УДК 621.001

Е. М. Воронов, А. Л. Репкин,
Чжан Сянь Цзянь

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ СТАБИЛЬНО-ЭФФЕКТИВНЫЕ КОМПРОМИССЫ НА ОСНОВЕ АКТИВНЫХ ИГРОВЫХ РАВНОВЕСИЙ В ЗАДАЧАХ КОНФЛИКТНО-ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Сформированы новые классы стабильно-эффективных решений на основе активных равновесий с модификацией и расширением существующих стабильно-эффективных компромиссов для обеспечения универсальности их построения в различных задачах конфликтного управления. Рассмотрено практическое применение модифицированных стабильно-эффективных компромиссов с анализом свойств конфликтно-оптимальных решений на простейшей задаче прогноза динамики конфликта. Предложена последовательность решений угроз–контругроз на основе равновесия по Вайсборду–Жуковскому для трех и более участников конфликтной ситуации.

E-mail: alexr_bmstu@mail.ru

Ключевые слова: *активное равновесие, стабильно-эффективный компромисс, прогноз динамики конфликта, конфликтное управление, оптимальная стратегия.*

В рамках теории игр могут быть описаны конфликты в различных задачах экономики, биологии, механики, где можно выделить взаимодействующие друг с другом объекты, в которых так или иначе всегда присутствует элемент неопределенности. Актуальной задачей теории игровых подходов в управлении является поиск среди множества всех возможных ситуаций развития конфликта некоторого решения, имеющего необходимые свойства равновесия для данной постановки задачи. При этом часто нужно обеспечить требования стабильности и эффективности полученного решения, что для большинства игровых задач представляет значительные трудности в вычислительном плане.

Для поиска оптимальных управлений разработано 14 вариантов стабильно-эффективных компромиссов (СТЭК) на основе Нэш–УКУ (Угроз–КонтрУгроз)–Парето–Шепли комбинаций, позволяющих находить конфликтно-оптимальное решение игровых задач в условиях обязательных и необязательных соглашений [1]. В связи с большой вычислительной сложностью этапа прогноза динамики конфликта при расчете конфликтно-оптимального управления предлагается расширить существующий набор методов определения равновесных решений, используя теорию активных равновесий, изложенную в работе Э.Р. Смольякова [2]. При этом дополнительно формируется новый класс равновесных УКУ-решений на основе равновесия по Вайсборду–Жуковскому для трех и более участников конфликтной ситуации. Далее приведены теоретические определения равновесных решений, служащих основой для формирования модифицированных СТЭК.

Модифицированные СТЭК на основе активных равновесий в двухкоалиционных задачах. Рассмотрим определение и существование активных равновесий для ситуации бескоалиционного взаимодействия двух игроков со скалярным управлением в двухмерном пространстве R^2 (множество Q допустимых точек — компактное; управления игроков — q_1 и q_2). Для каждого из игроков существует свой функционал потерь, подлежащий оптимизации (далее будем рассматривать случай минимизации показателей), следующего общего вида:

$$f_1(\mathbf{q}) = f_1(q_1, q_2) \quad \text{и} \quad f_2(\mathbf{q}) = f_2(q_1, q_2)\,. \tag{1}$$

Данные функционалы могут быть определены не только на рассматриваемой области Q, но и на всем пространстве R^2, причем они являются непрерывными на всей области определения; $Q(\bar{\mathbf{q}})$ — сечение множества Q при фиксированном значении переменной $\bar{\mathbf{q}}$; $\text{Пр}_{Q_i} Q = Q_i$ $(i = 1,\ 2)$ — проекция множества Q на пространство $Q_i \in R^1$; $q_1, q_2 \langle q_1 \rangle$ — точка (ситуация, стратегия), в отношении которой известно, что она получена при последовательном выборе сначала точки $q_1 \in Q_1$, а затем — точки $q_2 \in Q(q_1)$.

Слабые активные равновесия. Далее сформулируем основные определения при получении слабых симметричных активных равновесий.

Определение 1. Точка $\bar{\mathbf{q}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ называется слабо экстремальной для первого игрока, если в ней $Q(\bar{q}_2) = \bar{q}_1$ либо каждой точке q_1 из сечения $Q(\bar{q}_2)$ первого игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одно состояние $q_2 \langle q_1 \rangle \in Q(q_1)$ второго игрока так, чтобы имело место отношение

$$\max_{q_1 \in Q(\bar{q}_2)} f_1(q_1, q_2 \langle q_1 \rangle) = f_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2)\,. \tag{2}$$

Определение 1 имеет естественный игровой смысл, согласно которому ситуация $\bar{\mathbf{q}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in Q$ — слабо экстремальна для первого игрока, если какую бы точку (стратегию) $q_1,\ q_1 \neq \bar{q}_1$ из допустимого ему (при отклонении от рассматриваемой ситуации $\bar{\vec{q}}$) множества точек $Q(\bar{q}_2)$ он ни выбрал, у второго игрока на каждую из этих точек q_1 (угроза) найдется ответный выбор хотя бы одной такой точки $q_2 \langle q_1 \rangle$ из множества $Q(q_1)$ (контругроза), которая приведет к ситуации q_1, q_2, когда первый игрок получит не больше, чем в ситуации $\bar{q}_1, \bar{q}_2$.

