

# ЭЛЕКТРОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ

УДК 530.1

## ОЦЕНКИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ КОМПОЗИТА С ДИСПЕРСНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

**В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*Проведено последовательное построение оценок диэлектрической проницаемости композита с дисперсными включениями, начиная с использования вариационной формулировки задачи электростатики для изотропной сплошной среды и завершая применением теории смесей. Вариационный подход позволил построить двусторонние оценки истинного значения диэлектрической проницаемости композита и определить наибольшую возможную погрешность значения, соответствующего полусумме полученных оценок. Использование математической модели представительного элемента структуры композита привело к расчетной зависимости с точностью до обозначений, совпадающей с некоторыми известными формулами для расчета магнитной проницаемости и теплопроводности неоднородных тел, что можно рассматривать как косвенное подтверждение адекватности этой модели. Представленные оценки позволяют прогнозировать эффективные значения диэлектрической проницаемости неоднородных материалов, в том числе композитов с заданными электрическими свойствами матрицы и дисперсных включений, в качестве которых могут быть использованы и наноструктурные элементы.*

**Ключевые слова:** композит, дисперсные включения, диэлектрическая проницаемость.

## EVALUATION OF DIELECTRIC PERMITTIVITY OF COMPOSITE WITH DISPERSED INCLUSIONS

**V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savel'eva**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*The article discusses the sequential estimation of dielectric permittivity of a composite with dispersed inclusions. The estimation process starts with using the variational formulation of the electrostatics problem for isotropic continuous medium and it finishes by applying the theory of blenders. The variational approach allows both performing two-sided estimates of the true value of dielectric permittivity for a composite and finding the maximum possible error of the value, which corresponds to the half-sum of the calculated estimates. The proposed mathematical model of the representative element of the composite structure causes the computational correspondence, which coincides with the formulae for magnetic permittivity and thermal conductivity of heterogeneous bodies, to an accuracy of notations. This fact can be considered as an explicit confirmation of the model adequacy. The presented estimates allow predicting effective values of the dielectric permittivity of heterogeneous materials including the composites with tailored matrix electric properties and dispersed inclusions, which can be used as nanostructure elements.*

**Keywords:** composite, dispersed inclusions, dielectric permittivity.

**Введение.** Композит — неоднородный материал (гетерогенное твердое тело), в котором выделяют матрицу и включения. Матрица выполняет роль связующего между включениями, свойства которых определяют область применения композита. Подбор характеристик матрицы и включений позволяет удовлетворять различным требованиям к материалам, предъявляемым при применении материалов в разных областях техники. Наряду с широким использованием композитов как конструкционного или теплозащитного материала их применяют в разнообразных электротехнических устройствах и приборах, в том числе в качестве диэлектриков. Для композита, используемого в этом качестве, одной из важнейших характеристик является относительная диэлектрическая проницаемость [1, 2], зависящая прежде всего от диэлектрических свойств матрицы и включений, а также от формы и объемного содержания включений.

Распространенный вариант структуры композитов — дисперсная система, в которой в дисперсионной среде (в таком случае — в матрице композита) распределена дисперсная фаза (включения) с сильно развитой поверхностью раздела между ними [3]. Форма дисперсных включений может быть различной. Если включения имеют близкие размеры во всех направлениях, то в первом приближении их можно рассматривать как шаровые, поскольку шар является статистически усредненной формой таких включений. Близкую к шаровой форму имеют некоторые наноструктурные элементы, которые в последнее время рассматривают как включения для композитов различного назначения [4].

Для композита с шаровыми включениями можно построить адекватные математические модели, позволяющие достаточно достоверно прогнозировать зависимость его диэлектрической проницаемости от диэлектрических характеристик включений и матрицы и от объемной концентрации включений. Наряду со смесевыми моделями, обычно используемыми при анализе дисперсных систем, целесообразно применять вариационные подходы, позволяющие получить двусторонние границы диэлектрической проницаемости композита, между которыми заключено ее истинное значение. Такие границы следуют из двойственной вариационной формулировки задачи для потенциального поля в неоднородном твердом теле [5] и дают возможность оценить наибольшую возможную погрешность, которая может возникнуть при использовании для оценки диэлектрической проницаемости композита той или иной математической модели. Эта формулировка включает в себя два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), принимающих на истинном решении задачи одинаковые экстремальные значения.

В силу аналогии между математическими формулировками задач электро- и магнитостатики рассмотренные ниже математические модели могут быть применены и для прогноза магнитной проницаемости композитов. Возможно использование изложенных ниже подходов и для оценки электропроводности неоднородной среды с шаровыми включениями. Именно электропроводности такой среды была посвящена первая известная в этом направлении работа, опубликованная К. Максвеллом в 1873 г. [6].

