

УДК 621.642.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБЪЕМНЫХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ПРИ РАСЧЕТАХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

**Ю.В. Кулаев¹, П.А. Курбатов¹, Е.П. Курбатова¹,
В.А. Матвеев², М.А. Сысоев²**

¹Национальный исследовательский университет “МЭИ”,
Москва, Российская Федерация

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
ujikolp@bk.ru

Приведены результаты исследований моделей электрофизических свойств высокотемпературных сверхпроводников, обосновано дальнейшее развитие известных моделей, основанное на совместном применении резистивных моделей для индуцированных токов и моделей для связанных токов, представленных нелинейными гистерезисными зависимостями намагниченности вещества от напряженности магнитного поля. Построена модель для микротоков, описываемых их магнитными моментами или удельным параметром — намагниченностью. Для этого записана аппроксимирующая функция эффективной относительной магнитной проницаемости, подобная эффективному электрическому сопротивлению в резистивной модели. Проведен анализ магнитного поля образцов различной формы из высокотемпературных сверхпроводников. Выполнено сравнение распределения напряженности магнитного поля на поверхности образцов при применении резистивной модели и модели для двух источников магнитного поля — плотности тока и намагниченности. Даны рекомендации по созданию экспериментальных установок для определения параметров моделей, учитывающих два источника поля в высокотемпературных сверхпроводниках.

Ключевые слова: высокотемпературные сверхпроводники, модель электрофизических свойств, метод моделирования, распределение магнитного поля, индуцированные токи, связанные токи, источники магнитного поля.

MODELING THE ELECTROPHYSICAL PROPERTIES OF BULK HIGH-TEMPERATURE SUPERCONDUCTORS IN THE CALCULATIONS FOR MAGNETIC SYSTEMS

**Yu.V. Kulaev¹, P.A. Kurbatov¹, E.P. Kurbatova¹,
V.A. Matveev², M.A. Sysoev²**

¹National Research University “Moscow Power Engineering Institute”,
Moscow, Russian Federation

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: ujikolp@bk.ru

The paper presents the research results of electrophysical properties model of high-temperature superconductors (HTS) and proves the further development of well-known models based on the simultaneous application of resistive models for induced currents and bound currents models, which are presented by nonlinear hysteresis dependences of the magnetization vs the magnetic field strength. The authors constructs a model for micro currents described by their magnetic moments

or specific parameter — the substance magnetization. For this purpose approximating function of effective relative magnetic permeability, similar to the effective electrical resistance for the resistive model, is written. The analysis of the magnetic field of different forms of HTS samples is presented. The authors carried out a comparison of the distribution of the magnetic field on the surface of the samples using the resistive model and the model for the two sources of the magnetic field - current density and magnetization. Also recommendations on the development of experimental setups to determine the parameters of the models, taking into account two sources of the magnetic field within HTS are given.

Keywords: high-temperature superconductors, electrophysical properties model, modeling method, distribution of the magnetic field, induced currents, bound currents, magnetic field sources.

Сложность расчетов магнитных систем с элементами из высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) заключается в необходимости учета влияния нелинейных анизотропных электрофизических свойств сверхпроводящих материалов при работе в магнитных полях в сверхпроводящем состоянии и дальнейшего их взаимодействия с магнитной системой. Основными явлениями, которые следует рассматривать при моделировании ВТСП, являются:

- переход между сверхпроводящим и нормальным состояниями;
- неполный эффект Мейснера (замораживание поля);
- экранирующие токи;
- анизотропия;
- гистерезисные явления.

Простейшей моделью для расчета ВТСП является *модель критического состояния* [1, 2]:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{J} = J_c \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|}, & \text{если } |\mathbf{E}| \neq 0; \\ \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0, & \text{если } |\mathbf{E}| = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где \mathbf{J} — плотность экранирующего тока; J_c — значение критического тока; E — напряженность электрического поля.

В этой модели сверхпроводник характеризуется зависимостью $E(J)$, при которой экранирующий ток не может превысить некоторого критического значения J_c , причем пока значение J_c не достигнуто, электрическое поле остается равным нулю (рис. 1, а).