Аналогично дается определение слабо экстремальной ситуации для второго игрока. В этом случае аналог условия (2) имеет вид

$$\max_{q_2 \in Q(\bar{q}_1)} f_2 \left(q_1 \left\langle q_2 \right\rangle, q_2 \right) = f_2 \left(\bar{q}_1, \bar{q}_2 \right). \qquad (3)$$

Совокупности всех точек, слабо экстремальных для первого и второго игроков, обозначаются соответственно через множества A_1 и A_2.

Определение 2. Ситуация $\bar{\mathbf{q}} \left(\bar{q}_1, \bar{q}_2 \right) \in Q$, слабо экстремальная для любого из игроков ($i = 1, 2$), является ситуацией *слабого активного равновесия для данного участника*, при этом свойство активности равновесия имеет следующий смысл: решение одного участника является многообъектно устойчивым на множестве возможных действий другого участника конфликта. Это является аналогией определения множеств A_1 и A_2.

Определение 3. Ситуация $\bar{\mathbf{q}} \left(\bar{q}_1, \bar{q}_2 \right) \in Q$ называется *ситуацией симметричного слабого активного равновесия*, если она одновременно слабо экстремальна для каждого игрока ($i = 1, 2$), т.е. если выполняется условие $\left(\bar{q}_1, \bar{q}_2 \right) \in A_1 \cap A_2$, то ситуация $\bar{\mathbf{q}}$ принадлежит пересечению областей слабого равновесия каждого из игроков.

Очевидно, что если предложенная игрокам ситуация является ситуацией слабого активного равновесия, то ни у одного из них не будет мотивов для отклонения от нее в целях улучшения своего выигрыша, если другой согласится с данной ситуацией, поскольку у него найдется ответная стратегия, которая не позволит первому реализовать свой выигрыш.

Понятия слабого и симметричного слабого активных равновесий будут служить основой для построения понятия сильного активного равновесия, которое позволит несколько сузить область слабых активных равновесий и получить более устойчивый вид равновесия.

Сильные активные равновесия. Полученные слабые активные равновесия, содержащие в виде частных случаев равновесие по Нэшу и седловые точки, определяют приемлемые для ряда игр понятия решений. Основанием для поиска других равновесий может служить желание сузить множество равновесных решений, поскольку симметричное слабое активное равновесие обычно не единственно, причем сузить так, чтобы получить более сильное, более устойчивое равновесие. Если игрокам предложена некоторая ситуация $\mathbf{q} \in A_1$ и второй игрок с ней согласился, то и первый игрок будет вынужден ее принять, по крайней мере с точки зрения "игры предпочтений". Чем выгоднее точка $\mathbf{q}$ для второго игрока, тем больше оснований, что он с ней согласится, а тем самым и больше оснований, что она будет принята обоими игроками. Следовательно, выделить на множестве A_1 более предпочтительные для второго игрока ситуации — значит выделить более устойчивые, более равновесные точки на множестве Q.

Далее предлагается усилить понятие слабой экстремальности, даваемое определением 1. В этих определениях не предъявляется никаких требований к стратегиям q_2 и q_1 в ситуациях, принадлежащих A_1 и A_2.

Рассмотрим ситуацию для первого игрока. Естественно ожидать, что при каждом $q_1 \in \text{Пр}_{Q_1} Q$ второй игрок предпочтет такие ситуации, которые сулят ему наибольший выигрыш. В связи с этим можно дать следующее определение экстремальности.

Определение 4. Ситуация $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in A_1$ является экстремальной для первого игрока, если образующая ее стратегия $\bar{q}_2$ второго игрока удовлетворяет условию

$$\max_{q_2 \in A_1(\bar{q}_1)} f_2(\bar{q}_1, q_2) = f_2(\bar{q}_1, \bar{q}_2), \tag{4}$$

и экстремальной для второго игрока, если образующая ее стратегия $\bar{q}_1$ первого игрока удовлетворяет условию

$$\max_{q_1 \in A_2(\bar{q}_2)} f_1(q_1, \bar{q}_2) = f_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2). \tag{5}$$

Множества всех ситуаций $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in A_i$, $(i = 1,\ 2)$, удовлетворяющих условиям (4) и (5), обозначим через B_1 и B_2 соответственно.

Очевидно, что множество B_1 — это множество наиболее предпочтительных вторым игроком ситуаций на множестве A_1, а множество B_2 — это множество наиболее предпочтительных первым игроком ситуаций на множестве A_2. Таким образом, точка $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$, экстремальная для одного из игроков, является ситуацией активного равновесия для данного игрока.

Определение 5. Ситуация $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in Q$ является ситуацией симметричного активного равновесия, если она экстремальна для каждого игрока $(i = 1,\ 2)$, т.е. если $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$.

