УДК 004.312, 519.7

ВЕНТИЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ОБРАТИМЫХ СХЕМ КАК МЕРА СЛОЖНОСТИ ЧЕТНЫХ ПОДСТАНОВОК

Д.В. Закаблуков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: dmitriy.zakablukov@gmail.com

Рассмотрен вопрос сложности четных подстановок через оценку вентильной сложности задающих их обратимых схем, состоящих из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT. Доказано, что все четные подстановки на множестве $\mathbb{Z}_2^n$ задаются обратимой схемой, не использующей дополнительные входы, с вентильной сложностью, эквивалентной с точность до порядка $n2^n / \log_2 n$; оставшиеся четные подстановки задаются обратимой схемой, не использующей дополнительные входы, с меньшей вентильной сложностью. Установлено, что любая четная подстановка на множестве $\mathbb{Z}_2^n$ реализуется обратимой схемой с вентильной сложностью $\lesssim 2^{n+1}$ при использовании $\sim 5 \cdot 2^n / n$ дополнительных входов. Для всех четных подстановок применение дополнительных входов позволяет снизить вентильную сложность реализующих их обратимых схем.

***Ключевые слова*:** обратимые схемы, вентильная сложность, сложность четных подстановок.

GATE COMPLEXITY OF REVERSIBLE CIRCUITS AS A MEASURE OF EVEN PERMUTATION COMPLEXITY

D.V. Zakablukov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: dmitriy.zakablukov@gmail.com

The article discusses even permutation complexities via the evaluation of the gate complexity of reversible circuits consisting of NOT, CNOT and 2-CNOT gates, which implements these permutations. It is proved that almost every even permutation on the $\mathbb{Z}_2^n$ set is implemented by the reversible circuit not using additional inputs with the gate complexity equivalent up to about $n2^n / \log_2 n$; all other even permutations are implemented by reversible circuit not using additional inputs with the less gate complexity. It is established that every even permutation on the $\mathbb{Z}_2^n$ set is implemented by the reversible circuit using $\sim 5 \cdot 2^n / n$ additional inputs with the gate complexity $\lesssim 2^{n+1}$. It is stated that for almost every even permutations the usage of additional inputs allows to decrease gate complexity of reversible circuits implementing them.

***Keywords*:** reversible circuits, gate complexity, even permutation complexity.

Введение. В дискретной математике для оценки сложности того или иного преобразования вводится мера сложности этого преобразования. В качестве меры сложности булевой функции зачастую рассматривают вентильную сложность минимальной схемы, задающей эту функцию. Впервые это было предложено К. Шенноном в работе [1], с которой берет свое начало теория схемной сложности. В настоящее

время сложность булевых функций хорошо изучена: доказаны нижняя асимптотическая оценка сложности (теорема Шеннона) и верхняя асимптотическая оценка сложности (теорема Лупанова), а также их асимптотическое равенство $2^n/n$ для булевой функции n переменных [2]. В работе [3] изучен вопрос сложности булева преобразования $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$: доказано, что сложность такого преобразования не превышает $O\left(\dfrac{n2^n}{n+\log_2 n}\right)$; доказательство проводится путем явного построения схемы, задающей это преобразование и состоящей из функциональных элементов NOT, AND и XOR.

В настоящей работе рассмотрен вопрос вентильной сложности схем, состоящих из обратимых логических вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT. Определение обратимых вентилей NOT и k-CNOT, а также обратимых схем, включающих в себя эти вентили, было изложено, например, в работе [4]. В работах [5, 6] было доказано следующее:

- вентили NOT, CNOT и 2-CNOT задают четную подстановку в схеме с $n > 3$ входами;
- множество подстановок, задаваемых вентилями NOT, CNOT и 2-CNOT с n входами, при $n \leqslant 3$ генерирует симметрическую группу $S(\mathbb{Z}_2^n)$, а при $n > 3$ — знакопеременную группу $A(\mathbb{Z}_2^n)$.

В связи с изложенным в качестве меры сложности четной подстановки предлагается рассматривать вентильную сложность задающей ее минимальной обратимой схемы, состоящей из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT.

В работах [5–13] предложены различные алгоритмы синтеза обратимых схем и в некоторых случаях дана оценка сверху вентильной сложности синтезированной схемы. Однако до сих пор не были известны строгие асимптотические оценки вентильной сложности обратимой схемы, состоящей из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT и задающей какую-либо четную подстановку из группы $A(\mathbb{Z}_2^n)$.

В настоящей работе с помощью оценки числа различных неэквивалентных обратимых схем будет доказано, что существует такая четная подстановка $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$, которая не может быть задана обратимой схемой, состоящей из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT и не использующей дополнительные входы с вентильной сложностью $\lesssim n2^{n-1}/\log_2 n$. Также будет доказано, что любая четная подстановка $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$ может быть задана обратимой схемой, включающей в себя вентили NOT, CNOT и 2-CNOT и не использующей дополнительные входы с вентильной сложностью $\lesssim 52n2^n/\log_2 n$. Будет показано, что любая четная подстановка $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$ может быть реализована обратимой схемой, состоящей из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT и использующей $\sim 5 \cdot 2^n/n$ дополнительных входов с вентильной сложностью $\lesssim 2^{n+1}$.

Основные понятия. Рассмотрим следующую модель обратимой схемы: все вентили в схеме имеют одинаковое число входов, выходы

одного вентиля напрямую соединены с входами следующего за ним вентиля. В таком случае входами обратимой схемы являются входы первого вентиля, выходами – выходы последнего вентиля.

Базовое определение обратимых вентилей NOT и k-CNOT было дано в работе [4]. Напомним, что через N_j в работе [4] обозначен вентиль NOT, инвертирующий значение на j-м входе; через $C_{i_1,\ldots,i_k;j} = C_{I;j}$ — вентиль k-CNOT (обобщенный элемент Тоффоли с k контролирующими входами), инвертирующий значение на j-м входе тогда и только тогда, когда значение на всех входах $i_1, \ldots, i_k$ равно 1; $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — множество контролирующих входов, $j \notin I$.