Определение значения критического тока является важной задачей при моделировании. Наиболее распространенными являются модели Бина и Кима. В модели Бина предполагается, что $J_c = \text{const}$, и определяется только свойствами сверхпроводника. Исследования, проводимые в этом направлении, показали, что J_c зависит от внешних факторов, в частности от магнитного поля. Таким образом, была выведена следующая модель Кима:

$$J_c(B) = J_{c0} \frac{1}{1 + B/B_0}, \quad (2)$$

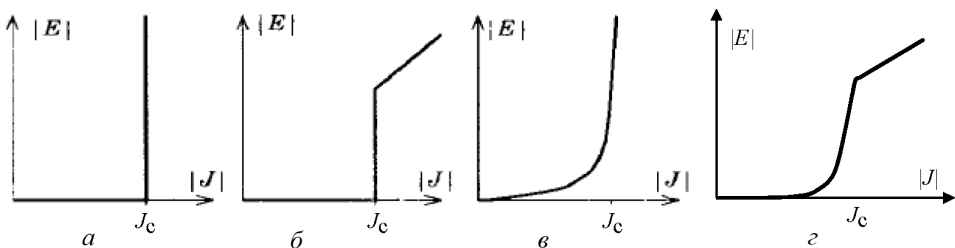


Рис. 1. Зависимость плотности тока от напряженности электрического поля:
a – модель критического состояния; *б* – расширенная модель; *в* – степенной закон; *г* – модель крип-эффекта и протекания тока

где B – магнитная индукция; J_{c0} и B_0 – константы, определяемые свойствами конкретных материалов.

Расширенная модель критического состояния [3] была предложена для учета перехода сверхпроводника в нормальное состояние в случае превышения J_c (рис. 1, б). Для этого в уравнение вводится эффективное сопротивление, описывающее поведение сверхпроводника при критической плотности тока и более:

$$E = \rho_f(H) (J - J_c(H)); \quad (3)$$

здесь $\rho_f = \rho_f(H) = \rho_0 \left(\frac{H}{H_{c2}} \right)^m$ – эффективное удельное электрическое сопротивление (ρ_0 – удельное сопротивление сверхпроводника в нормальном режиме, H_{c2} – значение второго критического поля); H – напряженность магнитного поля, $J_c = J_c(H) = J_0 \left(\frac{H_j}{H} \right)^n$ (J_0, H_j – константы).

Таким образом, в модели выделяются две области, в которых может находиться сверхпроводник: $|J - J_c| \ll J_c$ – соответствует модели критического состояния; $J_c \ll J$ – движение флюксоидов.

Для учета физических процессов, происходящих в сверхпроводнике, связанных со сползанием флюксоидов, используется модель *степенного закона* [4]:

$$E = E_c \left(\frac{J}{J_c} \right)^{n-1}, \quad (4)$$

где E_c – значение критической напряженности электрического поля; $n = n_{c0} \frac{B_0}{B_0 + B}$ – энергетический индекс (n_{c0}, B_0 – константы).

Степенной закон является гладкой аппроксимацией модели критического состояния, что показано на рис. 1, в.

Одной из моделей, наиболее полно и точно описывающих поведение ВТСП, является модель *Flux-flow and Flux-creep Model* [5–7], разде-

ляющая разные виды проводимости сверхпроводника (рис. 1, 2):

$$E = \begin{cases} E_c \frac{\sinh(\beta J / J_c)}{\sinh(\beta)}, & \text{если } J \leq J_c; \\ E_c + \rho_f (J - J_c), & \text{если } J > J_c, \end{cases} \quad (5)$$

где $\rho_f(B)$ — удельное электрическое сопротивление в нормальном состоянии; β — параметр, характеризующий пиннинг.

При $J \leq J_c$ существует только крип-эффект — сползание вихрей с точек пиннинга, если $J > J_c$, то одновременно проявляется крип-эффект и движение флюксоидов — появляется сопротивление ρ_f .

Модели для анализа источников электромагнитного поля в ВТСП. Близкую к *Flux-flow and Flux-creep Model* дает аппроксимирующая функция удельного электрического сопротивления для всего диапазона изменения плотности тока, предложенная в [8, 9],

$$\mathbf{E} = \rho_{eff} \mathbf{J};$$

$$\rho_{eff} = 0,5 \rho_n \{1 + \text{th}[-K(T, B, J)/(2\delta)]\}, \quad (6)$$

где $K(T, B, J) = (1 - T/T_c)(1 - B/B_c(T))(1 - J/J_c(T, B))$; T_c, B_c, J_c — значения критических параметров: температуры, магнитной индукции, плотности тока. Характерный вид такой аппроксимации функции ρ_{eff} для разных значений магнитной индукции показан на рис. 2.