Определение 6. Ситуация $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in Q$ является сильно экстремальной для первого игрока (*сильное активное равновесие*), если точка $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in A_1$ и стратегия $\bar{x}_2$ удовлетворяют условию

$$\max_{q_2 \in Q(\bar{q}_1)} f_2(\bar{q}_1, q_2) = f_2(\bar{q}_1, \bar{q}_2), \tag{6}$$

и является сильно экстремальной для второго игрока, если точка $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in A_2$ и стратегия $\bar{x}_1$ удовлетворяют условию

$$\max_{q_1 \in Q(\bar{q}_2)} f_1(q_1, \bar{q}_2) = f_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2). \tag{7}$$

Множества всех ситуаций $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in A_1$ и $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in A_2$, удовлетворяющих условиям (6) и (7) соответственно, обозначим через C_1 и C_2. При этом равновесие по Нэшу всегда является подмножеством множества $C_1 \cap C_2$. Точки, образующие множества C_i, являются сильно экстремальными и образуют подмножество множества экстремальных ситуаций B_1.

Определение 7. Ситуация $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in Q$ называется ситуацией *симметричного сильного активного равновесия*, если она одновременно сильно экстремальна для каждого игрока ($i = 1,\ 2$): $C = C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$. Множество ситуаций C сильного активного равновесия является подмножеством множества активных равновесий B.

В случае двух участников ($i = 1,\ 2$) *всякое решение Нэша* (q_1^*, q_2^*) является *симметричным сильным равновесием* и удовлетворяет уравнениям

$$\max_{q_2 \in Q\left(q_1^*\right)} f_2\left(q_1^*, q_2\right) = f_2\left(q_1^*, q_2^*\right); \tag{8}$$

$$\max_{q_1 \in Q\left(q_2^*\right)} f_1\left(q_1, q_2^*\right) = f_1\left(q_1^*, q_2^*\right). \tag{9}$$

На основе определений слабых и сильных активных равновесий построены эффективные вычислительные схемы формирования оптимальных решений на сетевом этапе реализации модифицированных СТЭК [3].

Пример задачи конфликтного взаимодействия двух систем. Для анализа эффективности работы модифицированных СТЭК рассмотрим формирование алгоритмов нахождения областей слабых и сильных активных равновесий для упрощенной модели конфликтного взаимодействия двух систем-коалиций. В качестве иллюстрации выберем простейшую модель динамики средних численностей, описывающую конфликтную ситуацию взаимодействия систем с наличием групп активных и пассивных объектов. Управляющие параметры для обеих систем имеют вид скалярного управления: решаем задачу выбора долей активных средств, направляемых для воздействия по группам активных или пассивных объектов конфликтно взаимодействующей системы.

Математическая модель и функционалы качества имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_1(k) - \bar{P}_{31} q_{31} \cdot 2x_3(k); \\
x_2(k+1) &= x_2(k) - \bar{P}_{32}(1 - q_{31}) \cdot 2x_3(k); \\
x_3(k+1) &= x_3(k) - \bar{P}_{13} q_{13} x_1(k); \\
x_4(k+1) &= x_4(k) - \bar{P}_{14}(1 - q_{13}) x_1(k);
\end{aligned} \tag{10}$$

$$J_1 = L_{11} \cdot \left[x_3^2(T) - x_1^2(T)\right] + L_{12}\left[x_4^2(T) - x_2^2(T)\right] \to \min;$$

$$J_2 = L_{21} \cdot \left[x_1^2(T) - x_3^2(T)\right] + L_{22}\left[x_2^2(T) - x_4^2(T)\right] \to \min;$$

$$x_{10} = 12; \quad x_{20} = 12; \quad x_{30} = 8; \quad x_{40} = 6; \quad \bar{P}_{ij} = 0{,}8;$$

$$L_{11} = 0{,}3; \quad L_{12} = 0{,}7; \quad L_{21} = 0{,}7; \quad L_{22} = 0{,}3,$$

