УДК 519.216.1/2

В. В. Сюзев

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В БАЗИСАХ ФУНКЦИЙ ХААРА

Рассмотрены методы построения и свойства непрерывных и дискретных функций Хаара в системах счисления с произвольным основанием, а также оригинальные методы вычисления спектра Хаара аналитических функций, сигналов и синтеза быстрых алгоритмов анализа спектра для различных способов организации выборок входного сигнала. Теоретические результаты проиллюстрированы конкретными примерами.

E-mail: k-iu6@bmstu.ru; v.syuzev@yandex.ru

Ключевые слова: *базисная функция, спектр, спектральный анализ, быстрые преобразования Хаара, сигнальные графы.*

Системы функций Хаара находят применение в самых различных областях науки и техники при решении широкого класса теоретических и прикладных задач [1, 2]. Связано это с рядом свойств таких базисных функций и возможностью их обобщения в случае представления чисел в системе счисления с произвольным основанием. В настоящей работе приведены новые полезные свойства спектров Хаара конкретных непрерывных и дискретных сигналов и оригинальный скалярный метод синтеза быстрых преобразований Хаара.

Простые функции Хаара и их свойства. Полная базисная система Хаара состоит из ортонормированных функций меандрового типа, определенных на интервале $[0, 1)$, содержащем двоично-рациональное число $N = 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$, подынтервалов знакопостоянства [3]. Все базисные функции $h(k, z)$ этой системы удобно разбивать на группы, в пределах которых они имеют одинаковые амплитудные значения. Достигается это за счет двумерного представления одномерного номера k:

$$k = 2^\gamma + m,\ \gamma = 0,\, 1,\, \ldots\, ; \quad m = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2^\gamma - 1. \tag{1}$$

Здесь индекс γ определяет номер группы, а индекс m — номер функции Хаара в этой группе. Двумерное представление не распространяется на нулевую функцию, которая выпадает из групп и задается отдельно. При конечном N число групп тоже становится конечным и равным $n = \log_2 N$. Поэтому индекс группы γ в этом случае изменяется от 0 до $n - 1$.

Нормированные функции Хаара являются многозначными функциями. Поэтому для практики спектральной обработки более удобными оказываются ненормированные функции Хаара, принимающие всего три простейших значения: $0, +1$ и -1. Такие функции аналитически задаются следующим выражением [3]:

$$h(0,z) \equiv 1; \qquad h(k,z) = h(\gamma,\, m,\, z) =$$

$$= \begin{cases} +1 \ \text{ при } \ 2m \cdot 2^{-(\gamma+1)} \leqslant z < (2m+1) \cdot 2^{-(\gamma+1)}, \\ -1 \ \text{ при } \ (2m+1) \cdot 2^{-(\gamma+1)} \leqslant z < (2m+2) \cdot 2^{-(\gamma+1)}, \\ 0 \quad \text{при остальных } z \end{cases} \tag{2}$$

и имеют знакопеременный характер, причем во внутренних точках разрывов первого рода принимаются непрерывными справа.

Функции Хаара (2) ортогональны, мощности нулевой и первой функций равны единице, а мощности остальных функций $P_k = P_{\gamma,m} = 2^{-\gamma}$, $k = 2, 3, \ldots$. Отсюда следует, что в пределах каждой группы собраны функции Хаара одинаковой мощности.

Пример 1. Построить систему функций Хаара из восьми функций ($N = 8$, $n = 3$, $\gamma = 0,\, 1,\, 2,\ \ m = 0,\, 1,\, \ldots,\ 2^{\gamma} - 1$).