**Основные соотношения.** Из полной системы уравнений Максвелла [5, 7] следуют уравнения электростатики в виде [5, 8]

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (1)$$

где  $\nabla$  — дифференциальный оператор Гамильтона;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  — векторы напряженности электростатического поля и электрического смещения (электрической индукции);  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор;  $\rho_e$  — объемная плотность свободных электрических зарядов, которую в дальнейшем примем равной нулю. Первое уравнение (1) можно удовлетворить тождественно, если ввести соотношением

$$\mathbf{E} = -\nabla U \quad (2)$$

скалярный электрический потенциал  $U$ . Для изотропной среды векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  коллинеарны и связаны равенством [2, 5]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость (для вакуума  $\varepsilon = 1$ , для диэлектриков  $\varepsilon > 1$ );  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$ .

Область  $V$ , занятую композитом с дисперсными включениями, представим в виде прямого цилиндра высотой  $H$  и площадью оснований  $F$ . Боковую поверхность цилиндра примем электроизолированной, на одном из оснований зададим электрический потенциал  $U = U_H$ , а на другом —  $U = 0$ . Изотропный материал в области  $V$  полагаем неоднородным, т.е. относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(M)$  этого материала зависит от положения точки  $M \in V$  в области, занятой композитом. В этом случае из второго уравнения (1) и формул (2) и (3) при  $\rho_e(M) \equiv 0$  ( $M \in V$ ) получим дифференциальное уравнение

$$\nabla \cdot (\varepsilon(M) \nabla U(M)) = 0. \quad (4)$$

Для однозначного решения уравнения (4) в точках  $N \in S$  поверхности  $S$  области  $V$  необходимо сформулировать граничные условия. На участках  $S_U = S_H \cup S_0 \subset S$  этой поверхности, соответствующих основаниям цилиндра, заданы значения  $U(N) = U_H$  ( $N \in S_H$ ) и  $U(N) = 0$  ( $N \in S_0$ ), а на боковой поверхности  $S_* = S \setminus S_U$  —

$-\nabla U(N) \cdot \mathbf{n}(N) = 0$  ( $N \in S_*$ ), где  $\mathbf{n}(N)$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_*$  в точке  $N \in S_*$ .

Сформулированной задаче электростатики в дифференциальной форме соответствует вариационная формулировка, содержащая минимизируемый функционал [5]

$$J[U] = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(M) (\nabla U(M))^2 dV(M). \quad (5)$$

Функционал (5) допустимо рассматривать на распределениях  $U(M)$ ,  $M \in V$ , удовлетворяющих на участках  $S_U$  поверхности  $S$  области  $V$  заданным выше граничным условиям и непрерывных в замкнутой области  $\bar{V} = V \cup S$ , а в открытой области  $V$ , имеющих кусочно непрерывные производные.

Альтернативным по отношению к функционалу (5) является максимизируемый функционал [5]

$$I[\mathbf{D}] = -\frac{1}{2} \int_V \frac{(\mathbf{D}(M))^2}{\varepsilon(M)} dV(M) - U_H \int_{S_H} \mathbf{D}(N) \cdot \mathbf{n}(N) dS(N), \quad (6)$$

который допустимо рассматривать на непрерывных распределениях вектора  $\mathbf{D}(M)$ ,  $M \in V$ , удовлетворяющих дополнительным условиям  $\nabla \cdot \mathbf{D}(M) = 0$  ( $M \in V$ ) и  $\mathbf{D}(N) \cdot \mathbf{n}(N) = 0$  ( $N \in S_*$ ). Из экстремальных свойств функционалов (5) и (6) и равенства их значений на истинном решении задачи следует цепочка неравенств

$$J[U] \geq J[U^*] \geq I[\mathbf{D}], \quad (7)$$

где  $U^*(M)$ ,  $M \in \bar{V}$  — истинное распределение электрического потенциала в замкнутой области  $\bar{V}$ ), на котором функционал (5) достигает своего наименьшего значения

$$J[U^*] = \frac{U^{\circ}}{2} \int_{S^{\circ}} \varepsilon(M) \nabla U^*(M) \cdot \mathbf{n}(N) dS(N). \quad (8)$$

**Двусторонние оценки.** Используем двойственную вариационную формулировку рассмотренной выше задачи электростатики для построения двусторонних оценок диэлектрической проницаемости композита. Для этого примем достаточно простое допустимое линейное по высоте замкнутой цилиндрической области  $\bar{V}$  распределение электрического потенциала  $U(M)$ ,  $M \in \bar{V}$ . Пусть координатная ось  $Ox$  направлена перпендикулярно основаниям цилиндра, причем значение  $x = 0$  соответствует основанию  $S_0$ , а значение  $x = H$  — основанию  $S_H$ . Тогда при выборе  $U(x) = U_H x/H$  из формул (2) и (5) получим

$$J_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{U_H}{H} \right)^2 \int_V \varepsilon(M) dV(M). \quad (9)$$

Если объемную концентрацию включений в композите обозначить  $C_V$ , а диэлектрические проницаемости матрицы и включений —  $\varepsilon_m$  и  $\varepsilon_o$ , то вместо формулы (9) можно записать формулу

$$J_1 = U_H^2 F \frac{(1 - C_V)\varepsilon_m + C_V\varepsilon^o}{2H}. \quad (10)$$