Любая обратимая схема с $n > 3$ входами, состоящая из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT, задает какую-либо четную подстановку на множестве $\mathbb{Z}_2^n$. При этом такая схема может *реализовывать* некоторое булево преобразование. Для того чтобы ввести определение обратимой схемы, реализующей заданное булево преобразование $\mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^m$, понадобятся отображения $\varphi_{n,n+k} : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^{n+k}$ и $\psi^{\pi}_{n+k,n} : \mathbb{Z}_2^{n+k} \to \mathbb{Z}_2^n$ вида

$$\varphi_{n,n+k}(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \langle x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0\rangle;$$
$$\psi^{\pi}_{n+k,n}(\langle x_1, \ldots, x_{n+k}\rangle) = \langle x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}\rangle, \pi \in S(\mathbb{Z}_{n+k}).$$

Назовем $\varphi_{n,n+k}$ *расширяющим* отображением; $\psi^{\pi}_{n+k,n}$ — *редуцирующим* отображением, подстановку π — перестановкой выходов.

Рассмотрим произвольную четную подстановку $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$, которая задает булево преобразование $f_h : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$. Введем определения обратимых схем, реализующих преобразование f_h либо без использования дополнительных входов, либо с использованием дополнительных входов.

Определение 1. *Обратимая схема $\mathfrak{S}_g$ реализует преобразование f_h без использования дополнительных входов (дополнительной памяти), если она имеет ровно n входов, при этом существует такая подстановка $\pi \in S(\mathbb{Z}_n)$, что задаваемое этой схемой булево преобразование $g : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$ удовлетворяет условию $\psi^{\pi}_{n,n}(g(\mathbf{x})) = f_h(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$.*

Определение 2. *Обратимая схема $\mathfrak{S}_g$ реализует преобразование f_h с использованием $k > 0$ дополнительных входов (дополнительной памяти), если она имеет $n + k$ входов, при этом существует такая подстановка $\pi \in S(\mathbb{Z}_{n+k})$, что задаваемое этой схемой булево преобразование $g : \mathbb{Z}_2^{n+k} \to \mathbb{Z}_2^{n+k}$ удовлетворяет условию $\psi^{\pi}_{n+k,n}(g(\varphi_{n,n+k}(\mathbf{x}))) = f_h(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^n$.*

Отметим, что обратимая схема $\mathfrak{S}_g$ задает преобразование f_h при $g(\mathbf{x}) = f_h(\mathbf{x})$.

Напомним некоторые понятия из анализа [2]. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — вещественные положительные функции натуральной переменной n, тогда:

• $f(n)\gtrsim g(n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что при любом $n \geqslant N$ верно неравенство $(1-\varepsilon)g(n) \leqslant f(n)$ (функция $f(n)$ *асимптотически больше или равна* функции $g(n)$);

• $f(n)\sim g(n)$, если $f(n)\gtrsim g(n)$ и $g(n)\gtrsim f(n)$ (функции $f(n)$ и $g(n)$ *асимптотически равны*, или *эквивалентны*), в настоящем случае $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$;

• $f(n)\asymp g(n)$, если $0 < c_1 < f(n)/g(n) < c_2$ (функции $f(n)$ и $g(n)$ *эквивалентны с точностью до порядка*).

Теперь можно перейти к оценке вентильной сложности обратимой схемы, состоящей из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT, задающей четную подстановку $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$.

Асимптотическая нижняя оценка вентильной сложности. Введем множество обратимых вентилей Ω_n^m, состоящее из всех вентилей NOT и k-CNOT, $k \leqslant m$, каждый из которых имеет ровно n входов.

Всего существует $(n-k)\binom{n}{k}$ различных вентилей k-CNOT, имеющих ровно n входов. Нас интересует множество Ω_n^2, состоящее из всех возможных вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT с n входами, мощность которого равна

$$|\Omega_n^2| = \sum_{k=0}^{2}(n-k)\binom{k}{n} = n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{2} = O(n^3). \quad (1)$$

В рассматриваемой модели обратимой схемы возможна ситуация, когда перестановка двух соседних вентилей схемы порождает эквивалентную ей схему (задающую такую же четную подстановку), если эти вентили *независимы*. Условия независимости двух вентилей k-CNOT были рассмотрены в работе [4].

В множестве Ω_n^2 все вентили имеют не более двух контролирующих входов, поэтому при $n \to \infty$ несколько подряд идущих вентилей могут быть попарно независимыми. Определим вероятность события, что k таких вентилей являются попарно независимыми. Примем следующее: вентиль $C_{I;t}$ независим с каждым предшествующим ему вентилем, если не существует такого вентиля $C_{I';t'}$, стоящего до рассматриваемого вентиля, что $t \in I'$ или $t' \in I$. Обозначим через P_i вероятность того, что эти условия выполняются для i-го вентиля в последовательности, $P_1 = 1$. Тогда вероятность $P(k)$ того, что k последовательно расположенных вентилей попарно независимы составляет

$$P(k) = \prod_{i=1}^{k} P_i.$$

Для вентилей NOT и CNOT вероятность P_i выше, чем для вентилей 2-CNOT, так как они имеют меньше контролирующих входов. Для указанных вентилей выше вероятность выполнения второго условия

независимости, рассмотренного ранее. Поэтому без ограничения общности при расчете $P(k)$ примем, что все вентили являются вентилями 2-CNOT.