Решение. Нулевая функция $h(0,z)$ по определению равна плюс единице. Для остальных функций в соответствии с правилом (2) получаем

$$h(1,z) = \ h(0,0,z) = \begin{cases} +1, & 0 \leqslant z < 0{,}5, \\ -1, & 0{,}5 \leqslant z < 1, \end{cases}$$

$$h(2,z) = \ h(1,0,z) = \begin{cases} +1, & 0 \leqslant z < 0,25, \\ -1, & 0{,}25 \leqslant z < 0{,}5, \\ 0\,, & 0{,}5 \leqslant z < 1, \end{cases}$$

$$h(3,z) = \ h(1,\,1,z) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant z < 0{,}5, \\ +1, & 0{,}5 < z < 0{,}75, \\ -1, & 0{,}75 \leqslant z < 1, \end{cases}$$

$$h(4,z) = \ h(2,\,0,z) = \begin{cases} +1, & 0 \leqslant z < 0{,}125, \\ -1, & 0{,}125 \leqslant z < 0{,}25, \\ 0, & 0{,}25 \leqslant z < 1, \end{cases}$$

$$h(5,z) = \ h(2,\,1,z) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant z < 0{,}25, \\ +1, & 0{,}25 \leqslant z < 0{,}375, \\ -1, & 0{,}375 \leqslant z < 0{,}5, \\ 0, & 0{,}5 \leqslant z < 1, \end{cases}$$

$$h(6,z) = \ h(2,\,2,z) = \begin{cases} \ \ 0, & 0 \leqslant z < 0{,}5, \\ +1, & 0{,}5 \leqslant z < 0{,}625, \\ -1, & 0{,}625 \leqslant z < 0{,}75, \\ \ \ 0, & 0{,}75 \leqslant z < 1, \end{cases}$$

$$h(7,z) = h(2,\,3,z) = \begin{cases} \ \ 0, & 0 \leqslant z < 0{,}75, \\ +1, & 0{,}75 \leqslant z < 0{,}875, \\ -1\,, & 0{,}875 \leqslant z < 1. \end{cases}$$

Функции системы Хаара можно связать с функциями системы Радемахера $r(k,z) = (-1)^{z_k}$, где z_k есть значение k-го разряда двоичного представления числа z [2, 4]. Нулевые и первые функции этих систем совпадают, а для остальных справедливо следующее соотношение:

$$h(\gamma,m,z) = \begin{cases} r(\gamma+1,z) \text{ при } m \cdot 2^{-\gamma} \leqslant z < (m+1)\cdot 2^{-\gamma}, \\ 0 \text{ при остальных } \ z. \end{cases} \qquad (3)$$

Для сигналов функций времени $x(t)$ с интервалом определения $[0,\,T)$ пара непрерывных преобразований Фурье–Хаара представляется следующими зависимостями:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)h(k,t/T) = X(0) + \sum_{\gamma=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^\gamma-1} X(\gamma,m)h(\gamma,m,t/T), \qquad (4)$$

$$X(0) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}[\Phi(T) - \Phi(0)];$$

$$X(k) = X(\gamma,m) = \frac{2^\gamma}{T}\int_0^T x(t)h(\gamma,m,t/T)dt = \frac{2^\gamma}{T}[\int\limits_{2mT\cdot 2^{-(\gamma+1)}}^{(2m+1)T\cdot 2^{-(\gamma+1)}} x(t)dt-$$

$$-\int\limits_{(2m+1)T\cdot 2^{-(\gamma+1)}}^{(2m+2)T\cdot 2^{-(\gamma+1)}} x(t)dt] = \frac{2^\gamma}{T}[2\Phi((2m+1)T\cdot 2^{-(\gamma+1)})-$$

$$-\Phi(2mT\cdot 2^{-(\gamma+1)}) - \Phi((2m+2)T\cdot 2^{-(\gamma+1)})], \qquad (5)$$

где коэффициенты $X(0)$ и $X(k) = X(2^\gamma + m) = X(\gamma,m)$ являются спектром Хаара сигнала $x(t)$, а $\Phi(t) = \int x(t)dt$ есть первообразная сигнала $x(t)$. При записи выражения для спектра $X(\gamma,m)$ учтена зависимость (2) изменения функций Хаара. Конечная формула в зависимости (5) для $X(\gamma,m)$ особенно удобна при вычислении спектра Хаара сигналов с известным аналитическим описанием. Ряд Хаара (4) обеспечивает равномерную и среднеквадратическую сходимость к сигналу $x(t)$.