В качестве допустимого распределения вектора  $D$  для функционала (6) примем постоянное значение  $D$  единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра. Значение  $D$  найдем из необходимого условия максимума функционала (6), который примет вид

$$I_1 = -D^2 \frac{FH/2}{(1 - C_V)/\varepsilon_m + C_V/\varepsilon^o} - U_H D F.$$

Тогда из условия  $dI_1/dD = 0$  найдем  $D = -U_H((1 - C_V)/\varepsilon_m + C_V/\varepsilon^o)/H$  и в итоге

$$I_1 = \frac{U_H^2 F}{2H} \left( \frac{1 - C_V}{\varepsilon_m} + \frac{C_V}{\varepsilon^o} \right). \quad (11)$$

Заменим в рассматриваемой области неоднородную среду, состоящую из матрицы и включений с различными значениями диэлектрической проницаемости, однородной средой с искомым эффективным значением  $\varepsilon^*$  диэлектрической проницаемости композита. В этом случае функционал (5) на том же самом линейном распределении электрического потенциала примет значение

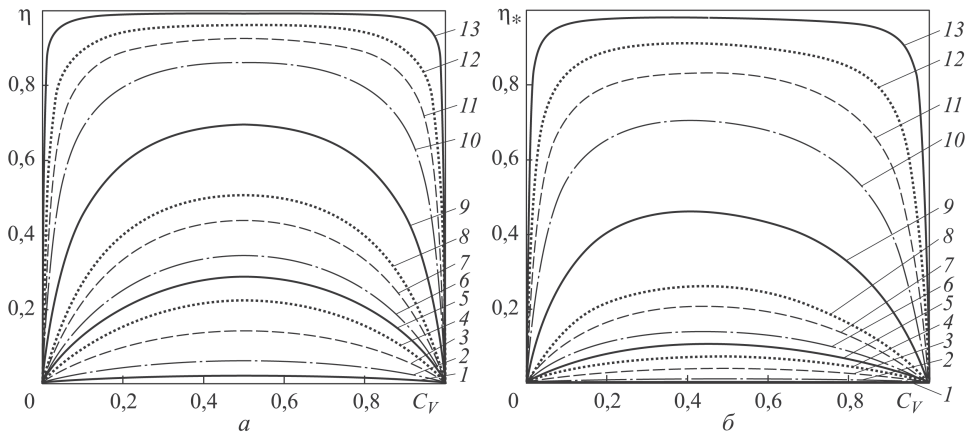
$$J_1^* = \varepsilon^* U_H^2 \frac{F}{2H}. \quad (12)$$

В соответствии с неравенствами (7) имеем  $J_1 \geq J_1^* \geq I_1$ , что с учетом формул (10)–(12) приводит к двусторонним оценкам

$$\varepsilon^+ = (1 - C_V)\varepsilon_m + C_V\varepsilon^o \geq \varepsilon^* \geq (1 - C_V)/\varepsilon_m + C_V/\varepsilon^o = \varepsilon^-, \quad (13)$$

которые не зависят от формы включений. При этом  $\varepsilon^+ = \langle \varepsilon \rangle$ , где  $\langle \varepsilon \rangle$  — среднее по объему области  $V$  значение относительной диэлектрической проницаемости.

Верхняя ( $\varepsilon^+$ ) и нижняя ( $\varepsilon^-$ ) оценки в соотношении (13) совпадают при значениях  $C_V = 0$  и  $C_V = 1$ , но при промежуточных значениях  $C_V \in (0; 1)$  разность  $\varepsilon^+ - \varepsilon^-$  возрастает по мере отклонения отношения  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^o/\varepsilon_m$  от единицы. Отношение  $\eta = (\varepsilon^+ - \varepsilon^-)/(\varepsilon^+ + \varepsilon^-)$  можно рассматривать как наибольшую возможную относительную погрешность при выборе в качестве эффективного значения диэлектрической проницаемости композита полусуммы полученных оценок. Зависимость погрешности  $\eta$  от объемной концентрации включений  $C_V$  при различных значениях  $\tilde{\varepsilon} > 1$  (кривые, построенные для пар значений  $\tilde{\varepsilon}$  и  $1/\tilde{\varepsilon}$ , совпадают) представлена на рис. 1, а. Наибольших значений



**Рис. 1.** Зависимости наибольшей возможной относительной погрешности вычисления диэлектрической проницаемости композита от объемной концентрации включений при значениях параметра  $\tilde{\varepsilon} = 1,5$  (1), 2 (2), 3 (3), 4 (4), 5 (5), 6 (6), 8 (7), 10 (8), 20 (9), 50 (10), 100 (11), 200 (12), 1000 (13), построенные по формулам (13) (а) и (14) (б)

$\eta_m = 1 - 1/(1 + (\tilde{\varepsilon} + 1/\tilde{\varepsilon} - 2)/8)$  относительная погрешность достигает при  $C_V = 0,5$ .