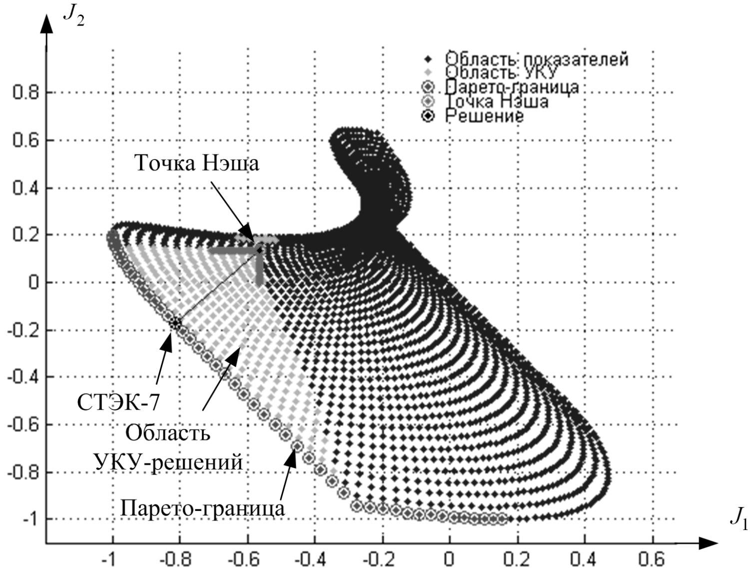


Рис. 1. Формирование решения на основе обобщенного СТЭК-7

где P_{ij} — эффективность воздействия одного объекта i-го вида одной системы на один объект j-го типа другой системы, $0 \leqslant P_{ij} \leqslant 1$; q_{ij} — доли активных средств воздействия на активные средства партнера, $0 \leqslant q_{ij} \leqslant 1$; $(1 - q_{ij})$ — доля активных средств воздействия на пассивные средства партнера; x_i – текущая средняя численность объектов i-го типа (x_{i0} — исходные численности); L_{ij} — тактические приоритеты по воздействию на активные и пассивные объекты систем.

Область значений показателей приведена на рис. 1.

Области слабых активных равновесий. Рассмотрим получение областей слабых равновесий для каждой из сторон конфликта, а также области симметричных слабых равновесий на первом этапе комбинированного алгоритма оптимизации (алгоритм глобального сетевого анализа). На этом этапе для задачи расчета оптимальных параметров задается ортогональная равномерная сеть переменных. Поскольку параметры оптимизации изменяются равномерно на интервале $[0;\ 1]$, то имеет место ортогональная область изменения переменных с определенным шагом дискретизации, на которой по каждой оси откладываются значения управляющей переменной одной из систем. Для каждой системы построены области слабых равновесий, а также симметричная область слабых равновесий (рис. 2).

На рис. 3 приведено сравнение области УКУ и симметричных слабых равновесий. Из рис. 3 следует, что указанные области для данной модели совпадают. Этот факт можно проверить, сравнив массивы точек обеих областей: они идентичны, включая и их размерности. Это является частным случаем совпадения этих множеств. В соответствии

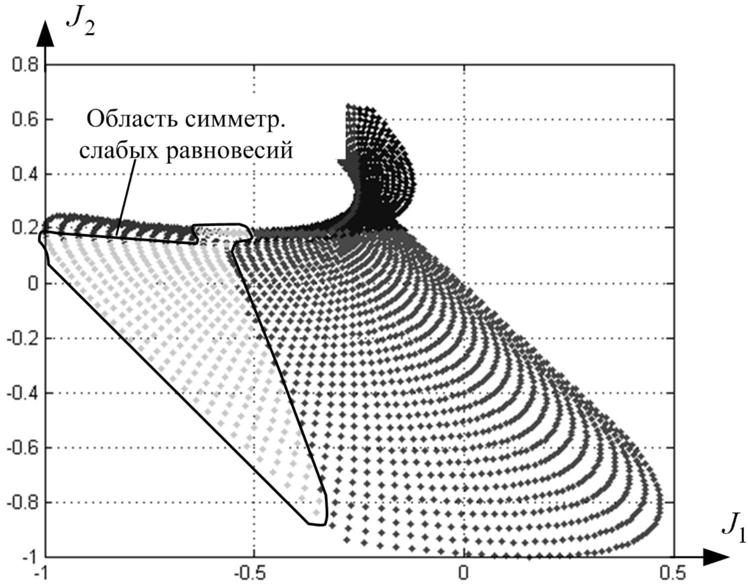


Рис. 2. Область симметричных слабых равновесий

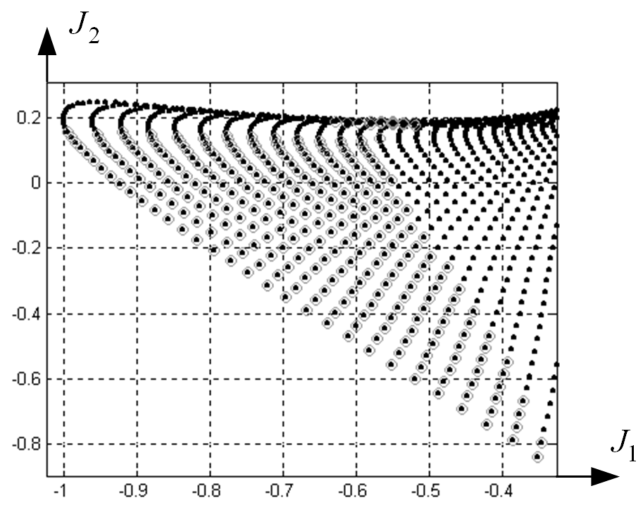


Рис. 3. Сравнение областей УКУ (●) и симметричных слабых равновесий (○)

с известным определением УКУ [1] в общем случае можно утверждать, что область УКУ всегда является подобластью области слабых равновесий и определяется путем формирования дополнительного условия на процесс получения области симметричных слабых равновесий. При этом из-за дополнительных условий на получение точек УКУ время расчета в случае использования слабых активных равновесий значительно меньше и зависит от размерности задачи.