Поскольку система функций Хаара полная, то для нее выполняется равенство Парсеваля, которое так же, как и ряд Хаара (4), можно записать в двумерном виде:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = X^2(0) + \sum_{\gamma=0}^{\infty} 2^{-\gamma} \sum_{m=0}^{2^\gamma-1} X^2(\gamma, m). \tag{6}$$

Функции Хаара не являются мультипликативными, так как произведение двух любых таких функций дает результирующую функцию, не принадлежащую системе Хаара. По этой причине спектры Хаара не обладают свойствами спектров мультипликативных базисов. Тем не менее спектры Хаара отдельных сигналов имеют ряд полезных свойств. Так, например спектр Хаара кусочно-постоянного сигнала с двоично-рациональным числом участков постоянства конечен и не содержит составляющих с номерами $k \geqslant N$. Связано это с тем, что все функции Хаара с номерами $k \geqslant N$ будут иметь на участках постоянства равное число значений +1 и – 1. Для спектра Хаара степенных сигналов можно получить удобные вычислительные формулы. Так, для сигнала $x(t) = t^\lambda,\ \lambda = 0,\ 1,\ \ldots$, его первообразная $\Phi(t) = t^{\lambda+1}/(\lambda+1)$ и спектр Хаара имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&X^{(\lambda)}(0) = T^\lambda/(\lambda+1);\ X^{(\lambda)}(\gamma, m) = \\
&\quad = \frac{T^\lambda \cdot 2^{-\lambda\gamma}}{2(\lambda+1)\cdot 2^\lambda}[2(2m+1)^{\lambda+1} - (2m)^{\lambda+1} - (2m+2)^{\lambda+1}] = \\
&\quad = \frac{T^\lambda \lambda! 2^{-\lambda\gamma}}{2\cdot 2^\lambda}\sum_{k=2}^{\lambda+1}\frac{(2m)^{\lambda+1-k}\cdot(2-2^k)}{k!(\lambda+1-k)!}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Пример 2. Найти спектр Хаара степенных сигналов нулевой $(\lambda = 0)$ и первой $(\lambda = 1)$ степени.

Решение. В соответствии с формулами (7) имеем:

$$X^{(0)}(0) = 1,\ X^{(0)}(\gamma, m) = \frac{1}{2}(2-1-1) = 0$$

— для сигнала $x(t) = 1$;

$$X^{(1)}(0) = T/2,$$

$$X^{(1)}(\gamma, m) = \frac{T}{8}2^{-\gamma}(8m^2 + 8m + 2 - 4m^2 - 4m^2 - 8m - 4) = -\frac{T}{4}2^{-\gamma}$$

— для сигнала $x(t) = t$.

Пример 3. Найти спектр Хаара квадратичного сигнала $x(t) = t^2$.

Решение. В этом случае $\lambda = 2$ и, выполнив необходимые преобразования по формулам (7), получаем

$$X^{(2)}(0) = \frac{T^2}{3};\; X^{(2)}(\gamma, m) = -\frac{T^2}{4}2^{-2\gamma}(2m+1).$$

Спектр Хаара квадратичного сигнала теряет чисто показательную форму записи, которую имел спектр линейного сигнала.