Первый вентиль $C_{\{j_1,l_1\};t_1}$ можно выбрать любым возможным способом. При выборе второго вентиля $C_{\{j_2,l_2\};t_2}$, независимого от первого, необходимо выбрать значения j_2 и l_2 так, чтобы они не совпадали со значением t_1: всего существует $\binom{n-1}{2}$ способов выполнить это. Значение t_2 не должно совпадать со значениями j_1, l_1, j_2, l_2: всего есть $n-4$ способов выбрать значение t_2. Аналогичные рассуждения можно провести и для третьего вентиля $C_{\{j_3,l_3\};t_3}$: всего существует $\binom{n-2}{2}$ способов выбрать значения j_3 и l_3 и $n-6$ способов — значение t_3. Отсюда следует, что вероятность P_k удовлетворяет соотношению $P_k \geqslant \dfrac{(n-2k)\binom{n-k+1}{2}}{(n-2)\binom{n}{2}}$, или $P_k \geqslant \dfrac{(n-2k)(n-k+1)(n-k)}{(n-2)n(n-1)}$. Знак "$\geqslant$" означает, что в реальной схеме больше способов выбрать i-й вентиль так, чтобы он был независим с каждым предыдущим вентилем. При $k = o(n)$ и $n \to \infty$ вероятность $P_k \geqslant 1 - o(1)$, $P_k \sim 1$, тогда, и $P(k) \sim 1$. Следовательно, доля обратимых схем, состоящих из вентилей множества Ω_n^2, у которых из $k = o(n)$ подряд идущих вентилей найдется хотя бы два зависимых вентиля, стремится к нулю.

Докажем с помощью оценки числа различных неэквивалентных обратимых схем, что существует такая четная подстановка $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$, которая не может быть задана обратимой схемой, состоящей из вентилей множества Ω_n^2 и не использующей дополнительные входы с вентильной сложностью $\lesssim n2^{n-1}/\log_2 n$.

Сложность минимальной обратимой схемы, состоящей из вентилей множества Ω_n^2, не использующей дополнительные входы и задающей четную подстановку $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$, обозначим через $L(h)$. Определим функцию Шеннона $L(n) = \max\limits_{h \in A(\mathbb{Z}_2^n)} L(h)$. Аналогично рассмотрим величины $L^*(h)$ и $L^*(n)$ для обратимых схем, использующих дополнительные входы.

Теорема 1. $L(n) \gtrsim n2^{n-1}/\log_2 n$.

◀ Покажем, что имеет место неравенство $L(h) \gtrsim n2^{n-1}/\log_2 n$ почти для всех подстановок $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$. Оценим число обратимых схем, состоящих из вентилей множества Ω_n^2, которые задают различные четные подстановки на множестве $\mathbb{Z}_2^n$ и имеют вентильную сложность s. Обозначим эту величину через $C^*(n,s)$.

Если $r = |\Omega_n^2|$, то $C^*(n,s) \leqslant r^s$. Обозначим через $C(n,s)$ общее число различных, неэквивалентных обратимых схем, состоящих из вентилей множества Ω_n^2 и имеющих вентильную сложность не более s: $C(n,s) = \sum\limits_{i=0}^{s} C^*(n,i) \leqslant \dfrac{r^{s+1}-1}{r-1}$.

Обозначим через k число подряд идущих вентилей в схеме. При $k = o(n)$ и $k = o(s)$, можно утверждать на основании условия эквивалентности обратимых схем, что

$$C(n,s) \leqslant \frac{r^{s+1}-1}{(k!)^{\lfloor s/k \rfloor}(r-1)} \leqslant \frac{r^{s+1}-1}{(k!)^{(s/k)-1}(r-1)}. \qquad (2)$$

Число всех четных подстановок на множестве $\mathbb{Z}_2^n$ равно $|A(\mathbb{Z}_2^n)| = (2^n)!/2$. По формуле Стирлинга $x! \gtrsim (x/e)^x$. Оценим величину $\log_2(C(n,s)/|A(\mathbb{Z}_2^n)|)$:

$$\log_2 \frac{C(n,s)}{|A(\mathbb{Z}_2^n)|} \leqslant \log_2 \frac{2r^{s+1}}{(k!)^{(s/k)-1}(r-1)(2^n)!} \leqslant \log_2 \frac{2r^{s+1}e^{2^n+s-k}}{k^{s-k}(r-1)2^{n2^n}};$$

$$\log_2 \frac{C(n,s)}{|A(\mathbb{Z}_2^n)|} \gtrsim 1 + (s+1)\log_2 r + (2^n+s-k)\log_2 e -$$
$$-(s-k)\log_2 k - \log_2(r-1) - n2^n.$$

Согласно формуле (1), $r \leqslant n^3$: $\log_2 \dfrac{C(n,s)}{|A(\mathbb{Z}_2^n)|} \gtrsim 3s\log_2 n + 2(2^n+s-k) -$
$-(s-k)\log_2 k - n2^n$.

Выберем значение s так, чтобы выполнялось условие $\log_2(C(n,s)/|A(\mathbb{Z}_2^n)|) \leqslant -\log_2 n$. Пусть $k = n/\log_2 n$, тогда

$$3s\log_2 n + 2\left(2^n + s - \frac{n}{\log_2 n}\right) -$$
$$-\left(s - \frac{n}{\log_2 n}\right)(\log_2 n - \log_2\log_2 n) - n2^n = -\log_2 n;$$
$$s(2\log_2 n + 2 + \log_2\log_2 n) + 2^{n+1} -$$
$$-\frac{2n}{\log_2 n} + n - \frac{n\log_2\log_2 n}{\log_2 n} - n2^n = -\log_2 n;$$
$$s = \frac{n2^n + o(n2^n)}{2\log_2 n + o(\log_2 n)}.$$

Очевидно, что при таком значении s величина $\log_2(C(n,s)/|A(\mathbb{Z}_2^n)|) \to$ $\to -\infty$ при $n \to \infty$, т.е. доля четных подстановок, которые задаются обратимой схемой, состоящей из вентилей множества Ω_n^2 и не использующей дополнительные входы, с вентильной сложностью менее s, стремится к нулю.