При построении общей модели распределения плотности тока в образце из ВТСП-материала помимо процессов, описываемых с помощью рассмотренных моделей, подобных токам проводимости \mathbf{J} , допустимо предположить существование структуры микротоков, описываемых их магнитными моментами или удельным параметром — намагниченностью вещества \mathbf{M} . Создаваемые магнитные поля источниками \mathbf{J} и \mathbf{M} имеют различную топографию.

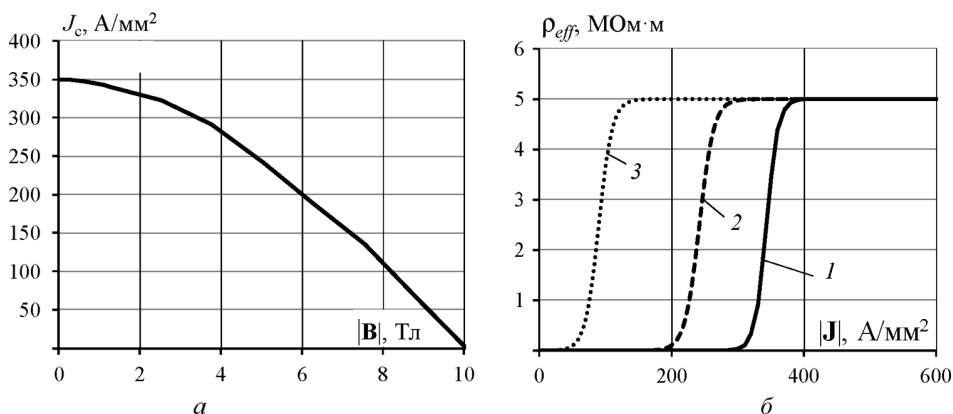


Рис. 2. Зависимости критической плотности тока J_c от магнитной индукции (а) и удельного электрического сопротивления ρ_{eff} от плотности тока (б) при $T_c = 77$ К, $T = 60$ К, $\delta = 0,005$, $\rho_n = 5,0$, $B_c = 10$ Тл:
1 — $B = 1$ Тл, 2 — $B = 5$ Тл, 3 — $B = 8$ Тл

Для намагниченности материальные уравнения запишем через относительную магнитную проницаемость $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = (\mu_{r,eff} - 1) \mathbf{H}$, где χ — магнитная восприимчивость; $\mu_{r,eff}$ — относительная магнитная проницаемость; \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля. Относительная магнитная проницаемость изменяется в пределах от 0 до 1, т.е. от свойств идеального диамагнетика до немагнитного состояния при потере сверхпроводимости. Естественно предположить, что на свойства материала влияет температура и напряженность магнитного поля. Аппроксимирующую функцию для $\mu_{r,eff}$ удобно построить подобно ρ_{eff} в (6)

$$\mu_{r,eff} = 0,5\mu_{r,max} \left(1 + \text{th} \left(-\frac{K(T, H)}{2\delta} \right) \right); \quad (7)$$

$$K(T, H) = \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \left(1 - \frac{H}{H_c(T)} \right),$$

где T_c — значение критической температуры; $H_c(T)$ — критическая напряженность магнитного поля. На рис. 3 приведены зависимости $\mu_{r,eff}(H)$ и $M(H)$, построенные для различных H_c по формуле (7).

Представленные зависимости $M(H)$ необходимо рассматривать как кривые начального намагничивания, так как при циклическом изменении напряженности магнитного поля они трансформируются в гистерезисные циклы. Кроме того, будем в дальнейшем предполагать наличие сильно выраженной анизотропии свойств, и поэтому представленные кривые имеют смысл только для оси легкого намагничивания. В ортогональных направлениях намагниченность отсутствует.

