эклиптики и по вертикали к ней, включают осуществление одноимпульсных переходов. Следует, однако, отметить, что принципиальная возможность таких переходов имеется только при выведении КА на гало-орбиты достаточно большого радиуса с амплитудой по оси ординат порядка 600 000 км, что в значительной степени ограничивает область применения указанных схем при исследовании космического пространства.

При амплитуде менее 600 000 км периоды обращения КА по орбите Лиссажу в плоскости эклиптики и в ортогональной ей плоскости, не совпадают. Выведение на такие орбиты проводится за счет использования гравитационного поля Луны для изменения положения перицентра высокоэллиптической орбиты с последующим перелетом в окрестность точки либрации. Однако если в некоторой планетной системе отсутствует спутник, подобный Луне, гравитационное поле которого можно было бы использовать для выполнения пертурбационного маневра, способ теряет универсальность и не может быть реализован. В этом усматривается его значительный недостаток с точки зрения практического применения, особенно в свете возможностей осуществления длительных межпланетных пилотируемых полетов.

Разработка теории и методов расчета двухимпульсных межорбитальных перелетов на основе использования гало-орбит и орбит

F-класса дала, однако, основание считать ситуацию не столь уж бесперспективной. В работах [1, 2] было показано, что для выведения КА на гало-орбиты и орбиты F-класса могут быть использованы двухимпульсные перелеты с низких околоземных орбит ожидания с суммарным импульсом характеристической скорости, заметно меньшим, чем его требуемое значение для выведения КА на параболические траектории с круговых орбит ожидания того же радиуса.

Исследованные варианты использования в качестве орбит перелета при двухимпульсных переходах транзитных орбит из окрестности точек либрации оказались свободными как от первого из существующих ограничений — по высоте реализуемой гало-орбиты, так и от второго — необходимости использования гравитационного поля четвертого тела, напрямую не учитываемого при формировании требуемых характеристик движения.

Не меньший интерес представляют полетные схемы с использованием орбит, проходящих в окрестности коллинеарных точек либрации, и применительно к осуществлению межпланетных пилотируемых полетов.

Это связано с проблемой создания и длительного удержания в соответствующей точке либрации космической станции (КС) в виде орбитальной базы обслуживания. Расположение такой КС в точке L_1 приведет к возможности ее длительного удержания в окрестности этой точки при минимальных энергетических затратах. Причем это касается не только пилотируемого полета на Марс. В последние годы в мире наблюдается, как известно, оживление лунных амбиций с привлечением новых заинтересованных стран, таких как Китай и Индия.

Хотя коллинеарная точка Лагранжа L_1 системы грависфер Земля–Луна (расстояние от Земли ~ 330 тыс. км) относится к числу неустойчивых, удержание в ее окрестности (сфере радиуса ~ 15 км) КС, масса которой имеет порядок от 12 до 13 т, в течение одного года может быть обеспечено за счет потребного суммарного импульса характеристической скорости всего лишь порядка 20 м/с.

Определенный практический интерес может представлять и исследование треугольных точек либрации системы Земля–Луна при решении задач создания перспективной системы контроля космического пространства, а также обслуживания земной и лунной поверхностей.

Под обслуживанием в рассматриваемом контексте понимается возможность наблюдения некоторых областей пространства или поверхности с допустимостью решения в их пределах каких-либо целевых задач. Если даже ограничиться применением сугубо геометрического подхода, нетрудно показать, что в случае размещения КА в треугольных точках либрации L_4 и L_5 оказывается возможным обслуживание

земной поверхности в пределах от 65 до 98 %, а поверхности Луны при любых условиях — свыше 98 %, в том числе и ее обратной стороны.

Более сложным оказывается анализ условий и областей неустойчивости движения КА, предварительно помещенного в треугольную точку либрации с нулевой относительной скоростью. Из ранее выполненных работ Н.Ф. Аверкиева и других следует, что возникающий под действием возмущений дрейф КА носит периодический характер с периодичностью удаления/сближения, равной примерно четырем годам. Причем, при достижении максимального удаления от номинального начального положения, составляющего около 190 000 км (при минимальном — порядка 24 000 км), КА начинает двигаться по почти замкнутой орбите с периодом, близким к одному синодическому месяцу.

В свете изложенного, рассмотрение основ построения баллистического обеспечения (БО) экспедиций освоения дальнего космоса с использованием орбит, проходящих в окрестностях точек либрации, представляется весьма актуальным. При этом поиск результата должен быть ориентирован как на БО этапа баллистического проектирования, так и на БО оперативного управления полетом.

Исходная постановка задачи. Строго говоря, создание теоретических основ соответствующего обеспечения вполне укладывается в рамки ограниченной задачи трех тел. Однако в целях повышения общности результатов решения обсуждаемой задачи и возможности его использования в задачах оперативного управления полетом, расширим задачу до постановки, соответствующей общей задаче трех тел.

Для этого рассмотрим общую или неограниченную задачу трех тел – задачу о движении системы, состоящей из трех материальных точек с произвольными конечными массами, взаимно притягивающимися по закону Ньютона, а потом перейдем к частному случаю этой задачи – ограниченной задаче трех тел. Пусть в некоторой абсолютной системе координат с неизменными направлениями осей дифференциальные уравнения движения имеют следующий вид ($i = 0, 1, 2$):

$$m_i \ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \quad (1)$$

где U — полная силовая функция, определяется формулой

$$U = f \left(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} \right), \quad (2)$$

где $\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2}$ — взаимное расстояние между точками M_i и M_j массами m_i и m_j ($i, j = 0, 1, 2$), причем ясно, что $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$.