Следует отметить, что при указанном выборе значений s и k выполняются условия $k = o(n)$, $k = o(s)$, таким образом, применение формулы (2) корректно. Тогда $s \sim n2^{n-1}/\log_2 n$, откуда следует истинность утверждения теоремы. ►

Асимптотическая верхняя оценка вентильной сложности. В работе [7] был предложен алгоритм синтеза обратимых схем, состоящих

из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT, основанный на теории групп подстановок. Было доказано, что вентильная сложность синтезированной схемы удовлетворяет соотношению

$$L(n)\lesssim 7n2^n. \tag{3}$$

Этот алгоритм основан на представлении подстановки в виде произведения пар независимых транспозиций с последующей реализацией этих пар с помощью обратимых вентилей. Если обобщить этот алгоритм для синтеза большего числа независимых транспозиций, можно получить асимптотическую верхнюю оценку сложности $L(n)$.

Теорема 2. $L(n)\lesssim 52n2^n/\log_2 n$.

◀ Покажем, что $L(h)\lesssim 52\,n2^n/\log_2 n$ для всех $h\in A(\mathbb{Z}_2^n)$. Любую подстановку $h\in A(\mathbb{Z}_2^n)$ можно представить в виде композиции непересекающихся циклов так, чтобы сумма длин этих циклов не превосходила 2^n. Для композиции двух независимых циклов верно равенство

$$\begin{aligned}(i_1,i_2,\ldots,i_{l_1})\circ(j_1,j_2,\ldots,j_{l_2}) =\\ =(i_1,i_2)\circ(j_1,j_2)\circ(i_1,i_3,\ldots,i_{l_1})\circ(j_1,j_3,\ldots,j_{l_2}),\end{aligned} \tag{4}$$

а для цикла длиной $l\geqslant 5$ — равенство

$$(i_1,i_2,\ldots,i_l)=(i_1,i_2)\circ(i_3,i_4)\circ(i_1,i_3,i_5,i_6,\ldots,i_l). \tag{5}$$

Представим подстановку h в виде композиции групп независимых транспозиций, по K транспозиций в каждой группе, и оставшейся подстановки h':

$$h=\mathop{\circ}_{\mathbf{x}_t,\mathbf{y}_t\in\mathbb{Z}_2^n}((\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)\circ\ldots\circ(\mathbf{x}_K,\mathbf{y}_K))\circ h'. \tag{6}$$

Для подстановки h' оценим число независимых циклов и их длину в разложении. Согласно формулам (4) и (5), в разложении h' нельзя получить K независимых транспозиций, если число независимых циклов строго меньше K и их длина строго меньше 5. Отсюда следует, что сумма длин циклов в разложении h' не превосходит $4(K-1)$.

Обозначим через M_g множество подвижных точек произвольной подстановки $g\in S(\mathbb{Z}_2^n)$: $M_g=\{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}_2^n|g(\mathbf{x})\neq\mathbf{x}\}$. С учетом изложенного выше, $|M_h|\leqslant 2^n$, $|M_{h'}|\leqslant 4(K-1)$.

В соответствии с формулами (4)–(6), в декомпозиции подстановки h можно получить не более $|M_h|/K$ групп, в каждой из которых K независимых транспозиций, а в декомпозиции подстановки h' — не более $|M_{h'}|/2$ пар независимых транспозиций и не более одной пары зависимых транспозиций.

Пара зависимых транспозиций $(i,j)\circ(i,k)$ выражается через произведение двух пар независимых транспозиций: $(i,j)\circ(i,k)=$ $=((i,j)\circ(r,s))\circ((r,s)\circ(i,k))$.

С учетом изложенного оценим сверху величину $L(h)$:

$$L(h) \leqslant \frac{|M_h|}{K} L(g^{(K)}) + \frac{|M_{h'}|}{2} L(g^{(2)}) + 2L(g^{(2)});$$
$$L(h) \lesssim \frac{2^n}{K} L(g^{(K)}) + 2KL(g^{(2)}), \tag{7}$$

где $g^{(i)}$ — произвольная подстановка, представляющая собой произведение i независимых транспозиций.

Для произвольной подстановки $g^{(K)}$ оценим величину $L(g^{(K)})$. Пусть $k = |M_{g^{(K)}}| = 2K$. Задание подстановки $g^{(K)}$ вентилями множества Ω_n^2 будем проводить способом, описанным в работе [7]: действием сопряжения приведем подстановку $g^{(K)}$ к подстановке определенного вида, которая задается простым способом. Действие сопряжением не меняет цикловой структуры подстановки, поэтому подстановка $g^{(K)}$ в результате действия сопряжением всегда будет оставаться композицией K независимых транспозиций.

Для подстановки $g^{(K)} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \circ \ldots \circ (\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_K)$ составим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \\ \ldots \\ \mathbf{x}_K \\ \mathbf{y}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,n} \\ a_{k,1} & \ldots & a_{k,n} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Наложим ограничение на значение k так, чтобы оно было степенью двойки: $k = 2^{\lfloor \log_2 k \rfloor}$. Если $k \leqslant \log_2 n$, то в матрице A найдется не более 2^k попарно различных столбцов. Без ограничения общности примем, что такими столбцами являются первые 2^k столбцов. Тогда для любого j-го столбца, $j > 2^k$, найдется равный ему i-й столбец, $i \leqslant 2^k$. Применив к подстановке $g^{(K)}$ действие сопряжением подстановкой, задаваемой вентилем $C_{i;j}$, можно обнулить j-й столбец матрицы A (для этого потребуется два вентиля CNOT). Повторяя указанное действие для всех столбцов с индексами больше 2^k, получаем новую подстановку $g_1^{(K)}$, для которой матрица A_1 будет иметь вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,2^k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,2^k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,2^k} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,2^k} & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \underbrace{\qquad\qquad}_{n-2^k} & & \end{pmatrix}.$$

Для получения матрицы A_1 потребуется $L_1 \leqslant 2n$ вентилей CNOT.