Области сильных активных равновесий. Рассмотрим получение областей сильных равновесий для каждой из сторон конфликта, а так-

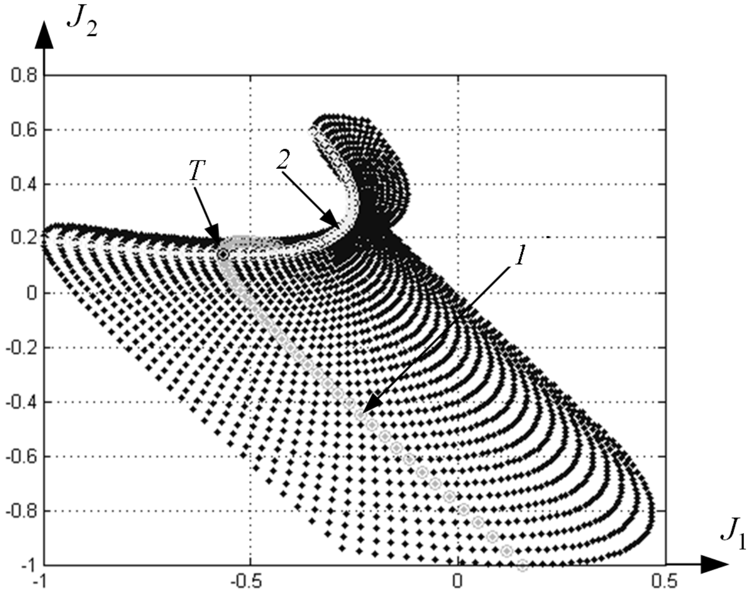


Рис. 4. Области сильного равновесия для первой (*1*) и второй (*2*) систем и точка (Т) симметричного сильного равновесия

же области симметричных сильных равновесий. Области сильных активных равновесий являются более межобъектно устойчивыми видами равновесий и формируются путем усиления понятия слабых равновесий по функционалу противоположной стороны конфликта.

Области несимметричных и симметричных сильных равновесий построены для той же модели, которая использовалась при исследовании слабых равновесий (рис. 4).

Видно, что пересечение областей сильных активных равновесий имеет место в одной точке области показателей, причем она располагается в области симметричных слабых активных равновесий.

На рис. 5 приведено сравнение симметричного сильного равновесия с точкой Нэша.

Точки Нэша и симметричного сильного равновесия очень близки; разница лишь в том, что точка Нэша вычислена точным алгоритмом, а точка сильного активного равновесия найдена приближенно на ортогональной сети параметров. Поэтому симметричное сильное равновесие можно использовать при получении СТЭК как приближенное решение или субоптимальный алгоритм, а при отсутствии равновесия по Нэшу — как решение в более широких условиях существования.

Таким образом, рассмотренные методы получения сильных и слабых активных равновесий расширяют область существования равновесий в задачах конфликтного противодействия систем и могут быть использованы достаточно эффективно в совокупности с известными

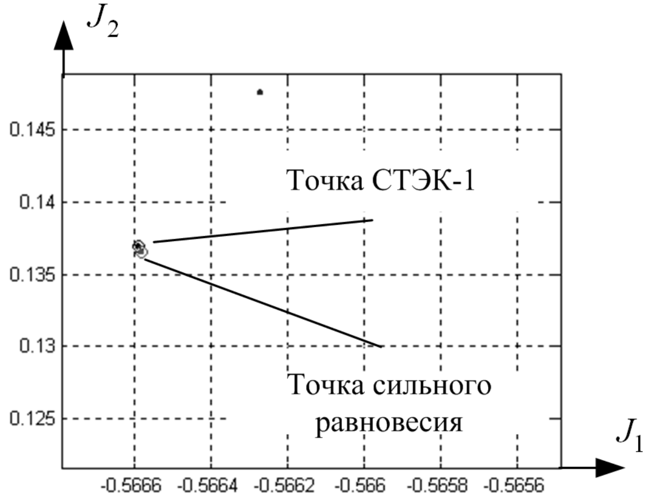


Рис. 5. Сравнение точки Нэша с областью симметричных сильных равновесий

методами оптимизации на основе СТЭК и в виде самостоятельного математического аппарата для получения приближенных сетевых решений на начальном этапе оптимизации. Проведенные расчеты в различных конфликтных задачах [1, 3–5] показали эффективность и взаимосвязь известных СТЭК с их модификациями на основе активных равновесий Э.Р. Смольякова.

Модифицированные УКУ-решения и активные равновесия для трех и более коалиций. Ранее были рассмотрены различные модификации активных равновесий для случая двухкоалиционного взаимодействия. Каждая коалиция может представлять при этом как один объект, так и группу объектов, объединенных конкретными целями, которые выражаются скаляризованным показателем качества данной коалиции (игрока). Расширение и обобщение определений равновесных решений для случая трех и более коалиций основываются на модифицированных вариантах нахождения УКУ-решений, которые обладали бы дополнительными свойствами устойчивости и эффективности.