Уравнения абсолютного движения системы, состоящей из любого числа взаимно притягивающихся материальных точек, допускают де-

суть первых интегралов. При этом интегралы движения центра масс трех точек

$$\begin{aligned}
 m_0\dot{\xi}_0 + m_1\dot{\xi}_1 + m_2\dot{\xi}_2 &= a_1, \\
 m_0\dot{\eta}_0 + m_1\dot{\eta}_1 + m_2\dot{\eta}_2 &= a_2, \\
 m_0\dot{\zeta}_0 + m_1\dot{\zeta}_1 + m_2\dot{\zeta}_2 &= a_3, \\
 m_0\xi_0 + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 &= a_1t + b_1, \\
 m_0\eta_0 + m_1\eta_1 + m_2\eta_2 &= a_2t + b_2, \\
 m_0\zeta_0 + m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 &= a_3t + b_3,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

показывают, что центр масс (или центр инерции) системы G движется относительно абсолютной системы координат осей $O\xi\eta\zeta$ прямолинейно и равномерно (рис. 1).

Интегралы площадей, или интегралы сохранения момента количества движения системы:

$$\begin{aligned}
 m_0(\eta_0\dot{\zeta}_0 - \zeta_0\dot{\eta}_0) + m_1(\eta_1\dot{\zeta}_1 - \zeta_1\dot{\eta}_1) + m_2(\eta_2\dot{\zeta}_2 - \zeta_2\dot{\eta}_2) &= c_1, \\
 m_0(\zeta_0\dot{\xi}_0 - \xi_0\dot{\zeta}_0) + m_1(\zeta_1\dot{\xi}_1 - \xi_1\dot{\zeta}_1) + m_2(\zeta_2\dot{\xi}_2 - \xi_2\dot{\zeta}_2) &= c_2, \\
 m_0(\xi_0\dot{\eta}_0 - \eta_0\dot{\xi}_0) + m_1(\xi_1\dot{\eta}_1 - \eta_1\dot{\xi}_1) + m_2(\xi_2\dot{\eta}_2 - \eta_2\dot{\xi}_2) &= c_3
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

определяют плоскость Лапласа, проходящую через центр масс перпендикулярно к вектору $C = (c_1, c_2, c_3)$, которая сохраняет неизменную ориентацию относительно абсолютных осей.

Интеграл живых сил, или интеграл энергии,

$$\frac{1}{2}m_0(\dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2 + \dot{\zeta}_0^2) + \frac{1}{2}m_1(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2 + \dot{\zeta}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\zeta}_2^2) = U + h
 \tag{5}$$

представляет собой закон сохранения энергии для рассматриваемой системы.

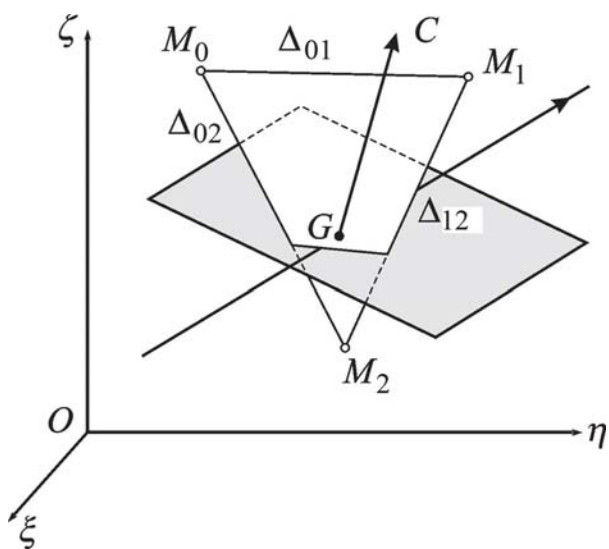


Рис. 1. Движение центра масс G системы относительно абсолютной системы координат $O\xi\eta\zeta$

Десять первых интегралов (3)–(5) позволяют понизить порядок системы (1) на десять единиц, но в обычной практике порядок системы понижают на шесть единиц при помощи интегралов (3).

Уравнения движения в координатах Якоби. Понизить порядок системы (1) на шесть единиц можно при помощи преобразования Якоби. В этом преобразовании движение точки M_1 относится к системе координат с началом в точке M_0 , а движение точки M_2 — к системе координат с началом в центре масс G_1 двух точек M_0 и M_1 . Оси обеих систем сохраняют неизменные направления и соответственно параллельны осям абсолютной системы координат. В таком случае уравнения движения в координатах Якоби имеют вид

$$\begin{aligned} m'_1 \ddot{x}'_1 &= \frac{\partial U}{\partial x'_1}, & m'_1 \ddot{y}'_1 &= \frac{\partial U}{\partial y'_1}, & m'_1 \ddot{z}'_1 &= \frac{\partial U}{\partial z'_1}; \\ m'_2 \ddot{x}'_2 &= \frac{\partial U}{\partial x'_2}, & m'_2 \ddot{y}'_2 &= \frac{\partial U}{\partial y'_2}, & m'_2 \ddot{z}'_2 &= \frac{\partial U}{\partial z'_2} \end{aligned} \quad (6)$$