Для всех элементов $a_{1,i} = 1$ применяем к подстановке $g_1^{(K)}$ действие сопряжением подстановкой, задаваемой вентилем N_i. Для этого потребуется $L_2 \leqslant 2^{k+1}$ вентилей NOT. В итоге получим подстановку $g_2^{(K)}$ и соответствующую ей матрицу A_2:

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,2^k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k-1,1} & \cdots & b_{k-1,2^k} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,2^k} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \underbrace{\qquad\qquad}_{n-2^k} & & \end{array} \right).$$

Элементы матрицы A_2 обозначены через $b_{i,j}$, чтобы показать их возможное отличие от элементов матрицы A_1.

Поставим в соответствие вектору число с помощью отображения $\varphi_m : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_{2^m}$: $\varphi_m(\langle x_1, \dots, x_m \rangle) = \sum_{i=1}^{m} x_i 2^{i-1}$. Будем последовательно действовать сопряжением на подстановку $g_2^{(K)}$, рассматривая все строки матрицы A_2 начиная со второй. Пусть текущая строка имеет номер i. Эта строка попарно отличается от всех строк, чей номер меньше i, так как все строки матрицы A_2 различны. Возможны два варианта.

1. Существует элемент матрицы $b_{i,j} = 1$, $j > \log_2 k$. В таком случае для всех элементов $b_{i,j'} = 1$, $j' \neq j$, $j' > \log_2 k$, применяем действие сопряжением подстановкой, задаваемой вентилем $C_{j;j'}$. Для этого потребуется не более $2(2^k - \log_2 k - 1)$ вентилей CNOT. Затем для всех $j' \leqslant \log_2 k$ используем действие сопряжением подстановкой, задаваемой вентилем $C_{j;j'}$, так, чтобы выполнялось условие

$$\varphi_{\log_2 k}(\langle b'_{i,1}, \dots, b'_{i,\log_2 k} \rangle) = i - 1. \qquad (9)$$

Для этого необходимо не более $2 \log_2 k$ вентилей CNOT. На последнем шаге применяем действие сопряжением подстановкой, задаваемой вентилем $C_{\{1,\dots,\log_2 k\};j}$. Перед этим и после этого, возможно, потребуется инвертировать не более $\log_2 k$ значений $b'_{i,j'} = 0$, $j' \leqslant \log_2 k$, с помощью подстановок, задаваемых вентилями NOT. Вентиль $C_{\{1,\dots,\log_2 k\};j}$ имеет $\log_2 k$ контролирующих входов, в результате он может быть заменен композицией не более $8(\log_2 k - 3)$ вентилей 2-CNOT [5].

Вследствие таких преобразований получим строку матрицы, у которой все элементы с индексом больше $\log_2 k$ являются нулевыми, а первые ее $\log_2 k$ элементов удовлетворяют условию (9). В сумме для

этого потребуется $L_3^{(i)}$ вентилей множества Ω_n^2:

$$L_3^{(i)} \leqslant 2(2^k - \log_2 k - 1) + 2\log_2 k + 2(\log_2 k + 8(\log_2 k - 3) + \log_2 k);$$
$$L_3^{(i)} \leqslant 2^{k+1} + 20\log_2 k.$$

2. Не существует такого элемента $b_{i,j}$ матрицы A_2, что $b_{i,j} = 1$, $j > \log_2 k$. Тогда можно утверждать, что для всех $i' < i$ верно неравенство: $\varphi_{\log_2 k}(\langle b_{i,1}, \ldots, b_{i,\log_2 k}\rangle) \neq \varphi_{\log_2 k}(\langle b_{i',1}, \ldots, b_{i',\log_2 k}\rangle)$. В противном случае нашлись бы две одинаковые строки в матрице A_2, что противоречит циклическому виду подстановки $g_2^{(K)}$. Применяем действие сопряжением подстановкой, задаваемой вентилем $C_{\{1,\ldots,\log_2 k\};\log_2 k+1}$ так, чтобы в итоге этого действия $b_{i,\log_2 k+1} = 1$. Перед этим и после этого, возможно, потребуется инвертировать не более $\log_2 k$ значений $b_{i,j'} = 0$, $j' \leqslant \log_2 k$, с помощью подстановок, задаваемых вентилями NOT. Вентиль $C_{\{1,\ldots,\log_2 k\};j}$ имеет $\log_2 k$ контролирующих входов, таким образом, он может быть заменен композицией не более $8(\log_2 k - 3)$ вентилей 2-CNOT [5].

Далее выполняем те же действия, что и в предыдущем варианте. Следовательно, для приведения i-й строки к такому же виду, что и в предыдущем случае (см. п. 1), в сумме потребуется $L_3^{(i)}$ вентилей множества Ω_n^2: $L_3^{(i)} \leqslant 2(\log_2 k + 8(\log_2 k - 3) + \log_2 k) + 2^{k+1} + 20\log_2 k = 2^{k+1} + 40\log_2 k$.

В результате последовательного применения указанных действий ко всем строкам матрицы A_2 начиная со второй, будет получена новая подстановка $g_3^{(K)}$ и соответствующая ей матрица A_3:

$$A_3 = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right).$$

$\log_2 k$ $\qquad$ $n - \log_2 k$

Для этого в сумме потребуется L_3 вентилей множества Ω_n^2: $L_3 = \sum_{i=2}^{k} L_3^{(i)} \leqslant (k-1)(2^{k+1} + 40\log_2 k)$.

Теперь для всех $i > \log_2 k$ применяем к подстановке $g_3^{(K)}$ действие сопряжением подстановкой, задаваемой вентилем N_i. Для этого необходимо $L_4 \leqslant 2(n - \log_2 k)$ вентилей NOT. Получим итоговую под-

становку $g_4^{(K)}$ и соответствующую ей матрицу A_4:

$$A_4 = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & & & & & & \\ \multicolumn{5}{c|}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\log_2 k}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-\log_2 k}} \end{array} \right).$$

Матрица A была сформирована согласно формуле (8), подстановка $g_4^{(K)}$ представляет собой композицию K независимых транспозиций, следовательно, можно утверждать: подстановка $g_4^{(K)}$ задается вентилем $C_{\{n,n-1,\dots,\log_2 k+1\};1}$. Этот вентиль имеет $n - \log_2 k$ контролирующих входов, поэтому его можно заменить композицией не более $L_5 = 8(n - \log_2 k - 3)$ вентилей 2-CNOT [5].