Вариационный подход, на основе которого можно сблизить двусторонние оценки для диэлектриков с неоднородной структурой [9], предложен в работе [10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_*^+ &= \varepsilon^+ - \frac{(\varepsilon^\circ - \varepsilon_m)^2 C_V (1 - C_V)}{(1 - C_V)\varepsilon^\circ + C_V \varepsilon_m + 2 \max\{\varepsilon^\circ, \varepsilon_m\}} \geq \varepsilon^* \geq \\ &\geq \varepsilon^+ - \frac{(\varepsilon^\circ - \varepsilon_m)^2 C_V (1 - C_V)}{(1 - C_V)\varepsilon^\circ + C_V \varepsilon_m + 2 \min\{\varepsilon^\circ, \varepsilon_m\}} = \varepsilon_*^- \end{aligned} \quad (14)$$

Такие же оценки можно получить, если использовать сингулярное приближение теории случайных функций [11].

Зависимость погрешности  $\eta_* = (\varepsilon_*^+ - \varepsilon_*^-)/(\varepsilon_*^+ + \varepsilon_*^-)$  от объемной концентрации включений  $C_V$  при различных значениях  $\tilde{\varepsilon} > 1$  (кривые для значений  $1/\tilde{\varepsilon}$  совпадают с кривыми, представленными на рис. 1, а, для величины  $\tilde{\varepsilon}$  при условии замены на абсциссе величины  $C_V$  величиной  $1 - C_V$ ) приведена на рис. 1, б. Сравнение кривых, представленных на рис. 1, а и б, показывает, что использование оценок, определяемых соотношением (14), существенно уменьшает наибольшую возможную относительную погрешность при  $0,1 < \tilde{\varepsilon} < 10$ , если в качестве эффективного значения диэлектрической проницаемости композита выбрать полусумму этих оценок. Однако при  $\tilde{\varepsilon} > 10$  и  $\tilde{\varepsilon} < 0,1$  происходит сближение значений  $\eta_*$  и  $\eta$  (при  $\tilde{\varepsilon} = 1/\tilde{\varepsilon} = 1000$  эти значения практически совпадают).

Следовательно, даже уточненные двусторонние оценки не обеспечивают заметное снижение возможной погрешности при большом от-

клонении значения  $\tilde{\varepsilon}$  от единицы. Поэтому целесообразно рассмотреть подходы, позволяющие на основе математических моделей, учитывающих форму включений и структуру композита, получить эффективное значение диэлектрической проницаемости композита.

**Представительный элемент структуры композита.** Предположим, что шаровые включения в композите не контактируют между собой, т.е. отделены друг от друга слоем материала матрицы. Композит полагаем состоящим из множества составных частиц, каждая в виде включения, окруженного шаровым слоем материала матрицы. Радиус таких частиц примем переменным от некоторого конечного до бесконечно малого, что позволяет полностью заполнить область, занятую композитом. Составную шаровую частицу произвольным радиусом  $R$  примем представительным элементом структуры рассматриваемого композита. Тогда при заданной объемной концентрации  $C_V$  включений для радиуса шарового включения получим  $R_0 = RC_V^{1/3}$ .

Поместим составную частицу в неограниченный массив однородного материала, относительная диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_1$  которого подлежит определению как эффективная характеристика композита. В центре этой частицы выберем начало сферической системы координат. Примем, что на большом расстоянии ( $r \gg R$ ) от начала координат задан вектор напряженности  $\mathbf{E}_0$  электростатического поля, направленный вдоль координатной оси, от которой происходит отсчет полярного угла  $\theta$ , т.е. при  $r \rightarrow \infty$  распределение электрического потенциала описывает функция  $U_\infty(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta$ , где  $E_0 = |\mathbf{E}_0|$ . Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа, имеющему в сферических координатах следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (15)$$

В таком случае благодаря выбранному направлению вектора  $\mathbf{E}_0$  распределение электрического потенциала не зависит от угловой координаты  $\varphi$ , т.е.  $\partial^2 U / \partial \varphi^2 \equiv 0$ .

По мере приближения к составной шаровой частице электростатическое поле в однородном материале претерпевает возмущение, также описываемое удовлетворяющим уравнению (15) слагаемым  $\Delta U(r, \theta) = -(B/r^2) \cos \theta$  [2], где  $B$  — подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, распределение электрического потенциала в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при  $r \rightarrow \infty$  и уравнению (15), описывает функция

$$U(r, \theta) = U_\infty(r, \theta) + \Delta U(r, \theta) = -(E_0 r + B/r^2) \cos \theta. \quad (16)$$

Аналогичные зависимости описывают распределения электрического

потенциала в шаровом включении

$$U^\circ(r, \theta) = \left( A^\circ r + \frac{B^\circ}{r^2} \right) \cos \theta \quad (17)$$

и в слое материала матрицы

$$U_m(r, \theta) = \left( A_m r + \frac{B_m}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (18)$$