Анализ магнитного поля различной формы образцов из ВТСП с источниками J и M . Для обнаружения присутствия источников J и

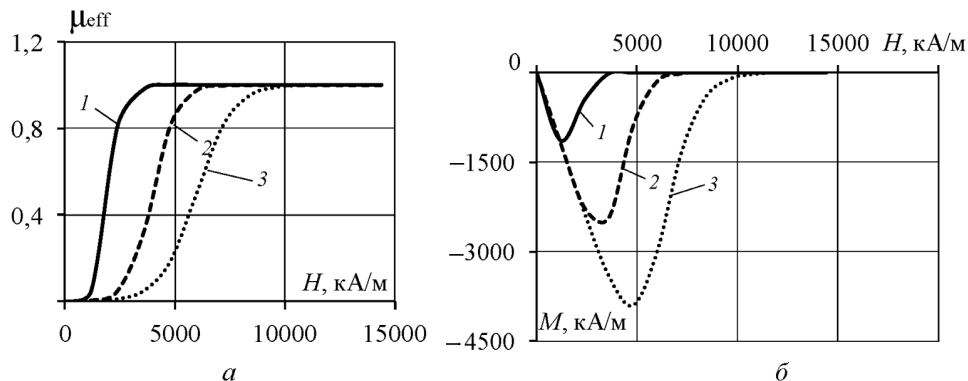


Рис. 3. Зависимости относительной магнитной проницаемости μ_{eff} (а) и намагниченности M (б) от напряженности магнитного поля при $T_c = 77$ К, $T = 60$ К, $\delta = 0,03$:

1 — $H_c = 2000$ кА/м; 2 — $H_c = 4000$ кА/м; 3 — $H_c = 6000$ кА/м

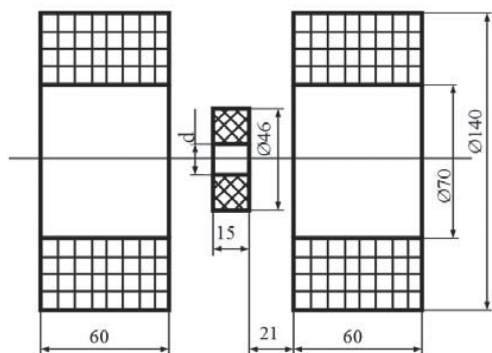


Рис. 4. Конструкция магнитной системы модельной задачи

M выполнен анализ ряда модельных задач по методу пространственных интегральных уравнений [10], в результате которого получены характерные распределения напряженности магнитного поля вблизи поверхности образцов из ВТСП. Рассмотрены состояния при захолаживании и отсутствии внешнего магнитного поля (ZFC) и последующем увеличении напряженности внешнего магнитного

поля. Внешнее магнитное поле создается катушками с током (рис. 4), между которыми располагаются образцы.

На рис. 5 приведены кривые распределения по радиусу осевой и радиальной составляющих напряженности магнитного поля у поверхности диска из ВТСП на расстоянии 0,1 мм. Диаметр диска 46 мм, высота 15 мм. Сопоставлены расчетные зависимости, полученные по модели для плотности тока (6) и для модели с одновременным присутствием токов и намагниченности (6) и (7). Учитывалась зависимость критической плотности тока от магнитной индукции, показанная на рис. 2, и зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля $M(H)$, приведенная на рис. 3. На рис. 5 и 6 зависимости обозначены: 1 — расчет только с током J , 2...4 — расчет с током J и намагниченностью M соответственно при $H_c = 2000$ кА/м (кривые 2), 4000 кА/м (кривые 3) и 6000 кА/м (кривые 4). Расчеты выполнены для значений магнитной индукции внешнего магнитного поля в центре образцов: $B_0 = 1, 2$ и 4 Тл.

На рис. 6 приведены кривые распределения по радиусу осевой и радиальной составляющих напряженности магнитного поля у поверхности кольца из ВТСП на расстоянии 0,1 мм. Внешний диаметр кольца как у диска 46 мм, диаметр отверстия $d = 36$ мм, высота 15 мм.

Анализ полученных данных подтверждает известные закономерности, что модель с намагниченностью M не препятствует проникновению магнитного поля во внутреннее отверстие кольца и компенсирует внешнее магнитное поле только в объеме материала, в отличие от модели с плотностью тока. Модель с J и M показывает заметное отличие распределений у поверхности кольца по сравнению с моделью для токов. Таким образом, можно предположить, что модель с J и M предоставляет больше возможностей для описания происходящих процессов в сверхпроводнике.