где U — та же силовая функция, что и в системе (1), а m'_1 и m'_2 — приведенные массы, определяемые формулами

$$m'_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \quad m'_2 = \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Взаимные расстояния Δ_{ij} в координатах Якоби определяются следующими соотношениями:

$$\Delta_{01}^2 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2;$$

$$\begin{aligned} \Delta_{02}^2 &= \left(x'_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} x'_1 \right)^2 + \\ &+ \left(y'_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} y'_1 \right)^2 + \left(z'_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} z'_1 \right)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^2 &= \left(x'_2 + \frac{m_0}{m_0 + m_1} x'_1 \right)^2 = \\ &+ \left(y'_2 + \frac{m_0}{m_0 + m_1} y'_1 \right)^2 + \left(z'_2 + \frac{m_0}{m_0 + m_1} z'_1 \right)^2. \end{aligned}$$

Относительные координаты в этом случае выражаются через координаты Якоби как

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1, & x_2 &= x'_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} x'_1, \\ y_1 &= y'_1, & y_2 &= y'_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} y'_1, \\ z_1 &= z'_1, & z_2 &= z'_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} z'_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Четыре первых интеграла системы (6) имеют такой же вид, как и интегралы уравнений абсолютного движения, и тогда

$$\begin{aligned} m'_1(y'_1\dot{z}'_1 - z'_1\dot{y}'_1) + m'_2(y'_2\dot{z}'_2 - z'_2\dot{y}'_2) &= c'_1; \\ m'_1(z'_1\dot{x}'_1 - x'_1\dot{z}'_1) + m'_2(z'_2\dot{x}'_2 - x'_2\dot{z}'_2) &= c'_2; \\ m'_1(x'_1\dot{y}'_1 - y'_1\dot{x}'_1) + m'_2(x'_2\dot{y}'_2 - y'_2\dot{x}'_2) &= c'_3; \\ \frac{1}{2}m'_1(\dot{x}'_1{}^2 + \dot{y}'_1{}^2 + \dot{z}'_1{}^2) + \frac{1}{2}m'_2(\dot{x}'_2{}^2 + \dot{y}'_2{}^2 + \dot{z}'_2{}^2) &= U + h', \end{aligned} \quad (10)$$

где m'_1 и m'_2 – приведенные массы, определяемые формулами (7).

В развернутом виде уравнения (6) записываются с учетом дифференцирования силовой функции U по координатам x'_1 и x'_2 . Используя формулы для взаимных расстояний (8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x'_1} &= -f \frac{m_0 m_1 x'_1}{\Delta_{01}^3} - f \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3} \cdot \frac{m_1}{\sigma_1} \left(x'_2 + \frac{m_1}{\sigma_1} x'_1 \right) + \\ &+ f \frac{m_1 m_2 m_0}{\Delta_{12}^3} \frac{1}{\sigma_1} \left(x'_2 + \frac{m_0}{\sigma_1} x'_1 \right), \\ \frac{\partial U}{\partial x'_2} &= -f \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3} \left(x'_2 + \frac{m_1}{\sigma_1} x'_1 \right) - f \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}^3} \left(x'_2 - \frac{m_0}{\sigma_1} x'_1 \right). \end{aligned}$$

После замены

$$\begin{aligned} r'_1 &= \Delta_{01}, \quad \mu_1 = f(m_0 + m_1), \quad \mu'_1 = \frac{f m_2}{m_0 + m_1}, \\ \mu''_1 &= f m_2, \quad \mu'_2 = \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1}, \end{aligned}$$

уравнения (6) приобретают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_1 &= -\frac{\mu_1 x'_1}{r_1'^3} - \mu'_1 x'_1 \left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu''_1 x'_1 \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right); \\ \ddot{y}'_1 &= -\frac{\mu_1 x'_1}{r_1'^3} - \mu'_1 y'_1 \left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu''_1 y'_1 \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right); \\ \ddot{z}'_1 &= -\frac{\mu_1 z_1}{r_1'^3} - \mu'_1 z'_1 \left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu''_1 z'_1 \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_1 &= -m'_1 \mu'_2 x'_1 \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} + \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu'_2 x'_2 \left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3} \right); \\ \ddot{y}'_1 &= -m'_1 \mu'_2 y'_1 \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} + \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu'_2 y'_2 \left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3} \right); \\ \ddot{z}'_1 &= -m'_1 \mu'_2 z'_1 \left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} + \frac{1}{\Delta_{12}^3} \right) - \mu'_2 z'_2 \left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдем далее к ограниченной задаче трех тел, достаточной для получения решения первого приближения, т.е. создания БО этапа проектной баллистики.

Рассматривая уравнения движения в координатах Якоби (6) или в виде (11), (12) и полагая в них массу третьего тела $m_2 = 0$, получаем, что эти уравнения приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_1 &= \frac{\partial U_1}{\partial x'_1}, & \ddot{y}'_1 &= \frac{\partial U_1}{\partial y'_1}, & \ddot{z}'_1 &= \frac{\partial U_1}{\partial z'_1}; \\ \ddot{x}'_2 &= \frac{\partial U_2}{\partial x'_2}, & \ddot{y}'_2 &= \frac{\partial U_2}{\partial y'_2}, & \ddot{z}'_2 &= \frac{\partial U_2}{\partial z'_2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$U_1 = \frac{f(m_0 + m_1)}{\Delta_{01}}, \quad U_2 = f\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}} + \frac{m_1}{\Delta_{12}}\right). \quad (14)$$