Рассмотрим следующую постановку игровой задачи. Пусть для каждого i-го игрока на метрическом пространстве $Q_i \in R^1$, $i = \overline{1, n}$, задан непрерывный функционал $J_i(\vec{q})$, $i = \overline{1, n}$, зависящий в общем случае от вектора управления всех игроков, т.е. $\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$. Множество $G \in R^n$ представляет собой произведение $Q_1 \times \ldots \times Q_n$ — область значений параметров; $G(\mathbf{q}_i)$ — сечение множества G при фиксированном векторе управления $\mathbf{q}_i$; $\mathrm{Pr}_G P$ — проекция множества P на Q. Выражение $\mathbf{q}_{n\setminus i}\langle\mathbf{q}\rangle$ означает выбор управления $\mathbf{q}_{n\setminus i}$ всех игроков, за исключением i-го игрока, на доступном им множестве после того, как i-й игрок определится со своим управлением $\mathbf{q}_i \in Q_i$; выражение $\mathbf{q}^* \| \mathbf{q}_i$ означает выбор стратегии i-го игрока при фиксированном суммарном управляющем векторе всех игроков. Далее во всех определениях равновесий предполагается, что каждый из игроков, выбирая управление (стратегию) $\vec{q}_i \in Q_i$, стремится минимизировать свой показатель качества (для случая максимизации следует полагать $\tilde{J}_i = -J_i$, $i = \overline{1, n}$).

На основе сравнения иерархической схемы построения и существования последовательно усиливающихся равновесий по Смольякову [2] далее предлагается последовательность модифицированных УКУ-решений, начиная от наиболее слабого вида активных равновесных решений и заканчивая наиболее сильным УКУ-равновесием.

Свойства УКУ в слабых равновесных решениях на основе A_i-равновесий по Смольякову (A_i^{c}-равновесие) — наиболее слабое из существующих равновесных решений. Согласно его определению, для получения множества A_i^{c}-равновесий для i-го игрока используется информация только об изменении собственного показателя.

Определение 8. Точка (стратегия) $\mathbf{q}^* = \left(\mathbf{q}_i^*, \mathbf{q}_{n\backslash i}^*\right) \in Q$ является A_i^{c}-равновесной для i-го игрока в том случае, если на любое изменение управления $\mathbf{q}_i \neq \vec{q}_i^*$ существует хотя бы одна ответная стратегия остальных игроков $\mathbf{q}_{n\backslash i}\langle\mathbf{q}_i\rangle$, при которой i-й игрок получает меньший выигрыш по сравнению с исходной точкой $\vec{q}^*$, либо множество $G\left(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{n\backslash i}^*\right)$ состоит из одной точки. Условие для нахождения A_i^{c}-равновесий имеет вид

$$J_i\left(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{n\backslash i}\left\langle\vec{q}_i\right\rangle\right) \geqslant J_i\left(\mathbf{q}_i^*, \mathbf{q}_{n\backslash i}^*\right). \tag{11}$$

Множества A_i^{c}-равновесий могут быть получены для каждого игрока и носят характер несимметричных равновесий. Для получения множества симметричных равновесий, т.е. набора таких решений, которые являлись бы равновесными для всех игроков одновременно, необходимо рассмотреть пересечение всех несимметричных множеств равновесных решений

$$A^{\text{c}} = \bigcap_i A_i^{\text{c}}. \tag{12}$$

Слабые УКУ-решения Вайсборда–Жуковского на основе индивидуальных контругроз (A_i^j-равновесие). Данный вид равновесия является естественным усилением рассмотренных ранее множеств A_i^{c}-равновесий.

Определение 9. Точка $\mathbf{q}^* = \left(\mathbf{q}_1^*, \mathbf{q}_2^*, \ldots, \mathbf{q}_n^*\right)$ является слабым УКУ-решением i-го игрока относительно j-го игрока (A_i^j-равновесие), если выполняются условия

$$J_i\left(\mathbf{q}^* \| \, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j^*\right) < J_i\left(\mathbf{q}^* \| \, \mathbf{q}_i^*, \mathbf{q}_j^*\right); \tag{13a}$$

$$J_i\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i,\vec{q}_j\right)\geqslant J_i\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i^*,\mathbf{q}_j^*\right);\qquad J_j\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j\right)<J_j\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j^*\right). \tag{13б}$$

Условие (13а) — угроза i-го игрока относительно j-го игрока, реализуемая путем замены собственного вектора управления $\mathbf{q}_i^*$ на $\mathbf{q}_i$ таким образом, чтобы улучшить значение своего показателя. Условия (13б) — контругроза j-го игрока в ответ на возникшую угрозу, выражаемая заменой вектора управления $\mathbf{q}_j^*$ j-го игрока на $\mathbf{q}_j$ в целях наказания i-го игрока по его показателю (в результате чего i-й игрок будет поставлен в ситуацию, где значение по его показателю станет хуже, чем если бы i-й игрок оставался в исходной точке $\mathbf{q}^*$).