Приведенный алгоритм позволяет получить из исходной подстановки $g^{(K)}$ подстановку $g_4^{(K)}$ путем действия сопряжением: $g_4^{(K)} = \left(g^{(K)}\right)^{g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ g_4}$, где g_i — подстановка, задаваемая описанным алгоритмом со сложностью $L_i/2$ вентилями множества Ω_n^2. Как было показано в работе [7], для любой подстановки g, задаваемой композицией вентилей множества Ω_n^2, верно равенство $g = g^{-1}$. Отсюда следует $g^{(K)} = \left(g_4^{(K)}\right)^{g_4^{-1} \circ g_3^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_1^{-1}}$. Таким образом, можно оценить сверху величину $L(g^{(K)})$:

$$L(g^{(K)}) \leqslant \sum_{i=1}^{5} L_i;$$

$$L(g^{(K)}) \leqslant 2n + 2^{k+1} + (k-1)(2^{k+1} + 40\log_2 k) + \\ + 2(n - \log_2 k) + 8(n - \log_2 k - 3).$$

Упрощая эту формулу, получаем $L(g^{(K)}) \leqslant 12n + k(2^{k+1} + 40\log_2 k) - 50\log_2 k - 24$. При $K = 2$ верно неравенство $L(g^{(2)}) \leqslant 12n + 324$.

Подставляем полученные оценки в формулу (7):

$$L(h) \lesssim \frac{2^n}{k/2}(12n + k(2^{k+1} + 40\log_2 k))) + k(12n + 324);$$

$$L(h) \lesssim 2^{n+1}\left(\frac{12n}{k} + 2^{k+1} + o(k)\right) + O(kn).$$

При $k = o(n)$ оценку для $L(h)$ можно упростить $L(h) \lesssim 2^{n+1} \times \times \left(\frac{12n}{k} + 2^{k+1}\right)$.

Пусть $m = \log_2 n - \log_2 \log_2 n$. При доказательстве требовалось, чтобы k было степенью двойки. Пусть $k = 2^{\lfloor \log_2 m \rfloor}$, тогда $m/2 \leqslant k \leqslant m$ и $L(h) \lesssim 2^{n+1}\left(\dfrac{12n}{m/2} + 2^{m+1}\right) = 2^{n+1}\left(\dfrac{24n}{\log_2 n - \log_2 \log_2 n} + \dfrac{2n}{\log_2 n}\right)$. Отсюда следует, что $L(h) \lesssim 52n2^n/\log_2 n$ для всех $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$. Таким образом, $L(n) \lesssim 52n2^n/\log_2 n$. ►

Следствие 1. *При $k = 4$ верно соотношение $L(n) \lesssim 6n2^n$, что асимптотически меньше, чем оценка (3), предложенная в работе [7].*

Объединяя верхнюю и нижнюю оценки $L(n)$ можно сформулировать основную теорему настоящей работы.

Теорема 3. $L(n) \asymp n2^n/\log_2 n$.

◄ Следует из теорем 1 и 2. ►

Снижение вентильной сложности при использовании дополнительных входов. В работе [3] доказано, что для любого булева преобразования $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$ можно построить реализующую его схему, состоящую из функциональных элементов базиса $\{\neg, \wedge, \vee\}$ и имеющую вентильную сложность $O(2^m/m)$, где $m = n + \log_2 n$. Такая схема включает в себя в качестве подсхемы многополюсник, вычисляющий все булевы функции $n - k$ переменных. В доказательстве использовано следующее представление преобразования f (аналог разложения булевой функции по k переменным):

$$f(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \bigvee_{a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{Z}_2} x_1^{a_1} \wedge \ldots \wedge x_k^{a_k} \wedge f(\langle a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\rangle).$$

Используя аналогичный подход, докажем, что верхняя оценка вентильной сложности обратимых схем может быть снижена с помощью дополнительных входов. Напомним, что величина $L^*(n)$ соответствует максимальной вентильной сложности обратимой схемы из всех минимальных обратимых схем, реализующих четную подстановку $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$ с применением дополнительных входов.

Теорема 4. *При $N \sim 5 \cdot 2^n/n$ дополнительных входах в схеме, состоящей из вентилей множества Ω_{n+N}^2, справедливо соотношение $L^*(n) \lesssim 2^{n+1}$.*

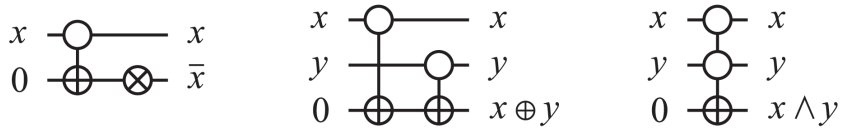
◄ Покажем, что $L^*(h) \lesssim 2^{n+1}$ для всех $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$. Любая подстановка $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$ задает некоторое булево преобразование $f_h : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$. Представим его следующим образом:

$$f_h(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle) = \bigoplus_{a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{Z}_2} x_1^{a_1} \wedge \ldots \wedge x_k^{a_k} \wedge f_h(\langle a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\rangle). \quad (10)$$

Преобразование $f_h(\langle a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\rangle)$ соответствует какому-либо булеву преобразованию $n - k$ переменных.