Интегралы (10) при $m_2 = 0$ записываются в форме

$$\begin{aligned} y'_1 z'_1 - z'_1 y'_1 &= \bar{c}'_1, & z'_1 x'_1 - x'_1 z'_1 &= \bar{c}'_2, & x'_1 y'_1 - y'_1 x'_1 &= \bar{c}'_3; \\ \frac{1}{2} (\dot{x}'_1{}^2 + \dot{y}'_1{}^2 + \dot{z}'_1{}^2) &= U_1 + \bar{h}'. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, уравнения (14) определяют движение точки M_1 по отношению к точке M_0 так же, как и в случае отсутствия точки M_2 . Уравнения (15) в данном случае — это интегралы площадей и живых сил кеплеровской задачи. В связи с этим, уравнения (13) могут быть полностью проинтегрированы, а координаты \dot{x}'_1 , \dot{y}'_1 , \dot{z}'_1 становятся известными функциями времени, начальные значения x'_{10} , y'_{10} , z'_{10} , \dot{x}'_{10} , \dot{y}'_{10} , \dot{z}'_{10} которых являются произвольными постоянными этой задачи. Вместо начальных значений координат и составляющих скорости точки M_1 представляется возможным ввести кеплеровские элементы орбиты, которая может представлять собой любое из конических сечений в зависимости от знака постоянной энергии кеплеровского движения \bar{h}' . Если же координаты точки M_1 — известные функции времени, то силовая функция U_2 в уравнениях (13) — также известная функция времени t и координат x'_2 , y'_2 , z'_2 точки M_2 . Поэтому уравнения (13) определяют движение точки малой массы M_2 под действием притяжения двух центров, один из которых неподвижен, а другой движется вокруг этого неподвижного центра по кривой второго порядка.

Как следует из существования интегралов площадей общей задачи трех тел, движение точки M_1 вокруг точки M_0 происходит в неизменной плоскости, проходящей через M_0 перпендикулярно к вектору момента количества движения точки M_1 , составляющие которого равны \bar{c}'_1 , \bar{c}'_2 , \bar{c}'_3 . Поскольку выбор неизменных направлений осей систем координат Якоби $M_0 x'_1 y'_1 z'_1$ и $G x'_2 y'_2 z'_2$ произволен, то удобно

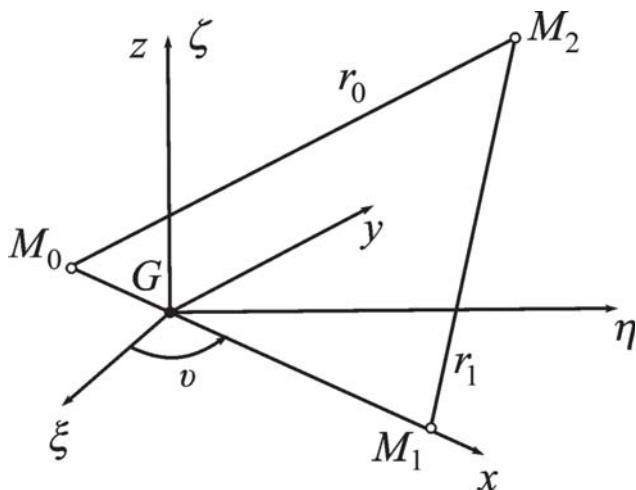


Рис. 2. Схема движения материальных тел с массами M_0, M_1, M_2 относительно системы координат $G\xi\eta\zeta$

выбрать эти направления так, чтобы оси аппликат обеих систем были перпендикулярны к упомянутой плоскости.

Пусть $G\xi\eta\zeta$ — система координат, в плоскости $\xi\eta$ которой движется точка M_1 (рис. 2). Уравнения движения точки бесконечно малой массы M_2 будут иметь такой же вид, как и уравнения (13), и дифференциальные уравнения задачи могут быть записаны так:

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \ddot{\eta} = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \ddot{\zeta} = \frac{\partial W}{\partial \zeta}, \quad (16)$$

где

$$W = f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right), \quad (17)$$

а взаимные расстояния задаются соотношениями

$$\begin{aligned} r_0^2 &= (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \zeta^2; \\ r_1^2 &= (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2; \\ (\zeta_0 &= \zeta_1 = 0), \end{aligned} \quad (18)$$

где ξ_0, η_0 и ξ_1, η_1 — координаты точек M_0 и M_1 в системе $G\xi\eta\zeta$.

Эти координаты определяются как

$$\begin{aligned} (m_0 + m_1) \xi_0 &= -m_1 r \cos v, & (m_0 + m_1) \eta_0 &= -m_1 r \sin v; \\ (m_0 + m_1) \xi_1 &= -m_0 r \cos v, & (m_0 + m_1) \eta_1 &= -m_0 r \sin v, \end{aligned} \quad (19)$$

где $r = M_0M_1$ — радиус-вектор точки M_1 ; v — угол, образуемый радиусом-вектором с положительным направлением оси $G\xi$.

Величины r и v являются известными функциями времени, определяемыми формулами кеплеровского движения. При этом орбита точки M_1 (в плоскости $G\xi\eta$), задаваемая уравнением

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (20)$$

может быть окружностью ($e = 0$), эллипсом ($e < 1$), параболой ($e = 1$) или гиперболой ($e > 1$), в зависимости от значения начальной скоро-

сти точки M_1 по отношению к точке M_0 . В дальнейшем будем рассматривать случаи кругового и эллиптического движений основных тел относительно друг друга.

