

УДК 621.396.662

Ю. А. Сидоркина, А. А. Ковальчук,
М. А. Рязанова**АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ
АВТОПОДСТРОЙКИ ПРИ НАЛИЧИИ
ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ**

При использовании метода гармонического баланса получены динамические характеристики системы фазовой автоподстройки при воздействии на нее помимо полезного сигнала узкополосной (гармонической) помехи. Анализ проводится при произвольной расстройке между частотой несущей и частотой управляемого генератора ($\gamma \neq 0$) и при произвольной расстройке между частотой сигнала и частотой помехи $d \neq 0$. Случай $d \neq 0$ практически важен, так как случай $d = 0$ редко встречается в практике.

Показано, что помехоустойчивость ФАП уменьшается, если спектральные составляющие сигнала и помехи расположены по разные стороны от частоты управляющего генератора.

E-mail: sidyulia5969@ya.ru; nastia_kov-k@rambler.ru;
maria.a.ryazanova@boeing.com

Ключевые слова: системы фазовой автоподстройки, гармоническая помеха, расстройка частоты.

Система фазовой автоподстройки (ФАП) используется во многих радиотехнических устройствах [1, 2], причем характеристики ФАП существенно влияют на работоспособность указанных устройств, к которым относятся, в частности, демодуляторы частотно- и фазомодулированных сигналов, синхронизаторы по тактовой частоте и несущей, устройства управления, навигации и радиолокации.

Эффективность ФАП существенно может быть снижена при воздействии на нее узкополосных (гармонических) помех [2–5] от космических навигационных систем (GPS, ГЛОНАСС) и радиолокационных станций.

Модель системы ФАП при воздействии на вход аддитивной смеси сигнала, гармонической помехи и шума. Допустим, что на вход ФАП поступает аддитивная смесь (рис. 1) полезного сигнала (эталонного колебания) $u_3(t)$, гармонической помехи $u_{\text{п}}(t)$ и полосового (белого) гауссового шума $n_0(t)$:

$$u_{\text{вх}}(t) = u_3(t) + u_{\text{п}}(t) + n_0(t).$$

Эталонное колебание можно записать как

$$u_3(t) = \sqrt{2}A \sin(\omega_3 t + \Omega_0 t + \theta_0), \quad (1)$$

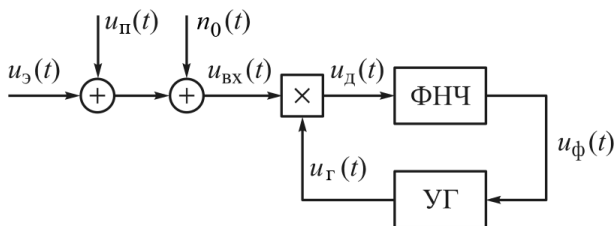


Рис. 1. Структурная схема фазовой замкнутой системы

где A — среднеквадратическое значение напряжения полезного сигнала; ω_s — частота сигнала, совпадающая с начальной частотой управляемого генератора (УГ), Ω_0 и θ_0 — начальные расстройки по частоте и фазе между эталонным колебанием и сигналом на выходе УГ.

Гармоническую помеху примем в виде

$$u_{\text{п}}(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{2} A_i \sin(\omega_s t + \Omega_i t + \theta_i), \quad (2)$$

где N — число спектральных составляющих, попадающих в полосу пропускания линейного тракта, предшествующего ФАП; A_i — среднеквадратическое значение напряжения i -й спектральной составляющей; Ω_i и θ_i — начальные расстройки по частоте и фазе i -й составляющей относительно частоты и фазы сигнала.

Полосовой гауссовый шум имеет вид

$$n_0(t) = \sqrt{2} n_c(t) \cos \omega_0 t + \sqrt{2} n_s(t) \sin \omega_0 t,$$

где $n_c(t)$ и $n_s(t)$ — независимые квадратурные гауссовы случайные процессы. По предположению, двусторонняя спектральная плотность шума равна $N_0/2$, Вт/Гц.