В целях подтверждения существования и количественной оценки магнитных моментов связанных токов необходимо выполнить стати-

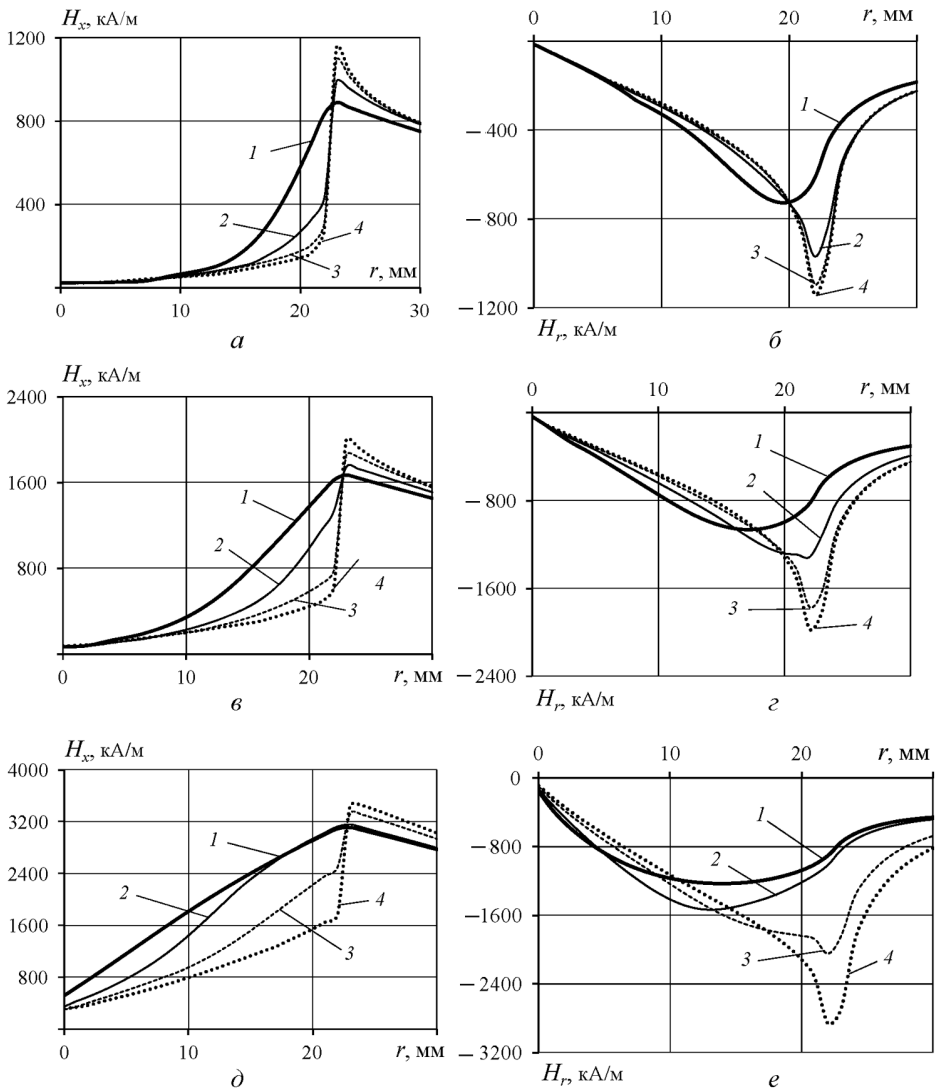


Рис. 5. Кривые распределения по радиусу напряженности магнитного поля у поверхности диска при значениях магнитной индукции внешнего поля $B_0 = 1$ Тл (*a*, *б*), 2 Тл (*в*, *г*) и 4 Тл (*д*, *е*); *a*, *в*, *д* – осевые, *б*, *г*, *е* – радиальные составляющие

стически значимый объем экспериментальных исследований, например, представленных ранее образцов из ВТСП. Эффект искажения измеренного распределения напряженности магнитного поля по сравнению с расчетом для модели только с плотностью тока с J будет указывать на существование намагниченности. Также по экспериментальным данным можно будет оценить значения параметров модели свойств материала (7).

На рис. 7 показаны характерные распределение плотности тока и намагниченности в симметричной части сечении кольца при малых (*a*, *б*) и больших (*в*, *г*) значениях магнитной индукции внешнего поля.