Перейдем в уравнениях (16) от неподвижной системы осей $G\xi\eta\zeta$ к вращающейся вокруг оси так, чтобы новая ось абсцисс всегда проходила через точки M_0 и M_1 . Обозначая координаты точки M_2 в новой системе координат как x, y, z , получаем следующие формулы, связывающие старые и новые координаты:

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos v - y \sin v; \\ \eta &= x \sin v + y \cos v; \\ \zeta &= z,\end{aligned}\tag{21}$$

где v есть тот же угол, что и в формуле (20), т.е. истинная аномалия кеплеровского движения точки M_1 (см. рис. 2).

Координаты точки M_2 во вращающейся системе координат определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{v}\dot{y} - \dot{v}^2x - \ddot{v}y &= \frac{\partial W}{\partial x}; \\ \ddot{y} - 2\dot{v}\dot{x} - \dot{v}^2y - \ddot{v}x &= \frac{\partial W}{\partial y}; \\ \ddot{z} &= \frac{\partial W}{\partial z}.\end{aligned}\tag{22}$$

Силовая функция W задается формулой (17), но расстояния r_0 и r_1 ввиду (21) описываются зависимостями

$$\begin{aligned}r_0^2 &= (x - x_0)^2 + y^2 + z^2; \\ r_1^2 &= (x - x_1)^2 + y^2 + z^2,\end{aligned}\tag{23}$$

где

$$x_0 = -\frac{m_1 r}{m_0 + m_1}, \quad x_1 = -\frac{m_0 r}{m_0 + m_1}.\tag{24}$$

Далее, так как $r^2\dot{v} = c = \text{const}$, имеем

$$\dot{v} = \frac{c}{p^2} (1 + e \cos v)^2, \quad \ddot{v} = -\frac{2c^2 e}{p^4} (1 + e \cos v)^3.\tag{25}$$

Если, в частности, орбита точки M_1 — окружность радиуса a , то $e = 0$, $\dot{v} = \frac{c}{a^2} = n$, $\ddot{v} = 0$ и координаты x_0, x_1 точек M_0 и M_1 — постоянные величины:

$$x_0 = -\frac{m_1 a}{m_0 + m_1}, \quad x_1 = -\frac{m_0 a}{m_0 + m_1}.\tag{26}$$

В этом случае уравнения (22) превращаются в уравнения движения ограниченной круговой задачи трех тел и могут быть записаны в

следующем виде:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}; \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}; \\ \ddot{z} &= \frac{\partial\Omega}{\partial z},\end{aligned}\tag{27}$$

где

$$\Omega = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + W\tag{28}$$

зависит только от координат точки M_2 , а следовательно, не зависит явно от времени. Из этого, в свою очередь, следует, что система (27) имеет один первый интеграл, аналогичный интегралу живых сил в неограниченной задаче — интеграл Якоби.

Чтобы получить этот интеграл непосредственным путем, умножим уравнения (27) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$, сложим и проинтегрируем, что даст

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n^2(x^2 + y^2) + 2f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right) + 2h\tag{29}$$

или

$$V^2 = 2\Omega + 2h,\tag{30}$$

где h — произвольная постоянная, полностью определяемая начальным положением и начальной скоростью точки M_1 ; $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ — относительная скорость точки M_1 .

На основе приведенных ранее соотношений оказывается возможным осуществить анализ допустимых движений КА в ограниченной задаче трех тел.

При решении задач создания БО марсианских полетов наиболее удобным является использование так называемой сферы влияния М.Д. Кислика для Земли, применение которой выгоднее с баллистической точки зрения при “склеивании” геоцентрических и гелиоцентрических участков траекторий межпланетного перелета. В этом случае ошибки определения параметров траектории при переходе от одного притягивающего центра к другому оказываются в среднем минимальными. Однако при решении достаточно большого круга обобщенных задач часто используют классическую сферу Хилла, что и послужило основанием для предпочтения последнего варианта.

Выражение для интеграла Якоби, записанное для круговой ограниченной задачи трех тел,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega(x, y) - C\tag{31}$$

дает возможность установить области на плоскости xy , где может иметь место движение тела бесконечно малой массы с заданными начальными условиями. Такого рода исследования основываются на том, что значение левой части уравнения (31) всегда положительно. Поэтому для заданных начальных условий можно вычислить значение постоянной Якоби C и затем с помощью кривой $2\Omega(x, y) = C$ установить область возможного движения, в частности найти следующие свойства функции $\Omega(x, y)$:

1. $\Omega(x, y) \geq 3/2$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Omega(x, y) = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \Omega(x, y) = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \Omega(x, y) = \infty,$$

$$\Omega(x, y) = \Omega(x, -y);$$

2. Абсолютные минимумы функции $\Omega(x, y)$ достигаются в точках L_4 и L_5 ; коллинеарные точки равновесия являются седловыми точками;

3. Наклон кривых нулевой скорости определяется отношением $S = \Omega_x / \Omega_y$ за исключением коллинеарных точек, для которых $S = \pm (-\Omega_{xx} / \Omega_{yy})^{1/2}$;

4. Минимумы функции $\Omega(x, 0)$ достигаются в коллинеарных точках;

5. $1,5 = \Omega(L_{4,5}) \leq \Omega(L_3) \leq \Omega(L_2) \leq \Omega(L_1) \leq 2,125$.

Области возможных движений в задаче двух тел. Кривые $\Omega(x, y) = \text{const}$ определяют различные области возможного движения, так как эта существенно положительная функция связана с существенно положительной величиной — квадратом относительной скорости — посредством интеграла Якоби.