Формирование множества несимметричного A_i-равновесия происходит путем *объединения* всех возможных ситуаций A_i^j-равновесий:

$$A_i=\bigcup_i A_i^j,\quad j=\overline{1,n},\quad j\neq i. \tag{14}$$

Следующим шагом является построение симметричного A-равновесия путем *пересечения* полученных множеств несимметричных A_i-равновесий:

$$A=\bigcap_i A_i. \tag{15}$$

Следует отметить, что полученный вид равновесных решений соответствует случаю некооперативной игры. Предположение, что игроки могут объединяться в коалицию при реализации контругрозы в ответ на угрозу одного из игроков, в общем случае не действует. Множество УКУ-решений игры в кооперативном варианте будет лишь подмножеством области равновесных УКУ-решений некооперативной игры, определяемых согласно независимым парным противодействиям.

УКУ-решения на основе индивидуальных контругроз с наличием сильной угрозы ($\tilde{A}_i^j$-равновесие). Одним из вариантов относительного сужения каждого из множеств несимметричных A_i^j-равновесий является построение дополнительных ограничений при их получении — альтернативный вариант более устойчивых несимметричных A_i^j-равновесий.

Определение 10. Точка $\mathbf{q}^*$ является УКУ-решением i-го игрока относительно j-го игрока с наличием сильной угрозы ($\tilde{A}_i^j$-равновесие), если выполняются следующие условия:

$$J_i\left(\mathbf{q}\|\,\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j^*\right)<J_i\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i^*,\mathbf{q}_j^*\right);\quad J_j\left(\mathbf{q}\|\,\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j^*\right)>J_j\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i^*,\mathbf{q}_j^*\right); \tag{16а}$$

$$J_i\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j\right)\geqslant J_i\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i^*,\mathbf{q}_j^*\right);\quad J_j\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j\right)<J_j\left(\mathbf{q}^*\|\,\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j^*\right). \tag{16б}$$

Во втором условии (16а) заложен смысл активности угрозы: i-й игрок только в том случае будет изменять свою стратегию, если одновременно с улучшением своего показателя он будет угрожать j-му игроку по его показателю, ухудшая его по сравнению с исходным решением. Аналогично могут быть построены множества несимметричных $\tilde{A}_i$- и симметричных $\tilde{A}$-равновесий.

Области сильных УКУ-решений на основе индивидуальных сильных контругроз ($\bar{A}_i^j$-равновесие). Данный вид равновесий представляет собой дальнейшее усиление характера получаемых слабых УКУ-решений путем дополнительных ограничений на получение множеств несимметричных A_i^j-равновесий.

Более сильное равновесие на общем множестве можно получить следующим образом: при построении множеств A_i^j-равновесий при контругрозе j-го игрока на нейтрализацию угрозы i-го игрока предлагается учитывать тот факт, что все остальные игроки будут нейтрально себя вести, не участвуя в дальнейшем изменении формируемой j-м игроком контругрозы с собственных позиций эффективности.

Определение 11. Точка $\mathbf{q}^*$ является сильным УКУ-решением i-го игрока относительно j-го игрока с наличием сильной угрозы ($\bar{A}_i^j$-равновесие), если для нее выполняются следующие условия (аналогично второму условию (13б)):

$$J_k\left(\mathbf{q}^* \| \, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j\right) \leqslant J_k\left(\mathbf{q}^* \| \, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j^*\right), \quad k=\overline{1,n}, \;\; k \neq \{i, j\}. \qquad (17а)$$

Условия, накладываемые на показатели всех остальных игроков, не участвующих в противодействии i-го и j-го игроков, могут быть усилены путем рассмотрения их неухудшения относительно исходной точки предполагаемого $\bar{A}_i^j$-равновесия $\left(\mathbf{q}^* \| \, \mathbf{q}_i^*, \mathbf{q}_j^*\right)$:

$$J_k\left(\mathbf{q}^* \| \, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j\right) \leqslant J_k\left(\mathbf{q}^* \| \, \mathbf{q}_i^*, \mathbf{q}_j^*\right), \quad k=\overline{1,n}, \;\; k \neq \{i, j\}. \qquad (17б)$$

Получение множества несимметричных $\bar{A}_i$-равновесий и множества симметричного $\bar{A}$-равновесия происходит аналогично формулам (14) и (15).

Полное УКУ-равновесие. Полное УКУ-равновесие можно также трактовать с точки зрения конфликтных A_i-равновесий.

Определение 12. Точка $\mathbf{q}^*$ является полным УКУ-решением коалиции K относительно контркоалиции $N \backslash K$ ($\bar{A}_i^{\text{п}}$-равновесие), если для нее выполняются следующие условия:

$$J_K\left(\mathbf{q}_K, \mathbf{q}_{N \backslash K}^*\right) < J_K\left(\mathbf{q}_K^*, \mathbf{q}_{N \backslash K}^*\right); \qquad (18а)$$

$$\begin{aligned} & J_K\left(\mathbf{q}_K, \mathbf{q}_{N \backslash K}\right) \geqslant J_K\left(\mathbf{q}_K^*, \mathbf{q}_{N \backslash K}^*\right); \\ & J_{N \backslash K}\left(\mathbf{q}_K, \mathbf{q}_{N \backslash K}\right) < J_{N \backslash K}\left(\mathbf{q}_K, \mathbf{q}_{N \backslash K}^*\right). \end{aligned} \qquad (18б)$$