Построим многополюсник, вычисляющий все булевы функции $n - k$ переменных. Обозначим через Ω_{NXA} множество функциональных элементов $\{\neg, \oplus, \wedge\}$ (NXA – NOT, XOR, AND). Множество

Ω_{NXA} — функционально полный базис. Известно, что для построения указанного многополюсника потребуется не более $2^{2^{n-k}}$ элементов из множества Ω_{NXA}. Каждый такой элемент можно выразить через композицию обратимых вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT. Согласно рисунку, для этого необходимо не более двух обратимых вентилей и не более одного дополнительного входа. Следовательно, обратимая подсхема, задающая описанный выше многополюсник, имеет вентильную сложность $L_1 \leqslant 2^{2^{n-k}+1}$ и использует $N_1 = 2^{2^{n-k}} - (n-k)$ дополнительных входов. Каждый выход, соответствующий одному из дополнительных входов, представляет собой выход одной из булевых функций $n-k$ переменных.



Выражение функциональных элементов базиса Ω_{NXA} через композицию обратимых вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT

Перед вычислением всех возможных значений конъюнкций $x_1^{a_1} \wedge \ldots \wedge x_k^{a_k}$ сперва получим с помощью обратимых вентилей все инверсии $\bar{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Для этого потребуется $L_2 = 2k$ вентилей NOT и CNOT и $N_2 = k$ дополнительных входов. Затем вычисляем все возможные конъюнкции $x_1^{a_1} \wedge \ldots \wedge x_k^{a_k}$ по индукции: для одного входа, для двух и т.д. Для этого необходимо $L_3 = \sum_{i=1}^{k-1} 2^{i+1} = 2^{k+1} - 4$ вентилей 2-CNOT и $N_3 = L_3$ дополнительных входов.

Далее строим подсхему для вычисления преобразования f_h. Для каждого вектора $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ потребуется $L_4 = n$ вентилей 2-CNOT для определения конъюнкции с выходами преобразования $f_h(\langle a_1, \ldots, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_n \rangle)$, значения для которых берутся с выходов многополюсника. Функция XOR из формулы (10) выполняется вентилем 2-CNOT, поэтому на данном этапе потребуется $N_4 = n$ дополнительных входов. Значения на выходах, соответствующих этим дополнительным входам, являются выходами преобразования f_h.

Теперь можно оценить величину $L^*(h)$: $L^*(h) \leqslant L_1 + L_2 + L_3 + 2^k L_4$; $L^*(h) \leqslant 2^{2^{n-k}+1} + 2k + 2^{k+1} + n2^k = 2^{2^{n-k}+1} + 2k + 2^k(n+2)$. Оценим также число требуемых при данном построении дополнительных вдохов схемы: $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$; $N = 2^{2^{n-k}} - (n-k) + k + 2^{k+1} - 4 + n = 2^{2^{n-k}} + 2k + 2^{k+1} - 4$.

В работе [3] принято, что $n - k = \lfloor \log_2(n - \log_2 n) \rfloor$:

$$L^*(h) \le \frac{2^{n+1}}{n} + 2(n - \log_2(n - \log_2 n)) + \frac{(n+2)2^{n+1}}{n - \log_2 n} \lesssim 2^{n+1};$$

$$N = \frac{2^n}{n} + 2(n - \log_2(n - \log_2 n)) + \frac{2^{n+2}}{n - \log_2 n} - 4 \sim \frac{5 \cdot 2^n}{n}. \blacktriangleright$$

Можно сделать важный вывод о зависимости вентильной сложности обратимой схемы от числа дополнительных входов на основании теоремы 4.

Утверждение 1. *Почти для всех подстановок $h \in A(\mathbb{Z}_2^n)$ использование дополнительных входов позволяет снизить вентильную сложность реализующих их обратимых схем.*

◀ Следует из теорем 3 и 4. ▶

Заключение. При решении задачи синтеза обратимой схемы, реализующей какую-либо четную подстановку, приходится искать компромисс между вентильной сложностью синтезированной схемы и числом используемых дополнительных входов в схеме.

В настоящей работе были доказаны некоторые асимптотические оценки вентильной сложности обратимых схем, состоящих из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT. Было установлено, что среди всех минимальных обратимых схем, не использующих дополнительные входы, максимальная вентильная сложность схемы эквивалентна с точностью до порядка $n2^n/\log_2 n$. При этом применение $\sim 5 \cdot 2^n/n$ дополнительных входов позволяет построить обратимую схему, реализующую заданную четную подстановку с вентильной сложностью $\lesssim 2^{n+1}$.

Направлением дальнейших исследований является изучение зависимости вентильной сложности обратимых схем, состоящих из вентилей NOT, CNOT и 2-CNOT, от числа используемых в схеме дополнительных входов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shannon C.E.* The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell System Technical Journal. 1949. Vol. 28. No. 1. C. 59–98.
2. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
3. *Interlando J.C.* Toward a Theory of One-way Functions via Gate Complexity of Boolean Functions // Ph. D. Thesis, University of Notre Dame, Indiana, USA, 2006. 100 p.
4. *Feynman R.* Quantum Mechanical Computers // Optic News. 1985. Vol. 11. No. 2. P. 11–20.
5. *Maslov D.A.* Reversible Logic Synthesis // Ph. D. Thesis, University of New Brunswick Fredericton, N.B., Canada, 2003. 165 p.
6. *Закаблуков Д.В.* Снижение вентильной сложности обратимых схем без использования таблиц эквивалентных замен композиций вентилей // Наука и образование: Электрон. науч.-техн. издание. 2014. № 3. DOI: 10.7463/0314.0699195 (дата обращения: 20.04.2014).