Рассмотрим силовую функцию

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2} [(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \quad (32)$$

При $\mu = 0$, т.е. для задачи двух тел, существует только одно притягивающее тело единичной массы, поэтому

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2r_1^2} + \frac{1}{r_1}, \quad (33)$$

где $r_1 = r$ — расстояние между третьей массой и основным телом единичной массы, расположенным в начале координат.

Кривые $\Omega(x, y) = \text{const}$ представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат.

Интеграл Якоби принимает вид

$$v^2 = r^2 + 2/r - C. \quad (34)$$

Рассмотрим теперь движение с начальными условиями $v = v_0$ и $r = r_0$. Постоянная Якоби этого движения согласно уравнению (34)

равна

$$C_0 = r_0^2 + 2/r_0 - v_0^2. \quad (35)$$

Радиус окружности нулевой скорости, соответствующий этому значению C_0 , определяется из решения уравнения

$$C_0 = r_0^2 + 2/r_0 = r^2 + 2/r, \quad (36)$$

которое следует из уравнения (34). Это уравнение, разрешенное относительно r (если существует действительное положительное решение), дает радиус окружности нулевой скорости, принадлежащей выбранным начальным условиям. Обозначив этот радиус через r_z , получим из уравнений (35) и (36)

$$r_z^2 + 2/r_z = r_0^2 + 2/r_0 - v_0^2. \quad (37)$$

Соотношение (37) связывает начальные условия (обозначенные индексом 0) с радиусом окружности нулевой скорости (обозначенным индексом z).

Интеграл Якоби (34) связывает переменные (в данном случае r и v) при заданном значении C (в данном случае C_0) в любой момент времени соотношением

$$v^2 = r^2 + 2/r - C_0 \quad (38)$$

или

$$v^2 = r^2 + 2/r - r_z^2 - 2/r_z; \quad (39)$$

здесь r — любое расстояние от начала координат, а r_z — радиус кривой нулевой скорости. Поскольку $v^2 \geq 0$, то должно иметь место выполнение условия

$$r_0^2 + 2/r - (r_z^2 + 2/r_z) \geq 0, \quad (40)$$

где равенство достигается в случае $r = r_z$, т.е. при $v = 0$, когда масса находится на своей собственной кривой нулевой скорости. Те значения r , для которых удовлетворяется неравенство (40), соответствуют действительным значениям скорости. И, таким образом, для получения границ области возможных движений нужно найти решение кубического уравнения

$$r_z^3 - C_0 r_z + 2 = 0. \quad (41)$$

При этом положительные решения задают радиусы окружностей нулевых скоростей, определяемых значением C . Кольцо, ограниченное двумя окружностями радиусов r_l и r_s будет областью возможного движения в задаче двух тел.

Любая движущаяся масса имеет свою собственную постоянную Якоби и свои собственные кривые скорости, а значит, и свои собственные области возможного движения.

В случае, когда кубическое уравнение (41) не имеет положительных корней, это означает, что масса изначально имеет такую энергию, что не существует ограничивающих окружностей нулевой скорости.

Области возможных движений в ограниченной задаче трех тел.

Поведение функции

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2} [(1 - \mu) r_1^2 + \mu r_2^2] + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (42)$$

в области $0 \leq \mu \leq 1/2$ определяет области движения. Кривые нулевой скорости (или линии уровня функции Ω , или, что то же самое, эквипотенциальные кривые), задаваемые уравнением $2\Omega - C = 0$, можно изобразить на плоскости xy для разных значений μ . Эти системы кривых (каждая система соответствует одному фиксированному значению μ) можно использовать, чтобы представить функцию $\Omega(x, y)$. Другой способ представления состоит в рассмотрении системы трехмерных диаграмм функции $z = \Omega(x, y)$ в системе координат xyz . Такое трехмерное представление обнаруживает два пика, в точках m_1 и m_2 , где $\Omega(x, y) \rightarrow \infty$. Две нижние площади, симметрично расположенные относительно оси x , в областях точек L_4 и L_5 разделяются двумя бесконечно высокими пиками, а в областях точек L_1 , L_2 и L_3 — тремя проходами или горлышками. Снаружи областей L_2 , L_3 , L_4 и L_5 , когда r_1 и r_2 неограниченно возрастают, функция Ω достаточно велика, плоскость $z = \text{const}$ пересекает только два пика, соответствующие точкам m_1 и m_2 , и наружный гребень, соответствующий $r_1, r_2 \rightarrow \infty$. Кроме того, когда $\Omega < 3/2$, постоянная Якоби $C < 3$ и кривых нулевой скорости не существует, плоскость $z = \text{const}$ располагается ниже минимумов в областях L_4 и L_5 и эквипотенциальных линий не существует.

Рассматривая сечение исследуемой функции по оси $y = 0$, можно отметить следующее. При $C > C_1$ имеется шесть пересечений кривых нулевой скорости с осью x , так как существует шесть пересечений кривых $C(x)$ с горизонтальной линией, проведенной для значения C , превышающего C_1 .

Понижая C до значения, лежащего между C_1 и C_2 , можно получить четыре пересечения; при понижении до C_2 остается три пересечения. При дальнейшем понижении C остается последовательно два, одно пересечение и, наконец, ни одного пересечения.