Фазовый детектор, по предположению, перемножает поступающие на его вход колебания. Напряжение на выходе фазового детектора имеет вид

$$u_{\text{д}} = k_{\text{д}} u_{\text{вх}}(t) u_{\text{г}}(t),$$

где $k_{\text{д}}$ — коэффициент передачи фазового детектора; $u_{\text{г}}(t) = \sqrt{2} A_{\text{г}} \cos[\omega_s t + \varphi_0(t)]$, — напряжение на выходе УГ ($A_{\text{г}}$ — среднеквадратическое значение напряжения на выходе генератора; $\varphi_0(t)$ — медленно изменяющаяся фаза колебания УГ в режиме подстройки).

Пренебрегая вторыми гармониками, которые формируются после перемножения колебаний $u_{\text{вх}}(t)$ и $u_{\text{г}}(t)$, получаем низкочастотную составляющую колебания на выходе фазового детектора

$$u_{\text{д1}} = k_{\text{д}} A A_{\text{г}} Q,$$

где

$$Q = Q(t) = \sin [\Omega_0 t + \theta_0 - \varphi_0(t)] + \sum_{i=1}^N (A_i/A) \sin [\Omega_i t + \theta_i - \varphi_0(t)] + (n_c(t)/A) \cos \varphi_0(t) - (n_s(t)/A) \sin \varphi_0(t).$$

Фильтр низких частот (ФНЧ) описывается операторным коэффициентом передачи (передаточной функцией) $F(p)$, $p = d/dt$.

Сигнал на выходе фильтра выражается в символическом виде как

$$u_{\Phi}(t) = F(p) u_{\text{дл}}(t) = k_{\text{д}} A A_{\text{Г}} F(p) Q(t).$$

Управляемый генератор преобразует управляющее воздействие $u_{\Phi}(t)$ в изменение фазы генерируемых колебаний $\varphi_0(t)$, так что

$$p\varphi_0(t) = k_{\text{Г}} u_{\Phi}(t),$$

где $k_{\text{Г}}$ — коэффициент передачи УГ (крутизна модуляционной характеристики), рад/с·В.

Таким образом,

$$p\varphi_0(\tilde{t}) = k_{\text{Г}} k_{\text{д}} A A_{\text{Г}} F(p) Q(t) = k A F(p) Q(t),$$

где $k = k_{\text{Г}} k_{\text{д}} A_{\text{Г}}$ — коэффициент усиления разомкнутой цепи регулирования.

Осуществим замену переменной

$$x(t) = \Omega_0 t + \theta_0 - \varphi_0(t),$$

которая называется сигналом рассогласования или сигналом ошибки.

Обозначим низкочастотный шум или шум, пересчитанный на выход фазового детектора, в виде

$$n_0(t) = [n_c(t)/A] \cos \varphi_0 t + [n_s(t)/A] \sin \varphi_0 t = 1/A n_{\text{ш}}(t).$$

Низкочастотный шум $n_{\text{ш}}(t)$ в пределах полосы пропускания ФАП является гауссовым шумом, который моделируется гауссовым белым шумом с двусторонней спектральной плотностью $N_0/2$, Вт/Гц.

В результате преобразований получим стохастическое дифференциальное уравнение (ДУ) в символической форме

$$\frac{1}{KA} p x = \gamma - F(p) \left[\sin x + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sin(x + \Delta\Omega_i t + \Delta\theta_i) + \frac{1}{A} n_{\text{ш}}(t) \right],$$

где $\gamma = \Omega_0/KA$ — относительная расстройка по частоте эталонного колебания и сигнала с выхода УГ; $\varepsilon_i = A_i/A$; $\Delta\Omega_i = \Omega_i - \Omega_0$; $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_0$; $i = \overline{1, N}$.

Вместо параметра A введем $S = A^2$, тогда стохастическое ДУ в новых обозначениях при наличии одной гармоники в помехе принимает

вид

$$\frac{1}{K\sqrt{S}} \frac{d\varphi}{dt} = \gamma - F(p) \left[\sin \varphi + \sqrt{R} \sin (\varphi(t) + \Delta\Omega_i t + \Delta\theta_i) + \frac{1}{\sqrt{S}} N(t) \right], \quad (3)$$

где $\varphi(t) = x(t)$; $N(t) = n_{ш}(t)$; $R = \frac{J}{S}$; $J = A_i^2$; R – отношение помеха/сигнал (ОПС).