7. *Shende V.V.*, *Prasad A.K.*, *Markov I.L.*, *Hayes J.P.* Synthesis of Reversible Logic Circuits // IEEE Trans. on CAD. 2003. Vol. 22. No. 6. P. 710–722.
8. *Закаблуков Д.В.*, *Жуков А.Е.* Исследование схем из обратимых логических элементов // Информатика и системы управления в XXI веке: Сб. трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. № 9. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. С. 148–157.
9. *Закаблуков Д.В.* Быстрый алгоритм синтеза обратимых схем на основе теории групп подстановок // Прикладная дискретная математика. 2014. № 2. С. 101–109.
10. *Khlopotine A.B.*, *Perkowski M.A.*, *Kerntopf P.* Reversible Logic Synthesis by Iterative Compositions // International Workshop on Logic Synthesis. 2002. P. 261–266.
11. *Yang G.*, *Song X.*, *Hung W.N.*, *Perkowski M.A.* Fast Synthesis of Exact Minimal Reversible Circuits Using Group Theory // ASP-DAC'05 Proceedings of the 2005 Asia and South Pacific Design Automation Conference. 2005. P. 1002–1005. DOI: 10.1145/1120725.1120777 (дата обращения: 20.04.2014).
12. *Miller D.M.*, *Maslov D.A.*, *Dueck G.W.* A Transformation Based Algorithm for Reversible Logic Synthesis // DAC'03 Proceedings of the 40th annual Design Automation Conference. 2003. P. 318–323. DOI: 10.1145/775832.775915 (дата обращения: 20.04.2014).
13. *Miller D.M.* Spectral and Two-Place Decomposition Techniques in Reversible Logic // MWSCAS'02 Proceedings of the 45th Midwest Symposium on Circuits and Systems Conference. 2002. P. 493–496. DOI: 10.1109/MWSCAS.2002.1186906 (дата обращения: 20.04.2014).
14. *Saeedi M.*, *Sedighi M.*, *Zamani M.S.* A Novel Synthesis Algorithm for Reversible Circuits // ICCAD'07 Proceedings of International Conference on Computer-Aided Design. 2007. P. 65–68. DOI:10.1109/ICCAD.2007.4397245 (дата обращения: 20.04.2014).
15. *Yang G.*, *Song X.*, *Hung W.N.*, *Xie F.*, *Perkowski M.A.* Group Theory Based Synthesis of Binary Reversible Circuits // TAMC'06 Proceedings of the Third international conference on Theory and Applications of Models of Computation. 2006. P. 365–374. DOI: 10.1007/11750321_35 (дата обращения: 20.04.2014).

REFERENCES

[1] Shannon C.E. The synthesis of two-terminal switching circuits. Bell Syst. Tech. J., 1949, vol. 28, no. 1, pp. 59–98.
[2] Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku [Introduction to discrete mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 384 p.
[3] Interlando J.C. Toward a theory of one-way functions via gate complexity of boolean functions. Ph. D. Dissertation, USA, Indiana, University of Notre Dame, 2006. 100 p.
[4] Feynman R. Quantum mechanical computers. *Optics News*, 1985, vol. 11, no. 2, pp. 11–20. Available at: http://dx.doi.org/10.1364/ON.11.2.000011 (accessed 07.05.2014).
[5] Maslov D.A. Reversible Logic Synthesis. Ph. D. Dissertation, Canada, N.B., University of New Brunswick Fredericton, 2003. 165 p.
[6] Zakablukov D.V. Reduction of the reversible circuits gate complexity without using the equivalent replacement tables for the gate compositions. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie" MGTU im. N.E. Baumana* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education" of Bauman MSTU], 2014, no. 3. (in Russ.). DOI: 10.7463/0314.0699195
[7] Shende V.V., Prasad A.K., Markov I.L., Hayes J.P. Synthesis of reversible logic circuits. *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2003, vol. 22, no. 6, pp. 710–722.

[8] Zakablukov D.V., Zhukov A.E. Research circuit from reversible logic elements. *Sb. Tr. Molodykh Uchenykh, Aspirantov i Studentov "Informatika i sistemy upravleniya v XXI veke"* [Collect. Pap. of Young Scientists, Post-graduates and Students "Informatics and Control Systems in the XXI Century"]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2012, iss. 9, pp. 148–157 (in Russ.).

[9] Zakablukov D.V. Fast algorithm for the synthesis of reversible circuits based on the theory of permutation groups. *Prikl. Diskretnaya Mat.* [J. Appl. Discrete Math.], 2014, no. 2, pp. 101–109 (in Russ.).

[10] Khlopotine A.B., Perkowski M.A., Kerntopf P. Reversible logic synthesis by iterative compositions. *Proc. of the Int. Workshop on Logic Synthesis*, New Orleans, LA, USA, 2002, pp. 261–266.

[11] Yang G., Song X., Hung W.N., Perkowski M.A. Fast synthesis of exact minimal reversible circuits using group theory. *Proc. of the 2005 Asia and South Pacific Design Automation Conf. – ASP-DAC'05*, China, Shanghai, 2005, pp. 1002–1005. DOI: 10.1145/1120725.1120777

[12] Miller D.M., Maslov D.A., Dueck G.W. A transformation based algorithm for reversible logic synthesis. *Proc. of the 40th annual Design Automation Conf. – DAC'03*, Anaheim, CA, USA, 2003, pp. 318–323. DOI: 10.1145/775832.775915

[13] Miller D.M. Spectral and two-place decomposition techniques in reversible logic. *Proc. of the 45th Midwest Symp. on Circuits and Systems Conf. – MWSCAS'02*, USA, OK, Tulsa, 2002, pp. 493–496. DOI: 10.1109/MWSCAS.2002.1186906

[14] Saeedi M., Sedighi M., Zamani M.S. A novel synthesis algorithm for reversible circuits. *Proc. of Int. Conf. on Computer-Aided Design – ICCAD'07*, USA, CA, San Jose, 2007, pp. 65–68. DOI:10.1109/ICCAD.2007.4397245

[15] Yang G., Song X., Hung W.N., Xie F., Perkowski M.A. Group theory based synthesis of binary reversible circuits. *Proc. of the Third Int. Conf. on Theory and Applications of Models of Computation – TAMC'06*, China, Beijing, 2006, pp. 365–374. DOI: 10.1007/11750321_35

Статья поступила в редакцию 07.05.2014

Закаблуков Дмитрий Владимирович — аспирант кафедры "Информационная безопасность" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор двух научных работ в области схем из обратимых элементов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Zakablukov D.V. — post-graduate of "Information Security" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of two publications in the field of reversible elements.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.