Из равенств (16)–(18) в плоскости при  $\theta = \pi/2$  получим  $U(r, \pi/2) = U^\circ(r, \pi/2) = U_m(r, \pi/2) = 0$ , в частности  $U^\circ(0, \pi/2) = 0$ , что может быть выполнено лишь при  $B^\circ = 0$  в формуле (17). Тогда в равенства (16)–(18) будет входить четыре неизвестных коэффициента, которые необходимо найти из граничных условий на сферических поверхностях радиусами  $R_0$  и  $R$ . При  $r = R_0$  из условий непрерывности электрического потенциала и радиальной составляющей вектора электрического смещения запишем  $U^\circ(R_0, \theta) = U_m(R_0, \theta)$  и  $\varepsilon^\circ \partial U^\circ(r, \theta) / \partial r|_{r=R_0} = \varepsilon_m \partial U_m(r, \theta) / \partial r|_{r=R_0}$ . Отсюда с использованием формул (17) и (18) при  $B^\circ = 0$  определим

$$A^\circ = A_m + \frac{B_m}{R_0^3}; \quad \varepsilon^\circ A^\circ = \varepsilon_m \left( A_m - \frac{2B_m}{R_0^3} \right). \quad (19)$$

При  $r = R$  из указанных условий непрерывности с использованием формул (16) и (18) получим

$$A_m + \frac{B_m}{R^3} = - \left( E_0 + \frac{B}{R^3} \right); \quad \varepsilon_m \left( A_m - \frac{2B_m}{R^3} \right) = -\varepsilon_1 \left( E_0 - \frac{2B}{R^3} \right). \quad (20)$$

Последовательным исключением из равенств (19) и (20) трех коэффициентов  $A^\circ$ ,  $A_m$  и  $B_m$  находим

$$\frac{B}{R^3} = 3E_0 \tilde{\varepsilon}_1 \frac{2 + \tilde{\varepsilon} - (\tilde{\varepsilon} - 1)C_V}{(2\tilde{\varepsilon}_1 + 1)(2 + \tilde{\varepsilon}) - 2(\tilde{\varepsilon}_1 - 1)(\tilde{\varepsilon} - 1)C_V} - E_0, \quad (21)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 / \varepsilon_m$ . Заменим составную шаровую частицу равновеликим шаром радиусом  $R$  из однородного материала с искомой относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ . Это приведет к исчезновению возмущения в распределении электрического потенциала в окружающей такой шар материале, что равносильно условию  $B = 0$ . Это условие с учетом равенства (21) позволяет записать

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{2 + \tilde{\varepsilon} - 2(1 - \tilde{\varepsilon})C_V}{2 + \tilde{\varepsilon} + (1 - \tilde{\varepsilon})C_V}. \quad (22)$$

Адекватность математической модели, построенной с использованием введенного выше представительного элемента структуры композита, косвенно подтверждает совпадение формулы (22) с формулой Максвелла, приведенной в монографии [12]. К виду (22) также мож-



но привести формулу, полученную в работе [10] для эффективного значения магнитной проницаемости и представленную в монографии [13] без упоминания о формуле Максвелла. Соотношение (22) может быть преобразовано к виду, соответствующему формуле, полученной в работе [14] и представленной в работе [15].

**Оценка методом самосогласования.** Особенность подхода к оценке диэлектрической проницаемости композита методом самосогласования состоит в учете взаимодействия элементов структуры неоднородного материала с однородной средой, имеющей искомое значение  $\varepsilon_0$ . Последующее приравнивание нулю осредненных по объему композита возмущений распределения параметров в элементах структуры позволяет получить расчетные зависимости для величины  $\varepsilon_0$ . Определим в шаровом включении и в шаровой частице матрицы композита возмущения поля электрического потенциала относительно невозмущенного поля в однородном материале, которое описывает введенная выше функция  $U_\infty(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta$ , зависящая только от координаты  $r \cos \theta$ , направленной по оси, от которой происходит отсчет угла  $\theta$  в сферической системе координат.

Матрицу композита представим состоящей из шаровых частиц переменного радиуса, убывающего от некоторого конечного значения до бесконечно малого, что обеспечивает заполнение всех промежутков между шаровыми включениями. В сплошной шаровой частице матрицы, центр которой совпадает с началом сферической системы координат, распределение электрического потенциала, удовлетворяющее уравнению (15), описывает функция  $U'_m(r, \theta) = -A'_m r \cos \theta$ , а возмущенное поле этого потенциала в однородном материале — функция  $U'(r, \theta) = -(E_0 r + B'/r^2) \cos \theta$ . Два неизвестных коэффициента  $A'_m$  и  $B'$  должны удовлетворять сформулированным выше условиям непрерывности электрического потенциала и радиальной составляющей вектора электрического смещения на сферической поверхности частицы матрицы. В итоге получим  $A'_m = 3\varepsilon_0 E_0 / (2\varepsilon_0 + \varepsilon_m)$  и

$$\Delta U_m(r, \theta) = U'_m(r, \theta) - U_\infty(r, \theta) = \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_m} E_0 r \cos \theta. \quad (23)$$

Аналогичным путем находим возмущение поля электрического потенциала в шаровом включении, принимающее вид

$$\Delta U^o(r, \theta) = \frac{\varepsilon^o - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon^o} E_0 r \cos \theta. \quad (24)$$

Согласно формулам (23) и (24), и в шаровых частицах матрицы, и в шаровых включениях возмущение поля электрического потенциала линейно зависит от координаты  $r \cos \theta$ , от которой также линейно зависит и невозмущенное распределение  $U_\infty(r, \theta)$  этого потенциала в однородном материале с искомым значением  $\varepsilon_0$ . Поэтому векторы