Как следствие, представляется возможным выделить следующие области возможных движений:

1) $C > C_1$ — движение тела малой массы возможно лишь в окрестностях одного из двух притягивающих тел либо во внешней окрестности;

2) $C_1 > C > C_2$ — открывается “горлышко” в точке либрации L_1 и становится возможным движение тела малой массы из окрестности одного основного тела в окрестность другого и наоборот, но не в бесконечность. Движение тела малой массы может быть описано устойчивым и неустойчивым многообразиями точки L_1 ;

3) $C_2 > C > C_3$ — дополнительно открывается “горлышко” и в области точки либрации L_2 . Тело малой массы может как переходить из окрестности меньшего тела в окрестность большего через окрестность точки либрации L_1 и наоборот, так и выходить во внешнюю область через окрестность точки либрации L_2 ;

4) $C_3 > C > 3/2 = C_4 = C_5$ — тело малой массы может выходить во внешнюю область тела большей массы напрямую через “горлышко” в окрестности точки либрации L_3 ;

5) $C > 3/2$ — области, в которых движение тела малой массы невозможно.

Как следует из анализа уравнений круговой задачи трех тел, точки либрации (особые точки дифференциальных уравнений задачи) располагаются в плоскости движения основных тел. Рассмотрим плоский случай уравнений движения в форме уравнений первого порядка в безразмерной вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x; \\ \dot{y} &= v_y; \\ \dot{v}_x &= 2v_y - \bar{U}_x; \\ \dot{v}_y &= -2v_x - \bar{U}_y, \end{aligned} \tag{43}$$

где x, y, v_x, v_y — соответственно координаты положения и составляющие скорости третьего тела;

$$\bar{U}(r_1, r_2) = -\frac{1}{2} [(1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2] - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

— эффективный потенциал системы.

Для определения положения точек либрации, являющихся особыми точками, правые части уравнений движения были приняты равными нулю. Таким образом, в рассматриваемом пространстве состояний (x, y, v_x, v_y) координаты точек либрации могут быть записаны в форме $(x_e, y_e, 0, 0)$, где (x_e, y_e) — особые точки функции эффективного потенциала $\bar{U}(x, y)$, представленной на рис. 3.

Треугольные точки либрации. В этом случае $y_e \neq 0$. Используя r_1, r_2 как переменные и соотношение $x^2 + y^2 = (1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2 - \mu(1 - \mu)$, запишем

$$-\bar{U}(r_1, r_2) = \frac{1}{2}(1 - \mu)r_1^2 + \frac{1}{2}\mu r_2^2 + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}. \tag{44}$$

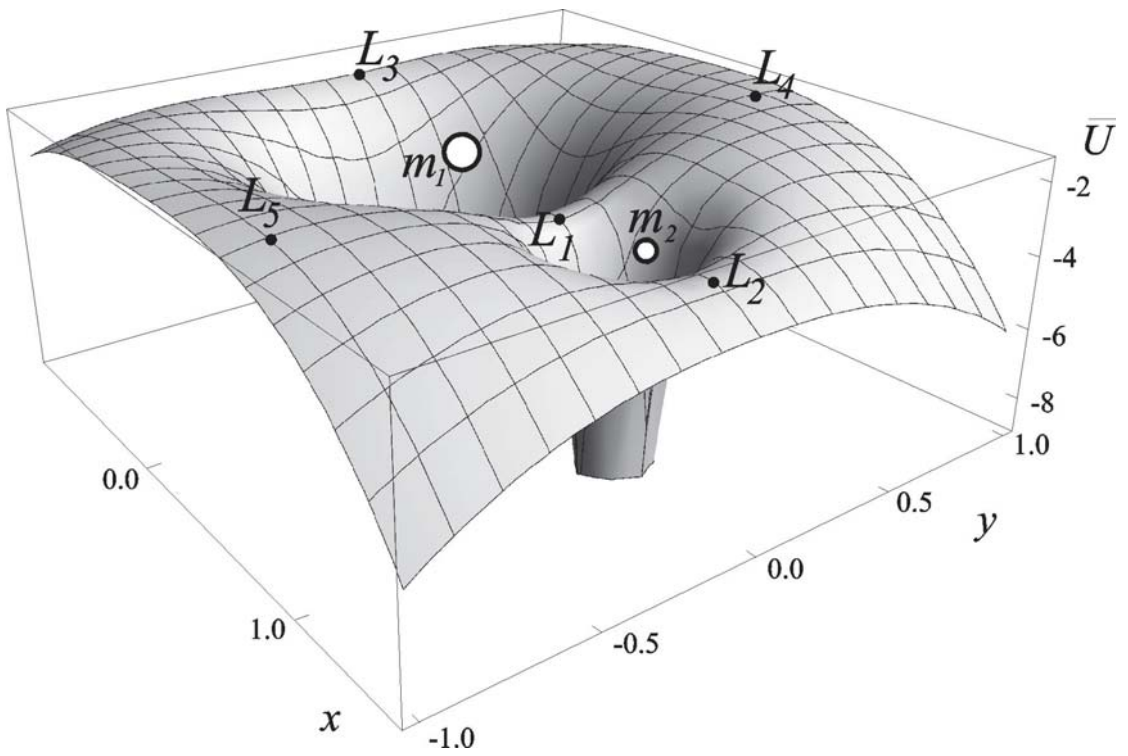


Рис. 3. Представление точек либрации в рассматриваемом пространстве состояний в виде особых точек функции эффективного потенциала

Используя подстановку переменных, можно показать, что для $y \neq 0$ $\bar{U}(r_1, r_2)$ и $\bar{U}(x, y)$ имеют одинаковые особые точки:

$$\bar{U}_x = \bar{U}_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \bar{U}_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = \bar{U}_{r_1} \frac{x + \mu}{r_1} + \bar{U}_{r_2} \frac{x - (1 - \mu)}{r_2} = 0; \quad (45)$$

$$\bar{U}_y = \bar{U}_{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \bar{U}_{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = \bar{U}_{r_1} \frac{y}{r_1} + \bar{U}_{r_2} \frac{y}{r_2} = 0. \quad (46)$$

Решая приведенную систему уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{U}_{r_1} = \mu r_2 - \frac{\mu}{r_2^2}; \\ 0 &= -\bar{U}_{r_2} = (1 - \mu) r_1 - \frac{(1 - \mu)}{r_2^2}, \end{aligned} \quad (47)$$

можно получить единственное решение $r_1 = r_2 = 1$.