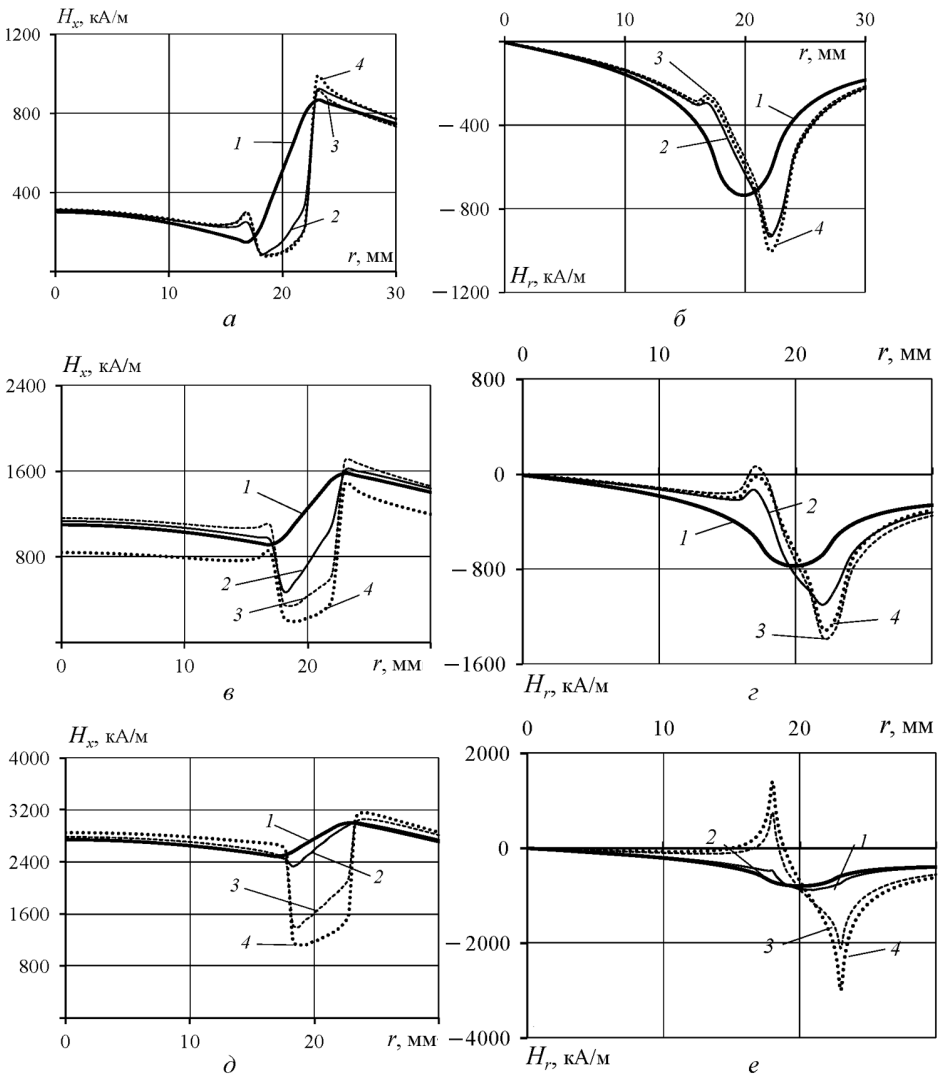


Рис. 6. Кривые распределения по радиусу напряженности магнитного поля у поверхности кольца при различных значениях магнитной индукции B_0 внешнего поля (обозначения см. рис. 5)

Заключение. Анализ характера распределения напряженности магнитного поля вблизи поверхности объемных образцов из ВТСП позволяет определить существование и дать количественную оценку свойств материала, заданных совокупностью двух различных проявлений токовых структур — плотностью тока проводимости J и намагниченности M . Применение для расчетов магнитных систем моделей объемных ВТСП с двумя источниками J и M позволит повысить точность анализа электромагнитного поля электротехнических устройств.