Рассмотрим ДУ (3), описывающее работу ФАП при наличии гармонической помехи, и сделаем следующее предположение: во-первых, допустим, что имеются только одна ($N = 1$) спектральная составляющая помехи, частота которой лежит вне полосы синхронизации системы; во-вторых, на первом этапе анализа положим, что широкополосный шум пренебрежимо мал $n_{ш}(t) = 0$.

Тогда ДУ (3) принимает вид

$$\frac{1}{K\sqrt{S}} \frac{dx}{dt} = \gamma - F(p) [\sin x + \varepsilon \sin (x + \Delta\Omega t + \Delta\theta)], \quad (4)$$

где $\Delta\Omega = \Delta\Omega_i$; $\varepsilon_1 = \varepsilon$; $\Delta\theta_1 = \Delta\theta$, причем, по предположению, $\Delta\Omega > 1$.

Динамические характеристики ФАП при воздействии гармонической помехи. Известно, что при наличии узкополосного воздействия в пределах полосы синхронизации установившимся значением переменной $x(t)$ является значение $x_0 = \text{const}$, а при наличии узкополосного воздействия за пределами полосы синхронизации сигнал рассогласования во времени становится почти гармоническим с частотой, равной частоте расстройки (рис. 2). Естественно, можно предположить, что при наличии одновременно двух воздействий (внутри и за пределами полосы синхронизации) рассогласование $x(t)$ может быть представлено в виде суммы двух составляющих (детерминированной x_0 и гармонической с амплитудой x_1 и начальной фазой ψ):

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos (\Delta\Omega t + \Delta\theta + \psi) = x_0 + x_1 \cos (\theta + \psi), \quad (5)$$

где $\theta = \Delta\Omega t + \Delta\theta$. Подставляя выражение (5) в ДУ (4) и считая амплитуду x_1 малой, т.е. полагая, что

$$\begin{aligned} \sin x &\approx \sin x_0 + x_1 \cos x_0 \cos (\theta + \psi); \\ \cos x &\approx \cos x_0 - x_1 \sin x_0 \cos (\theta + \psi), \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} -x_1 d \sin (\theta + \psi) &= \gamma - M(0) \sin x_0 - \\ &- x_1 \cos x_0 M(\Delta\Omega) \cos (\theta + \psi + P(\Delta\Omega)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \varepsilon \sin x_0 M(\Delta\Omega) \cos(\theta + P(\Delta\Omega)) - \\
 & - 0,5\varepsilon x_1 \cos x_0 \cos \psi M(0) + 0,5\varepsilon x_1 \sin x_0 \sin \psi M(0) - \\
 & - \varepsilon \cos x_0 M(\Delta\Omega) \sin(\theta + P(\Delta\Omega)),
 \end{aligned}$$

где $d = \frac{\Delta\Omega}{K\sqrt{S}}$; $M(\omega) = |K(i\omega)|$; $P(\omega) = \arg F(i\omega)$.

Приравнявая коэффициенты в правой и левой частях полученного равенства при $\sin \theta$, $\cos \theta$, а также записывая аналогичное равенство для постоянных составляющих, получаем систему из трех уравнений