Коллинеарные точки либрации. Данные точки имеют нулевую координату по оси ординат. В этом случае эффективный потенциал может быть записан в виде

$$\bar{U}(x, 0) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1 - \mu}{|x + \mu|} + \frac{\mu}{|x - 1 + \mu|}. \quad (48)$$

Можно показать, что $\bar{U}(x, 0)$ имеет ровно одну особую точку на каждом из трех интервалов оси x :

- 1) $(-\infty, -\mu)$;
- 2) $(-\mu, 1 - \mu)$;
- 3) $(1 - \mu, +\infty)$.

Вследствие того, что $\bar{U}(x, 0) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$ или $x \rightarrow -\mu$, или $x \rightarrow 1 - \mu$, а производная $\frac{d^2\bar{U}}{dx^2}(x, 0) = -1 - \frac{1 - \mu}{|x + \mu|^3} - \frac{\mu}{|x - 1 + \mu|^3}$ всегда отрицательная, функция $\bar{U}(x, 0)$ является выпуклой на каждом из интервалов. Поэтому $\bar{U}(x, 0)$ имеет ровно одну особую точку на каждом из трех интервалов оси x .

Определение уточненного положения точек либрации при решении задач БО оперативного управления полетами. Вычисление координаты x точки либрации требует определения максимума функции $\bar{U}(x, 0)$, т.е. решения уравнения пятой степени $\frac{d}{dx}\bar{U}(x, 0) = 0$.

Расстояние от $L_i, i = 1, 2$, до меньшего притягивающего тела определяет единственное положительное решение γ_i уравнения

$$\gamma^5 \pm (3 - \mu)\gamma^4 + (3 - 2\mu)\gamma^3 - \mu\gamma^2 \pm 2\mu\gamma - \mu = 0, \quad (49)$$

где верхний знак относится к γ_1 , а нижний — к γ_2 .

Сходное уравнение можно записать для определения положения точки L_3 .

Решение приведенного уравнения как разложение в ряд может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= r_h \left(1 - \frac{1}{3}r_h - \frac{1}{9}r_h^2 + \dots \right); \\ \gamma_2 &= r_h \left(1 + \frac{1}{3}r_h - \frac{1}{9}r_h^2 + \dots \right), \end{aligned} \quad (50)$$

где $r_h = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ — радиус Хилла, т.е. радиус сферы Хилла для пространственной задачи, определяющий границу области, внутри которой воздействия масс m_1 и m_2 на пассивно гравитирующее тело сравнимы. Определение координат коллинеарных точек возможно путем численного решения уравнения пятого порядка (49), либо путем использования разложений (50). В последнем случае число учитываемых членов разложения определяет точность вычисления координат и, таким образом, полученный результат может служить элементом инструментария оперативного управления полетом при осуществлении экспедиций освоения дальнего космоса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- З в я г и н Ф. В. Об оптимизации орбит перелета в окрестность точки либрации L_1 системы Солнце–Земля // Полет. – 2010. – № 4. – С. 19–24.
- З в я г и н Ф. В. Двухимпульсные перелеты на гало-орбиты в задаче трех тел / Звягин Ф.В. // Электронное научно-техническое издание “Наука и образование”. – Москва, 2012. – № 03 Режим доступа: <http://www.technomag.bmstu.ru/doc/352636.html>. Дата обращения: 21.03.2012.

Статья поступила в редакцию 22.03.2012

Лев Николаевич Лысенко окончил в 1963 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов” МГТУ им. Н.Э. Баумана, научный консультант ФГУП ЦНИИмаш Роскосмоса, заслуженный деятель науки РФ, заслуженный изобретатель РСФСР, лауреат премии президента РФ, действительный член и член Президиума Российской академии ракетных и артиллерийских наук. Автор более 300 научных работ и изобретений в области баллистики, динамики полета и управления движением ракет и космических аппаратов.

L.N. Lysenko graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1963. D. Sc. (Eng.), professor of “Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecrafts” department of the Bauman Moscow State Technical University, scientific consultant of the Federal State Unitary Enterprise TsNIImash of Roskosmos. Honored Scientist of the Russian Federation, Honored Inventor of the RSFSR, Winner of RF President Prize. Acting member and Presidium member of the Russian Academy of Rocket and Artillery Sciences. Author of more than 300 publications and inventions in the field of ballistics, flight dynamics and motion control of rockets and spacecrafts.

Феликс Валерьевич Звягин окончил в 1993 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор семи научных работ в области баллистики, динамики полета и управления движением ракет и космических аппаратов, приложений теории динамических систем.

F.V. Zvyagin graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1993. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of seven publications in the field of ballistics, flight dynamics and motion control of rockets and spacecrafts, applications of theory of dynamical systems.