Как следует из общей формулы (7), в спектре Хаара степенного сигнала t^λ присутствуют две составляющие: показательная с основанием два и отрицательной степенью, равной произведению индексов $\lambda\gamma$, и полиномиальная для индекса m с положительными степенями $\lambda - 1$, $\lambda - 2$, ..., 0. Поэтому модуль коэффициентов Хаара с возрастанием номера группы γ убывает, а в пределах группы с увеличением индекса m монотонно возрастает. Спектральные коэффициенты, являющиеся первыми в группах (т.е. с $m = 0$), изменяются только по показательному закону и достаточно быстро сходятся к нулю. Скорость сходимости других коэффициентов существенно сдерживается полиномиальной составляющей. Этот эффект проявляется и для других гладких дифференцируемых сигналов.

Для спектрального представления дискретных сигналов $x(i)$, $i \in [0, N)$, функции Хаара должны быть продискретизированы. Для этого необходимо взять первые N функций непрерывной системы Хаара и определить их значения в точках, кратных интервалу $1/N$, начиная с нуля, помня при этом, что функции Хаара в точках разрыва непрерывны справа. В результате будет получена полная ортогональная, но ненормированная система дискретных функций Хаара $\{h(k, i/N)\} = \{h(0, i/N), h(\gamma, m, i/N)\}$, где $\gamma = 0, 1, \ldots, n-1$, а $m = 0, 1, \ldots, 2^\gamma - 1$. Связь одномерного номера функций с двумерными индексами остается прежней.

Дискретные функции Хаара можно записать аналитически с помощью соотношений

$$h(0, i/N) = 1; \quad h(\gamma, m, i/N) =$$

$$= \begin{cases} +1 & \text{при } 2m \cdot 2^{n-\gamma-1} \leqslant i \leqslant (2m+1) \cdot 2^{n-\gamma-1} - 1, \\ -1 & \text{при } (2m+1) \cdot 2^{h-\gamma-1} \leqslant i \leqslant (2m+2) \cdot 2^{h-\gamma-1} - 1, \\ 0 & \text{при остальных } i, \end{cases} \qquad (8)$$

которые следуют из соотношений (2) при $z = i/N$.

Пример 4. Получить дискретную систему Хаара для $N = 8$.

Решение. Эту систему можно найти либо путем дискретизации системы Хаара (пример 1), либо с помощью соотношений (8). В обоих случаях будет получен один и тот же результат, который можно представить в виде следующей матрицы:

$$\{h(k,i)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Дискретные функции Хаара взаимосвязаны с дискретными функциями Радемахера. При этом будет справедливо соотношение (2), если в нем заменить переменную z на i/N.

Условие ортогональности дискретных функций Хаара имеет классический вид

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} h(k,i/N)h(p,i/N) = 0, \ \ p \neq k,$$

а их мощность остается такой же, как и в случае непрерывных функций. Дискретный ряд Фурье–Хаара удобно записывать в двумерном представлении

$$x(i) = X(0) + \sum_{\gamma=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{2^\gamma-1} X(\gamma,m)h(\gamma,m,i/N), \tag{9}$$

а для вычисления дискретного спектра использовать следующие формулы:

$$X(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i); \ \ X(\gamma,m) =$$

$$= \frac{2^\gamma}{N}\left[\sum_{i=2m\cdot 2^{n-\gamma-1}}^{(2m+1)\cdot 2^{n-\gamma-1}-1} x(i) - \sum_{i=(2m+1)\cdot 2^{n-\gamma-1}}^{(2m+2)\cdot 2^{n-\gamma-1}-1} x(i)\right]. \tag{10}$$

Равенство Парсеваля в дискретном варианте также сохраняет двумерное представление:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x^2(i) = X^2(0) + \sum_{\gamma=0}^{n-1} 2^{-\gamma}\sum_{m=0}^{2^\gamma-1} X^2(\gamma,m). \tag{11}$$

Спектры Хаара дискретных сигналов с известным аналитическим описанием в общем случае вычисляются сложнее, чем спектры Хаара непрерывных сигналов и, как правило, не имеют законченных простых выражений. Это связано с тем, что в дискретном варианте приходится вместо интегралов сигналов определять их суммы, которые обычно математически вычисляются и записываются сложнее интегралов. Сказанное в полной мере касается и степенных сигналов. Однако для них в случае малых степеней удается получить выражения, подобные тем, что были найдены в примерах 2 и 3 для непрерывных сигналов.