напряженности возмущенных электростатических полей в частице матрицы и во включении будут иметь лишь постоянные составляющие

$$\Delta E_m = \frac{\varepsilon_o - \varepsilon_m}{2\varepsilon_o + \varepsilon_m} E_0; \quad \Delta E^o = \frac{\varepsilon_o - \varepsilon^o}{2\varepsilon_o + \varepsilon^o} E_0, \quad (25)$$

направленные по оси, от которой происходит отсчет угла  $\theta$  в сферической системе координат. Таким образом, при осреднении составляющих (25) по объему, занятому композитом, существенными являются объемные концентрации ( $C_V$ ) включений и  $(1 - C_V)$  матрицы. Согласно методу самосогласования [11, 16], результат осреднения возмущений следует приравнять нулю, т.е.  $(1 - C_V)\Delta E_m + C_V\Delta E^o = 0$ , или с учетом формул (25) при  $E_0 \neq 0$

$$(1 - C_V) \frac{\varepsilon_o - \varepsilon_m}{2\varepsilon_o + \varepsilon_m} + C_V \frac{\varepsilon_o - \varepsilon^o}{2\varepsilon_o + \varepsilon^o} = 0.$$

Это равенство приводит к квадратному уравнению относительно искомого значения  $\varepsilon_o$  для композита. Положительный корень приведенного уравнения имеет вид

$$\tilde{\varepsilon}_o = \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_m} = \frac{2 - \tilde{\varepsilon} + 3(\tilde{\varepsilon} - 1)C_V + \sqrt{(2 - \tilde{\varepsilon} + 3(\tilde{\varepsilon} - 1)C_V)^2 + 8\tilde{\varepsilon}}}{4}. \quad (26)$$

Отметим, что в таком случае осреднение по объему композита постоянных в пределах шаровых частиц матрицы и шаровых включений составляющих вектора электрического смещения и приравнивание полученного результата составляющей  $\varepsilon_o E_0$  невозмущенного векторного поля этой величины в однородном материале приводит к идентичному квадратному уравнению, положительный корень которого также определяется по формуле (26). Такое же уравнение можно получить, если осреднить возмущения векторных полей электрического смещения в указанных частицах по отношению к невозмущенному полю этой величины в однородном материале и приравнять результат нулевому вектору.

**Использование теории смесей.** Если рассматривать композит как дисперсную систему, то его эффективное значение  $\varepsilon_*$  относительной диэлектрической проницаемости можно трактовать в рамках теории смесей [17] как коэффициент пропорциональности в равенстве [2]

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \varepsilon_* \varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (27)$$

где  $\langle \mathbf{D} \rangle$  и  $\langle \mathbf{E} \rangle$  — осредненные по области  $V$ , занятой композитом, векторные поля электрического смещения и напряженности электростатического поля ( $\langle \cdot \rangle$  — операция осреднения по рассматриваемой области). Для локальных параметров в этой области имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(M) &= \langle \mathbf{D} \rangle + \delta \mathbf{D}(M); \quad \varepsilon(M) = \langle \varepsilon \rangle + \delta \varepsilon(M); \\ \mathbf{E}(M) &= \langle \mathbf{E} \rangle + \delta \mathbf{E}(M), \quad M \in V, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\delta$  — отклонение локального значения параметра от его осредненного значения, причем  $\langle \delta \mathbf{D} \rangle = \mathbf{0}$ ,  $\langle \delta \varepsilon \rangle = 0$ ,  $\langle \delta \mathbf{E} \rangle = \mathbf{0}$ .

Проведя осреднение по области  $V$  равенства (3) и опустив обозначение точки  $M \in V$ , с учетом формул (28) запишем

$$\langle \mathbf{D} \rangle / \varepsilon_0 = \langle \varepsilon \mathbf{E} \rangle = \langle (\langle \varepsilon \rangle + \delta \varepsilon)(\langle \mathbf{E} \rangle + \delta \mathbf{E}) \rangle = \langle \varepsilon \rangle \langle \mathbf{E} \rangle + \langle \delta \varepsilon \delta \mathbf{E} \rangle. \quad (29)$$

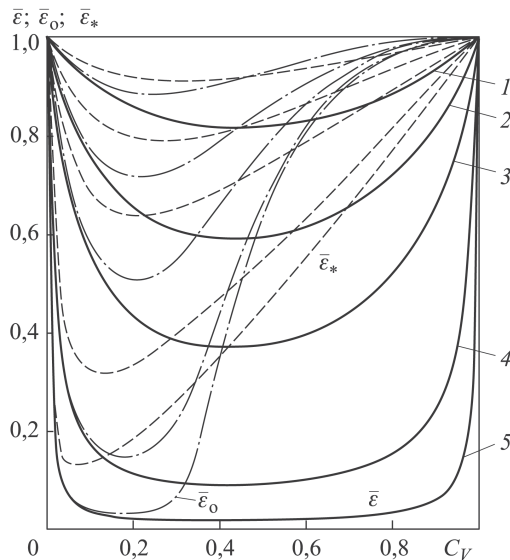
Если в правой части соотношения (29) пренебречь вторым слагаемым, то с учетом формулы (27) получим  $\varepsilon_* = \langle \varepsilon \rangle = \varepsilon^+$ , т.е. в нулевом приближении значение  $\varepsilon_*$  совпадает с верхней оценкой из соотношения (13).