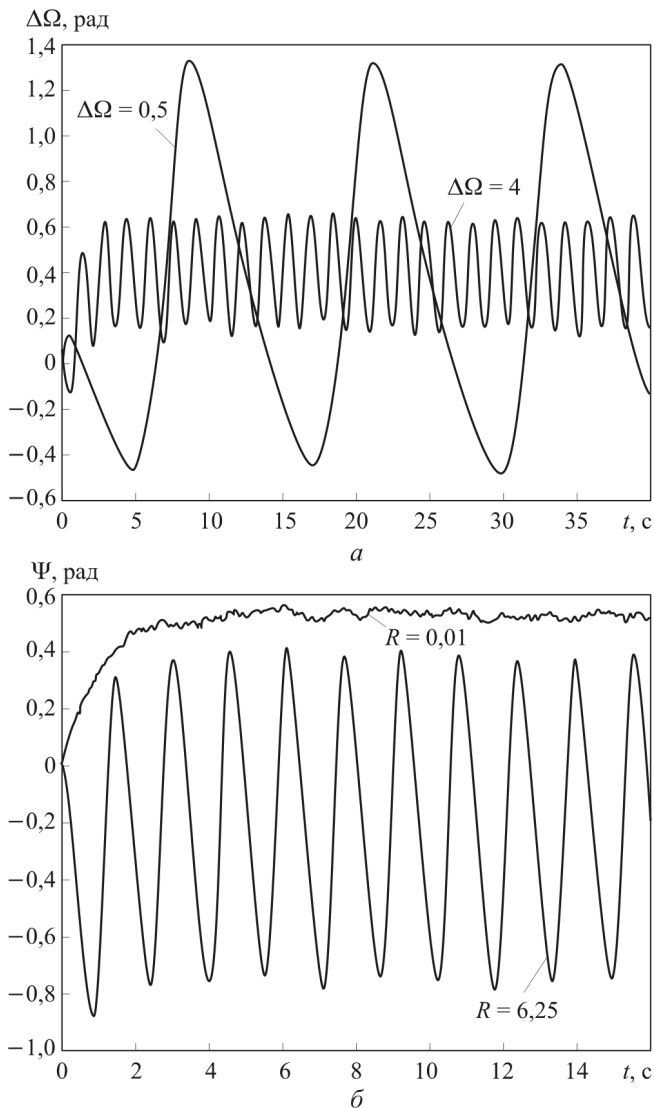


Рис. 2. Зависимость расстройки $x(t)$ от начальной расстройки по частоте $\Delta\Omega$ (а) и ОПС R (б)

с тремя неизвестными x_0 , x_1 и ψ_1 :

$$\begin{aligned}
 \gamma &= M(0) \sin x_0 + 0,5 \varepsilon x_1 \cos(x_0 - \psi) M(0); \\
 \varepsilon M(\Delta\Omega) \cos(x_0 + P(\Delta\Omega)) &= \\
 &= [\cos x_0 M(\Delta\Omega) \sin(P(\Delta\Omega)) + d] x_1 \cos \psi + \\
 &+ [\cos x_0 M(\Delta\Omega) \cos(P(\Delta\Omega))] x_1 \sin \psi; \\
 \varepsilon M(\Delta\Omega) \sin(x_0 + P(\Delta\Omega)) &= \\
 &= [\cos x_0 M(\Delta\Omega) \sin(P(\Delta\Omega)) + d] x_1 \sin \psi - \\
 &- [\cos x_0 M(\Delta\Omega) \cos(P(\Delta\Omega))] x_1 \cos \psi;
 \end{aligned} \tag{6}$$

Два последних уравнения этой системы могут быть решены отдельно от первого:

$$\begin{aligned}
 x_1 \cos \psi &= \varepsilon \Delta^{-1} M(\Delta\Omega) [d \cos(x_0 + P(\Delta\Omega)) - \\
 &- 0,5 M(\Delta\Omega) \sin 2x_0]; \\
 x_1 \sin \psi &= \varepsilon \Delta^{-1} M(\Delta\Omega) [d \sin(x_0 + P(\Delta\Omega)) + \\
 &+ 0,5 M(\Delta\Omega) (1 + \cos 2x_0)],
 \end{aligned} \tag{7}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned}
 x_1^2 &= \varepsilon^2 \Delta^{-1} M^2(\Delta\Omega) = \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{d^2 \left\{ \frac{\cos^2(P(\Delta\Omega))}{M^2(\Delta\Omega)} + \left[\frac{\cos x_0}{d} + \frac{\sin(P(\Delta\Omega))}{M(\Delta\Omega)} \right]^2 \right\}},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\Delta = \left\{ \left[M(\Delta\Omega) \frac{\cos x_0}{d} + \sin(P(\Delta\Omega)) \right]^2 + \cos^2(P(\Delta\Omega)) \right\} d^2. \tag{9}$$