Работа выполнена в рамках ФЦП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического

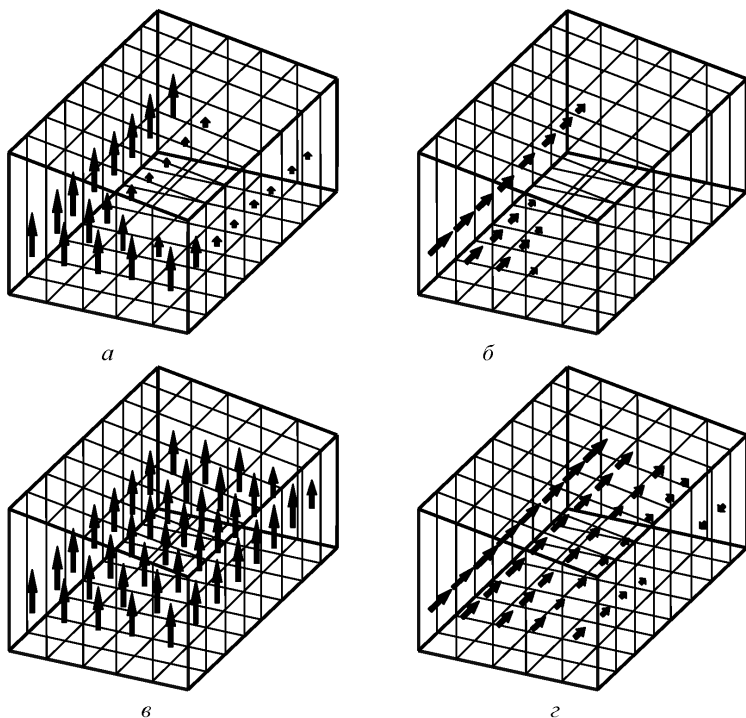


Рис. 7. Характерные распределения плотности тока J (а, в) и намагниченности M (б, г) в симметричной части сечения кольца при малых и больших значениях магнитной индукции внешнего поля

комплекса России на 2014–2020 гг.” при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. David Ruiz-Alonso, Tim A. Coombs and Archie M. Campbell. Numerical analysis of high-Temperature superconductors with the critical state model // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2004. Vol. 14. No. 4. December.
2. Yon-Do Chun, Youn-Hyun Kim, Ju Lee and others. Finite element analysis of magnetic field in high temperature bulk superconductor // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2001. Vol. 11. No. 6.
3. Misha Sinder, Victor Meerovich, Vladimir Sokolovsky and Istvan Vajda. Penetration of magnetic field into high-temperature superconductors // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 1999. Vol. 9. No. 4.
4. Leonid Prigozhin. Analysis of critical-state problems in type-II superconductivity // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 1997. Vol. 7. No. 4. December.
5. Soichiro Ikuno and Atsushi Kamitani. Shielding current density analysis of axisymmetric HTS by element-free galerkin method // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2005. Vol. 15. No. 2. June.
6. Yokono T., Hasegawa K. and Kamitani A. Magnetic Shielding Analysis of High-Tc Superconducting Plates by Power Law, Flux-Flow and Flux-Creep Models // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2003. Vol. 13. No. 2. June.

7. Jun Zheng, Honghai Song, Jiasu Wang, Suyu Wang, Minxian Liu, Hua Jing. Numerical Method to the Excited High-Tc Superconducting Levitation System Above the Nd-Fe-B-Guideway // IEEE Transactions on Magnetics. 2006. Vol. 42. No. 4. April.
8. Klimenko E. Yu., Imenitov A.B., Shavkin S.V. and Volkov P.V. Resistance–Current Curves of High Pinning Superconductors // J. of Experimental and Theoretical Physics. 2005. Vol. 100. P. 50–65.
9. Клименко Е.Ю., Шавкин С.В. Электродинамика сверхпроводников с анизотропным пиннингом // Труды 1-й Междунар. конф. “Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости”. Москва, 18–24 октября, 2004.
10. Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчет электромагнитных полей. М.: Энергоатомиздат, 1984. 168 с.