Пример 5. Найти спектр Хаара дискретного степенного сигнала нулевой и первой степени.

Решение. Для сигнала $x(i) = 1$ имеем

$$X^{(0)}(0) = 1;\ X^{(0)}(\gamma, m) = 0,$$

а для сигнала $x(i) = i$ —

$$X^{(1)}(0) = (N-1)/2;\ X^{(1)}(\gamma, m) = -\frac{N}{4}2^{-\gamma}.$$

Пример 6. Найти спектр Хаара дискретного степенного сигнала второй степени $x(i) = i^2$.

Решение. Вычисления по формулам (10) приводят в данном случае к следующим результатам:

$$X^{(2)}(0) = \frac{(N-1)(2N-1)}{6};\ X^{(2)}(\gamma, m) = -\frac{N}{4}2^{-\gamma}[N(2m+1)\cdot 2^{-\gamma} - 1].$$

При выводе этих зависимостей была использована известная формула конечной суммы квадратов натурального ряда чисел.

Характер изменения спектра Хаара дискретных степенных сигналов сохраняется таким же, как и у спектра Хаара непрерывных степенных сигналов.

Поскольку функции Хаара имеют нулевые значения, то только первые два коэффициента спектра Хаара учитывают поведение сигнала на всем интервале его определения. Все остальные коэффициенты учитывают локальное поведение сигнала и интервале, который тем меньше, чем больше номер группы функции Хаара. Коэффициенты последней группы вообще определяются только по двум соседним значениям сигнала. Избирательный характер спектра Хаара может оказаться весьма полезным при изучении локальных свойств сигнала.

Обобщенные функции Хаара и их свойства. С помощью соотношения (3) непрерывные функции Хаара выражаются через обычные функции Радемахера. Если учесть, что функции Радемахера являются функциями Уолша–Пэли $pal(k, z)$ первого ранга [4], то его можно переписать в следующем виде:

$$h(0, z) = pal(0, z) \equiv 1;$$

$$h(2^\gamma+m,z)=\begin{cases} pal(2^\gamma,z)=(-1)^{z_{\gamma+1}}, & \text{при } m\cdot 2^{-\gamma}\leqslant z<(m+1)\cdot 2^{-\gamma},\\ 0 & \text{при остальных значениях } z;\end{cases}$$
$$\gamma=0,\,1,\,\ldots;\quad m=0,\,1,\,\ldots,\,2^\gamma-1. \qquad (12)$$

Здесь $z_{\gamma+1}$ служит для обозначения $(z_{\gamma+1})$-го разряда двоичного разложения аргумента z. В такой форме записи взаимосвязь между функциями Хаара и Уолша может быть обобщена и из функций Виленкина–Крестенсона–Пэли (ВКФ–Пэли) первого ранга, являющихся обобщением функций Уолша–Пэли на систему счисления с произвольным основанием p [5], получены базисные функции, которые будут являться обобщением обычных функций Хаара.

Нулевая обобщенная функция Хаара (ОФХ) $H(0,z)$ принимается равной нулевой ВКФ–Пэли $Pal(0,z)$ и во всех точках своего интервала определения $[0,1)$ равна $W_p^0=\exp(j\cdot 2\pi\cdot 0/p)$. Все остальные функции $H(k,z)$ с помощью трехмерного представления их номера

$$k=\mu p^\gamma+m,\ \ \gamma=0,\,1,\,\ldots;\ \mu=1,\,2,\,\ldots,\ p-1;\ \ m=0,\ 1,\ \ldots,\ p^\gamma-1, \qquad (13)$$