В уравнении (9) в случае ФАП первого порядка полагаем

$$\begin{aligned}
 \cos P(\Delta\Omega) &= 1; \quad \sin P(\Delta\Omega) = 0; \\
 M(\Delta\Omega) &= 1; \quad \cos x_0 = \sqrt{1 - \gamma^2} = 1, \quad \gamma = 0,
 \end{aligned}$$

тогда

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{d^2 \left(1 + \frac{1}{d^2}\right)} = \frac{R}{1 + d^2} = \frac{R}{1 + \left(\frac{\Delta\Omega}{4B_L}\right)^2} = \frac{R}{1 + 0,0625\lambda^2},$$

где $\varepsilon^2 = R$; $d = \frac{\Delta\Omega}{4B_L} = \frac{\lambda}{4}$.

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{1 + 0,0625\lambda^2}}.$$

При $R = 0,2; 0,5; 1; 1,5$ и $\gamma = 0$ получаем зависимость $x_1(\lambda)$ и ее асимптотические значения (штриховые кривые, представленные на рис. 3, а); полагая в уравнении (9) $\gamma = 0,5$, получаем

$$\cos x_0 = \sqrt{1 - 0,5^2} = 0,866,$$

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{d^2 \left(1 + \frac{0,866}{d^2}\right)} = \frac{R}{0,866 + d^2} = \frac{R}{0,866 + \left(\frac{\Delta\Omega}{4B_L}\right)^2} = \frac{R}{0,866 + 0,0625\lambda^2}.$$

Зависимость $x_1(\lambda)$ при $\gamma = 0,5$ изображена на рис. 3, б при $R = 0,2; 0,5; 1; 1,5$. Далее, подставляя (8) в первое уравнение системы (7),

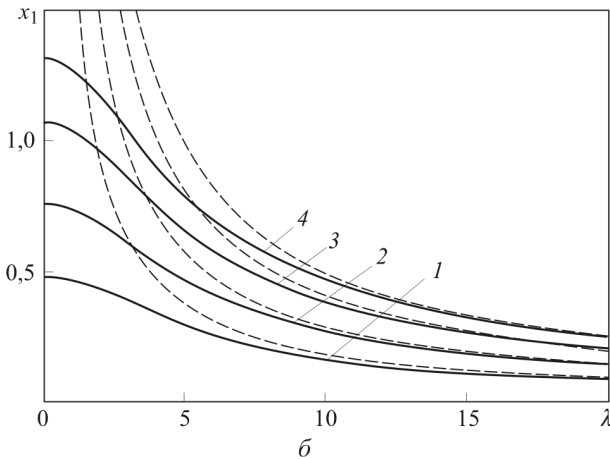
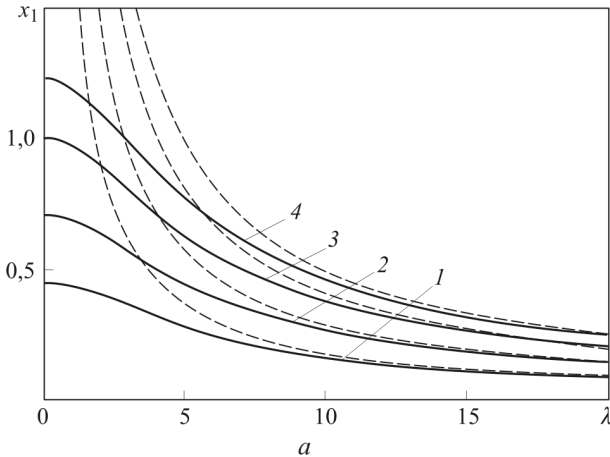


Рис. 3. Зависимость $x_1(\lambda)$ при $\gamma = 0$ (а) и $0,5$ (б): $R = 0,2$ (1), $0,5$ (2), $1,0$ (3) и $1,5$ (4)