REFERENCES

- [1] Ruiz-Alonso D., Coombs T.A., Campbell A.M. Numerical analysis of high-temperature superconductors with the critical state model. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2004, vol. 14, iss. 4, pp. 2053–2063. DOI: 10.1109/TASC.2004.838316
- [2] Chun Y.-D., Kim Y.-H., Lee Ju, Hong Ju.-P., Lee J.-W. Finite element analysis of magnetic field in high temperature bulk superconductor. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2001, vol. 11, iss. 6, pp. 2000–2003.
- [3] Sinder M., Meerovich Victor, Sokolovsky V., Vajda I. Penetration of magnetic field into high-temperature superconductors. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 1999, vol. 9, iss. 4, pp. 4661–4665.
- [4] Prigozhin L. Analysis of critical-state problems in type-II superconductivity. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 1997, vol. 7, iss. 4, pp. 3866–3873. DOI:10.1088/0953-2048/25/2/025008
- [5] Ikuno S., Kamitani A. Shielding current density analysis of axisymmetric HTS by element-free Galerkin method. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2005, vol. 15, iss. 2, pp. 3688–3691. DOI: 10.1109/TASC.2005.849393
- [6] Yokono T., Hasegawa K., Kamitani A. Magnetic shielding analysis of high- T_c superconducting plates by power law, flux-flow and flux-creep models. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 2003, vol. 13, iss. 2, pp. 1672–1675. DOI: 10.1109/TASC.2003.812860
- [7] Zheng J., Song H., Wang J., Wang S., Liu M., Jing H. Numerical method to the excited high- T_c superconducting levitation system above the NdFeB guideway. *IEEE Trans. on Magnetics*, 2006, vol. 42, iss. 4, pp. 947–950. DOI: 10.1109/TMAG.2006.871639
- [8] Klimenko E.Yu., Imenitov A.B., Shavkin S.V., Volkov P.V. Resistance–Current Curves of High Pinning Superconductors [Om-Ampernye kharakteristiki sverkhprovodnikov s sil'nym pinningom] *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* [J. Exp. Theor. Phys., vol. 100, iss. 1, pp. 50–65], 2005, vol. 127, pp. 56–73 (in Russ.).
- [9] Klimenko E.Yu., Shavkin S.V. Electrodynamics of superconductors with anisotropic pinning *Tr. 1-y Mezhdunar. Konf. “Fundamental'nye problemy vysokotemperaturnoy sverkhprovodimosti”* [Proc. 1th Int. Conf. “Fundamental Problems of High-Temperature Superconductivity”], Moscow, 2004 (in Russ.).
- [10] Kurbatov P.A., Arinchin S.A. Chislennyy raschet elektromagnitnykh poley [Numerical calculation of electromagnetic fields]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984. 168 p.

Статья поступила в редакцию 25.09.2014

Кулаев Юрий Владимирович — канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Научно-исследовательского центра “К-электро” Национального исследовательского университета “МЭИ”.

Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Российская Федерация, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14.

Kulaev Yu.V. — Cand. Sci. (Eng.), senior researcher of the Scientific Research center “K-Electro” of the National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (“MPEI”).

National Research University “MPEI”, Krasnokazarmennaya ul. 14, Moscow, 111250 Russian Federation.

Курбатов Павел Александрович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Электрические и электронные аппараты” Национального исследовательского университета “МЭИ”, директор НИЦ “К-электро” Национального исследовательского университета “МЭИ”, лауреат премии Правительства РФ, чл.-корр. Академии электротехнических наук РФ.

Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Российская Федерация, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14.

Kurbatov P.A. — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Electrical and Electronic Apparatus” department of the National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (“MPEI”). Director of the Scientific Research center “K-Electro” of the National Research University “MPEI”. Corresponding Member of the Academy of Electrotechnical Sciences RF. Laureate of the Russian Government Prize.

National Research University “MPEI”, Krasnokazarmennaya ul. 14, Moscow, 111250 Russian Federation.

Курбатова Екатерина Павловна — аспирантка Национального исследовательского университета “МЭИ”. Специализируется в области моделирования электромагнитных полей и проектирования магнитных систем.

Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Российская Федерация, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14.

Kurbatova E.P. — post-graduate of the “Electrical and Electronic Apparatus” department of the National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (“MPEI”).

National Research University “MPEI”, Krasnokazarmennaya ul. 14, Moscow, 111250 Russian Federation.

Матвеев Валерий Александрович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Информационная безопасность” МГТУ им. Н.Э. Баумана, руководитель НУК “Информатика и системы управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ и 25 патентов в области информатики, систем управления и навигации. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Matveev V.A. — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Information Security” department of the Bauman Moscow State Technical University, head of the Scientific and Educational Complex for Information Technologies and Control Systems of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications and 23 patents in the field of information technologies, systems of control and navigation.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Сысоев Михаил Алексеевич — заведующий лабораторией “Конструирование элементов систем управления летательными аппаратами” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 10 научных работ в области высокотемпературной сверхпроводимости.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Sysoev M.A. — head of “Designing elements of aircraft control systems” laboratory of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of high-temperature superconductivity.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.