Для оценки слагаемого  $\langle \delta \varepsilon \delta \mathbf{E} \rangle$  в формуле (29) можно провести осреднение по области  $V$  уравнения (1) при  $\rho_e \equiv 0$ , что позволяет записать  $3\langle \varepsilon \rangle \delta \mathbf{E} \approx -\langle \mathbf{E} \rangle \delta \varepsilon$  [2] и после умножения обеих частей этой формулы на  $\delta \varepsilon$  и осреднения по области  $V$  получить  $\langle \delta \varepsilon \delta \mathbf{E} \rangle \approx -\langle \mathbf{E} \rangle \langle (\delta \varepsilon)^2 \rangle / (3\langle \varepsilon \rangle)$ . Подстановка полученного приближенного равенства в правую часть (29) приводит с учетом (27) к оценке  $\varepsilon_* \approx (\langle \varepsilon^{1/3} \rangle)^3$  [2]. Тогда для рассматриваемого композита

$$\varepsilon_* \approx ((1 - C_V) \sqrt[3]{\varepsilon_m} + C_V \sqrt[3]{\varepsilon^o})^3. \quad (30)$$

**Сравнение полученных оценок.** Преобразованием формулы (22) можно показать, что  $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_*^-$ , т.е. оценка, полученная путем построения математической модели представительного элемента структуры композита, совпадает с определяемой соотношением (14) нижней

уточненной границей возможных значений диэлектрической проницаемости композита, установленной с использованием двойственной вариационной формулировки задачи электростатики для неоднородного твердого тела. Зависимость отношения  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_*^- / \varepsilon_*^+$  от объемной концентрации  $C_V$  включений при различных значениях параметра  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^o / \varepsilon_m > 1$  показана на рис. 2 (сплошными линиями обозначены кривые, построенные по (14); кривые для значений  $1/\tilde{\varepsilon}$  совпадают с кривыми, представленными на рис. 2, для значений  $\tilde{\varepsilon}$  при условии замены на оси абсцисс величины  $C_V$  величиной  $1 - C_V$ , т.е. величина  $C_V$  выполняет



**Рис. 2.** Зависимость отношения  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_*^- / \varepsilon_*^+$  от объемной концентрации  $C_V$  включений при значениях параметра  $\tilde{\varepsilon} = 5$  (1), 10 (2), 20 (3), 100 (4), 500 (5)

роль объемной концентрации в композите материала матрицы). Каждая кривая для фиксированного сочетания диэлектрических проницаемостей включений и матрицы композита ограничивает снизу область возможных значений относительной диэлектрической проницаемости композита, нормированных по значению  $\varepsilon_*^+$ . Ясно, что верхней границей такой области на рисунке является прямая, соответствующая значению  $\bar{\varepsilon} = 1$ .

В каждой области, соответствующей фиксированному значению  $\tilde{\varepsilon}$ , полностью расположены кривые зависимостей отношений  $\bar{\varepsilon}_o = \varepsilon_o / \varepsilon_*^+$  (штрихпунктирные линии) и  $\bar{\varepsilon}_* = \varepsilon_* / \varepsilon_*^+$  (штриховые линии) от объемной концентрации  $C_V$ , построенные по формулам (26) и (30). Характерно, что при малых значениях  $C_V$  эти кривые практически совпадают со сплошной кривой, построенной для данного значения  $\tilde{\varepsilon}$ , причем  $\bar{\varepsilon}_* > \bar{\varepsilon}_o$ . По мере возрастания концентрации  $C_V$  указанные кривые сначала расходятся, а затем сближаются. В диапазоне  $0,4 \lesssim C_V \lesssim 0,5$  расположены точки пересечения этих кривых для всех приведенных значений  $\tilde{\varepsilon}$ . При дальнейшем возрастании концентрации  $C_V$   $\bar{\varepsilon}_o > \bar{\varepsilon}_*$ , но  $\bar{\varepsilon}_* = \bar{\varepsilon}_o = 1$  при  $C_V = 1$ .

**Заключение.** Построенные на основе вариационного подхода двусторонние оценки диэлектрической проницаемости композита с дисперсными включениями позволяют установить область возможных значений этой характеристики при различных сочетаниях свойств матрицы композита и включений, а также различных значениях объемной концентрации включений. Количественный анализ расчетных зависимостей, полученных на основе модели представительного элемента структуры композита и с использованием теории смесей, показал следующее: вычисленные по этим зависимостям значения диэлектрической проницаемости расположены в соответствующих областях, ограниченных двусторонними оценками.