с учетом выражений (9) и (10), получаем

$$\sin x_0 = \frac{\gamma}{M(0)} - \frac{dx_1^2}{2M(\Delta\Omega)} \cos(P(\Delta\Omega)). \quad (10)$$

При $d \gg 1$ $\Delta \approx d^2$ при любых x_0 в силу ограниченности функции $\cos x_0$. Вместе с тем из уравнения (9) следует, что x_1^2 имеет порядок d^{-2} , в то время как во второе слагаемое из выражения (10) x_1^2 входит с коэффициентом d и им можно пренебречь по сравнению с первым. Окончательно при $|d| \gg 1$ получим

$$x_1 = \frac{\varepsilon}{d} M(\Delta\Omega); \quad (11)$$

$$\sin x_0 = \frac{\gamma}{M(0)}. \quad (12)$$

Тогда для ФАП первого порядка

$$x_1 = \frac{4\sqrt{R}}{\lambda}.$$

Эта зависимость $x_1(\lambda)$ показана на рис. 3 штриховыми кривыми.

Соотношение (11) подтверждает первоначальное предположение о малости x_1 , соотношение (12) задает установившуюся фазовую ошибку в невозмущенной ФАП, когда гармоническая помеха отсутствует; тем самым подтверждается первоначальное предположение (6) о наличии реакций ФАП на узкополосные воздействия, частоты которых находятся соответственно внутри и вне полосы синхронизации.

Отметим также, что при $|d| \gg 2$ из системы уравнений (7) получаем

$$\psi = x_0 + P(\Delta\Omega). \quad (13)$$

Для ФАП первого порядка по уравнению (10) находим

$$\sin x_0 = \gamma - \frac{x_1^2 d}{2};$$

тогда при $\gamma = 0,5$

$$x_0 = \arcsin\left(\gamma - \frac{x_1^2 d}{2}\right);$$

при $\gamma = 0$

$$x_0 = \arcsin \frac{x_1^2 d}{2}.$$

Зависимости $x_0(\lambda)$ при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0,5$ при $R = 1$ изображены на рис. 4 (кривая 1 и 2 соответственно).

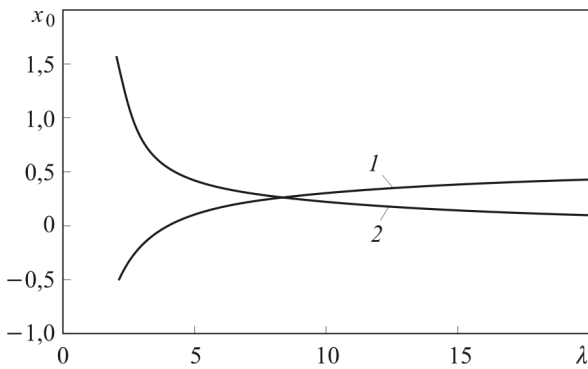


Рис. 4. Зависимости $x_0(\lambda)$

В заключение запишем соотношения (8) в виде системы уравнений относительно $x = \cos P(\Delta\Omega)$ и $y = \sin P(\Delta\Omega)$:

$$\begin{aligned} ax - by &= A; \\ bx + ay &= B. \end{aligned} \quad (14)$$

где $a = \cos x_0$; $b = \sin x_0$; $A = \frac{x_1 \Delta}{\varepsilon M d} \cos \psi + \frac{1}{2} \frac{M}{d} \sin 2x_0$; $B = \frac{x_1 \Delta}{\varepsilon M d} \sin \psi - \frac{1}{2} \frac{M}{d} (1 + \cos 2x_0)$.