Фактически при разбиении множества игроков на две подгруппы — коалицию K и контркоалицию $N \backslash K$ — сначала решается задача построения показателей J_K и $J_{N \backslash K}$ для полученного разбиения, а затем задача нахождения множества УКУ-решений по Вайсборду–Жуковскому [1] для случая двух игроков-коалиций. Полученное множество можно трактовать как область несимметричных коалиционных УКУ-решений. Данные множества могут быть получены для всевозможных попарных разбиений игроков на коалицию и контркоалицию (число таких разбиений — n_K). В результате на их основе может быть построено множество симметричных коалиционных полных УКУ-решений — $A^{\text{п}}$-равновесие, определяемое по формуле

$$A^{\text{п}} = \bigcap_{i=1}^{n_K} A_i^{\text{п}}, \quad K = \Big(\big[\{1\}, \{\overline{2,n}\}\big], \ldots, \big[\{1, \ldots, l-1\}, \{l, \ldots, n\}\big], \ldots$$
$$\ldots, \big[\{n\}, \{\overline{1, n-1}\}\big]\Big). \qquad (19)$$

Множество решений, полученное на основе коалиционных объединений игроков, носит более узкий смысл и в общем случае может быть и пустым множеством. В этом смысле множества, полученные на пересечении объединений множеств слабого УКУ (14) при рассмотрении индивидуальных контругроз, гарантированно будут содержать определенное конечное число решений. Как вариант, можно рассмотреть разбиение множества игроков, когда коалиция K всегда состоит только из одного игрока (число множеств $A_K^{\text{п}}$ при этом будет $n_K = n$), что позволяет провести определенную аналогию с множествами бескоалиционных УКУ-решений.

Рассмотренные модифицированные стабильно-эффективные компромиссы, дополненные алгоритмами условно-гарантированных решений на несимметричных областях, реализованы и успешно внедрены в состав программной системы многокритериальной оптимизации многообъектных динамических систем “МОМДИС” (основы которой изложены в [4]), что позволило значительно повысить точность и быстродействие алгоритмов получения конфликтно-оптимальных решений на этапе прогноза динамики конфликта для задач со сложным динамическим описанием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В о р о н о в Е. М. Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных компромиссов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 576 с.
2. С м о л ь я к о в Э. Р. Теория конфликтных равновесий. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 304 с.
3. В о р о н о в Е. М., Р е п к и н А. Л., С е р о в В. А. Компромиссы принятия решений в интеллектуальных системах на основе активных равновесий // Интеллектуальные системы. Труды VI Междунар. симп. – Саратов, 2004. – С. 260–263.

4. В о р о н о в Е. М., Р е п к и н А. Л., С и д о р о в М. В. Стабильно-эффективные компромиссы на этапе прогноза динамики конфликта совместного алгоритма управления ресурсами морской и авиационной систем // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2007. – № 594. – С. 41–50.
5. С е р о в В. А. Генетические алгоритмы оптимизации управления многокритериальными системами в условиях неопределенности на основе конфликтных равновесий // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2007. – № 4. – С. 70–80.
6. П р о г р а м м н а я система многокритериальной оптимизации многообъектных динамических систем (ПС “МОМДИС”) на основе стабильно-эффективных игровых решений и ее применение в сложных задачах управления / Е.М Воронов, А.С. Ворожищев, А.А. Карпунин и др. // Труды II Всеросс. науч. конф. “Проектирование научных и инженерных приложений в среде Matlab”. – М.: ИПУ РАН, 2004.

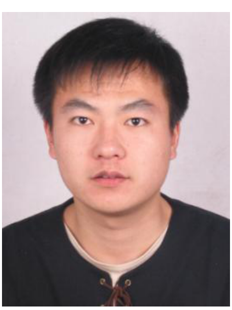
Статья поступила в редакцию 28.04.2011

Евгений Михайлович Воронов родился в 1940 г., окончил в 1963 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана и в 1969 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области систем управления, теории управления и ее приложений.

Ye.M. Voronov (b. 1940) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1963 and the Lomonosov Moscow State University in 1969. D. Sc. (Eng.), professor of “Systems of Automatic Control” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of systems of control, theory of control and its applications.

Алексей Леонидович Репкин родился в 1978 г., окончил в 2002 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана (Калужский филиал). Канд. техн. наук, старший научный сотрудник НИИ ИСУ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 25 научных работ в области теории управления.

A.L. Repkin (b. 1978) graduated from the Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch) in 2002. Ph. D. (Eng.), senior researcher of “Information Technologies and Control Systems” research institute of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 25 publications in the field of theory of control.



Чжан Сянь Цзянь родился в 1984 г., окончил в 2010 г. магистратуру МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Системы автоматического управления”. Автор трех научных работ в области теории управления.

Zhang Xian Jian (b. 1984) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2010. Post-graduate of “Systems of Automatic Control” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 publications in the field of theory of control.