*Работа выполнена по грантам НШ-1432.2014.8 и МК-6573.2015.8 программ Президента РФ поддержки ведущих научных школ и молодых кандидатов наук, проекту № 1.2640.2014 в рамках реализации государственного задания, проекту № 1712 в рамках реализации государственного задания Минобрнауки РФ.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Физический энциклопедический словарь*; под ред. А.М. Прохорова. М.: Сов. энциклопедия, 1983. 928 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
3. *Политехнический словарь*; под ред. А.Ю. Ишлинского. М.: Сов. энциклопедия, 1989. 656 с.
4. *Кац Е.А.* Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Изд-во ЛКИ, 2006. 296 с.

5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
6. Maxwell C. Treatise on electricity and magnetism. Oxford, 1873.
7. Можен Ж. Механика электромагнитных сред; пер. с англ. М.: Мир, 1991. 560 с.
8. Толмачев В.В., Головин А.М., Потанов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 232 с.
9. Ермаков Г.А., Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Вычисление границ для эффективных диэлектрических проницаемостей неоднородных диэлектриков // ЖТФ. 1974. Т. 44. № 2. С. 249–255.
10. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33. P. 3125–3132. DOI: 10.1063/1.1728579
11. Шермергор Т.Д. Теория упругости микроненородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
12. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел; пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
13. Кристенсен Р. Введение в механику композитов; пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
14. Оделевский В.И. Расчет обобщенной проводимости гетерогенных систем // ЖТФ. 1951. Т. 21. № 6. С. 667–685.
15. Дутьнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Справочная книга. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
16. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 9. DOI: 10.7463/0913.0601512
17. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.

## REFERENCES

- [1] Fizicheskiy entsiklopedicheskiy slovar'. A.M. Prokhorov, ed. [Encyclopedic Dictionary of Physics]. Moscow, Sov. Entsiklopediya Publ., 1983. 928 p.
- [2] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 8. Elektrodinamika sploshnykh sred [Physical Theory. In 10 vol. Vol. 8. Electrodynamics of Continuum]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 664 p.
- [3] Politekhnikheskiy slovar'. A.Yu. Ishlinskiy ed. [Polytechnic Dictionary]. Moscow, Sov. Entsiklopediya Publ., 1989. 656 p.
- [4] Kats E.A. Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaya form i idey [Fullerenes, Carbon Nanotubes and Nanoclusters. Pedigree of Forms and Ideas]. Moscow, LKI Publ., 2006. 296 p.
- [5] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical Models of Mechanics and Electrodynamics of Continuum]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2008. 512 p.
- [6] Maxwell C. Treatise on electricity and magnetism. Oxford, 1873.
- [7] Maugin Gerard A. Continuum mechanics of electromagnetic solids. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1988.
- [8] Tolmachev V.V., Golovin A.M., Potapov V.S. Termodinamika i elektrodinamika sploshnoy sredy [Continuum Thermodynamics and Electrodynamics]. Moscow, Mos. Gos. Univ. Publ., 1988. 232 p.
- [9] Ermakov G.A., Fokin A.G., Shermergor T.D. Calculating the Boundariess for the Effective Dielectric Constants of Inhomogeneous Dielectrics. Zh. Tekh. Fiz. [Tech. Phys. The Russ. J. Appl. Phys], 1974, vol. 44, no. 2, pp. 249–255 (in Russ.).

- [10] Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, pp. 3125–3132. DOI: 10.1063/1.1728579
- [11] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Theory of Elasticity of Microinhomogeneous Media ]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
- [12] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. Oxford University Press, London, 1947.
- [13] Cristensen R.M. Mechanics of composite materials. Livermore, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley & Sons Inc., 1979.
- [14] Odelevskiy V.I. Calculation of Generalized Conductivity of Heterogeneous Systems. *Zh. Tekh. Fiz.* [Tech. Phys. The Russ. J. Appl. Phys], 1951, vol. 21, no. 6, pp. 667–685 (in Russ.).
- [15] Dul'nev G.N., Zarichnyak Yu.P. Teploprovodnost' smesey i kompozitsionnykh materialov. Sprav. Kniga [Thermal Conductivity of Composite Materials and Mixtures. Reference Book], Leningrad, Energiya Publ., 1974, 264 p.
- [16] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Estimation of the Effective Thermal Conductivity of the Composite with Spherical Inclusions by the Method of Self-Consistency. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd "Nauka I obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. Science and Education], 2013, no. 9. DOI: 10.7463/0913.0601512
- [17] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mixture Models of Composite Mechanics. P. 2. Models of Nonlinear Deforming Carbon-Based Composites. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 3, pp. 36–49 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 24.11.2014

Зарубин Владимир Степанович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области термомеханики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Zarubin V.S. — Dr. Sci. (Eng.), professor of the Applied Mathematics Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 300 publications in the field of thermal mechanics.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumannskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kuvyrkin G.N. — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of the Applied Mathematics Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the fields of applied mathematics, mathematical modelling of thermal and mechanical processes in materials and constructions.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumannskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Савельева Инга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Savel'eva I.Yu. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of the Applied Mathematics Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of non-stationary heat conduction modeling.  
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценки диэлектрической проницаемости композита с дисперсными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 3. С. 50–64.

**Please cite this article in English as:**

Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. evaluation of dielectric permittivity of composite with dispersed inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 3, pp. 50–64.