В результате находим

$$x = Aa + Bb,$$

после преобразований получаем соотношение

$$x_1 d \cos P(\Delta\Omega) = \varepsilon M(\Delta\Omega) \cos(x_0 - \psi). \quad (15)$$

Из первого уравнения системы (16) аналогично запишем

$$by = ax - A,$$

после преобразований получаем равенство

$$x_1 d \sin P(\Delta\Omega) = -M(\Delta\Omega) [\varepsilon \sin(x_0 - \psi) + x_1 \cos(x_0)]. \quad (16)$$

Положим $\sin x_0$ в соотношении (11) равным $+1$ или -1 согласно знаку $\Delta\Omega$. Тогда получим критическое значение коэффициента x_1 первой гармоники

$$x_{1k} = \left(\frac{\gamma}{M(0)} + \operatorname{sgn}(\Delta\Omega) \right) \frac{2M(\Delta\Omega)}{d \cos P(\Delta\Omega)}.$$

Далее, если в уравнении (9) положить $\cos x_0 = 0$ ($\gamma = 1$), то

$$x_{1k} = \varepsilon M(\Delta\Omega) / d = \sqrt{R_k} M(\Delta\Omega) / d, \quad (17)$$

тогда

$$R_k = \left(\frac{\gamma}{M(0)} + \operatorname{sgn}(\Delta\Omega) \right) \frac{2M(\Delta\Omega)}{d \cos P(\Delta\Omega)}. \quad (18)$$

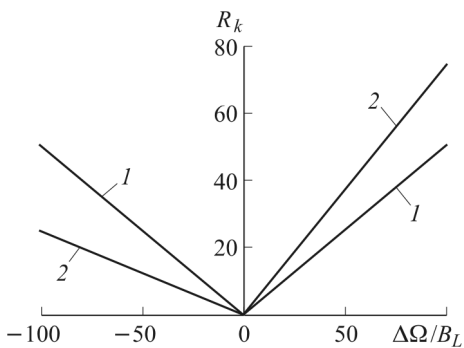


Рис. 5. Зависимость критического значения R_k

Зависимость критического значения R_k от нормированной расстройки приведена на рис. 5.

Заключение. Из рис. 5 следует, что подверженность ФАП помехе усиливается, если спектральные положения помехи и сигнала находятся на противоположных сторонах от частоты покоя управляемого генератора.

Таким образом, в результате применения метода гармонического баланса получены динамические характеристики системы ФАП.

Найдено значение первой гармоники предполагаемого решения ДУ ФАП и ее критическое значение.

Кроме того, получено критическое значение отношения помеха/сигнал, в результате следует вывод, что уязвимость ФАП к воздействию помехи увеличивается, если частоты сигнала и помехи находятся по разные стороны от частоты покоя управляемого генератора.

Найдены приближенные (асимптотические) значения первой гармоники (11) предполагаемого решения ДУ ФАП. Эти значения могут быть использованы для анализа характеристик ФАП, когда на вход ФАП подается комбинированное воздействие (сигнал + помеха + шум) и ДУ ФАП принимает вид стохастического ДУ (3), (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. – М.: Сов. радио, 1977. – 598 с.
2. Шахтарин Б. И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998. – 488 с.
3. Blanchard A. Interference in phase-locked loops // IEEE Trans. 1974. Vol. AES-10, No. 5. – P. 686–697.
4. Kantak A., Davarian F. Performance of PLL in the presence of a CW interferer // Proc. of IEEE Global Telecommunications conference Atlanta, GA. USA 26-29 November 1984. – P. 230–236.
5. Levitt B. K. Carrier tracking loop performance in the presence of a strong CW interference // IEEE Trans. – 1981. – Vol. COM-29, No. 6. – P. 911–916.

Статья поступила в редакцию 24.11.2010

Ю.А. Сидоркина родилась в 1969 г., окончила МАИ им. С.Орджоникидзе в 1991 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области новых методов в устройствах синхронизации систем связи.

Yu.A. Sidorkina (b. 1969) graduated from the Moscow Aviation Institute n.a. S. Ordzhonikidze in 1991. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of new methods in synchronization devices of communication systems.

А.А. Ковальчук родилась в 1986 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2010 г. Аспирантка кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области статистических характеристик систем синхронизации.

A.A. Koval'chuk (b. 1986) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2010. Post-graduate of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of statistical characteristics of synchronization systems.

М.А. Рязанова родилась в 1984 г., окончила Калужский филиал МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2008 г. Аспирантка кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области синхронизации в системах связи и радионавигации.

M.A. Ryazanova (b. 1984) graduated from Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University in 2008. Post-graduate of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of synchronization in systems of communication and radionavigation.