могут быть разбиты на группы и следующим образом выражены через ВКФ–Пэли первого ранга:

$$H(k,z)=H(\mu p^\gamma+m,z)=$$
$$=\begin{cases} Pal(\mu p^\gamma,z)=W_p^{\mu z_{\gamma+1}} \text{ при } mp^{-\gamma}\leqslant z<(m+1)p^{-\gamma},\\ 0 \text{ при остальных значениях } z.\end{cases} \qquad (14)$$

Здесь $W_p=\exp(j2\pi/p)$. Параметр γ задает номер группы ОФХ, номер же конкретной функции в группе определяется с помощью индексов μ и m. В обычных функциях Хаара номером функции в группе служил только индекс m.

Выражение (14) определяет алгоритм построения ОФХ для произвольного значения параметра p. В частном случае при $p=2$ формула (14) переходит в формулу (12) для обычных функций Хаара. При этом трехмерное представление (13) номера функции k переходит в его двумерную запись (1).

Обобщенные функции Хаара являются $(p+1)$ значными кусочно-постоянными комплексными функциями. Ограничивая величиной n число разрядов p-го представления z, с помощью алгоритмов (14) можно получить первые $N=p^n$ обобщенных функций Хаара, содержащих на своем интервале определения $[0,\,1)$ N участков постоянства. При этом индекс γ в выражениях (13), (14) будет принимать n первых значений: $\gamma=0,\,1,\,\ldots,\,n-1$, а аргумент z можно представить в нормированном виде $z = i/N$, где индекс i будет являться номером участка постоянства ОФХ.

Пример 7. Записать первые девять обобщенных функций Хаара при $p = 3$.

Решение. В этом случае $N = 9$, $n = 2$ и $k = \mu 3^\gamma + m$, где $\gamma = 0,\ 1$; $\mu = 1,\ 2$; $m = 0$ и $m = 0,\ 1,\ 2$. Поэтому по алгоритму (14) получаем:

$$k = 0: \quad H(0, i/9) = W_3^0 = 1;$$

$$k = 1 \ \ (\gamma = 0,\ \mu = 1,\ m = 0): \qquad H(1,\, i/9) = Pal(1, i/9);$$

$$k = 2 \ \ (\gamma = 0,\ \mu = 2,\ m = 0): \quad H(2,\, i/9) = Pal(2, i/9);$$

$k = 3 \ \ (\gamma = 1,\ \mu = 1,\ m = 0):$

$$H(3, i/9) = \begin{cases} Pal(3, i/9), & 0 \leqslant i \leqslant 2, \\ 0, & 3 \leqslant i \leqslant 8; \end{cases}$$

$k = 4 \ \ (\gamma = 1,\ \mu = 1,\ m = 1):$

$$H(4, i/9) = \begin{cases} Pal(3, i/9), & 3 \leqslant i \leqslant 5, \\ 0, & 0 \leqslant i \leqslant 2 \ \text{ и } \ 6 \leqslant i \leqslant 8; \end{cases}$$

$k = 5 \ \ (\gamma = 1,\ \mu = 1,\ m = 2):$

$$H(5, i/9) = \begin{cases} Pal(3, i/9), & 6 \leqslant i \leqslant 8, \\ 0, & 0 \leqslant i \leqslant 5; \end{cases}$$

$k = 6 \ \ (\gamma = 1,\ \mu = 2,\ m = 0):$

$$H(6, i/9) = \begin{cases} Pal(6, i/9), & 0 \leqslant i \leqslant 2, \\ 0, & 3 \leqslant i \leqslant 8; \end{cases}$$

$k = 7 \ \ (\gamma = 1,\ \mu = 2,\ m = 1):$

$$H(7, i/9) = \begin{cases} Pal(6, i/9), & 3 \leqslant i \leqslant 5, \\ 0, & 0 \leqslant i \leqslant 2 \ \text{ и } 6 \leqslant i \leqslant 8; \end{cases}$$

$k = 8 \ \ (\gamma = 1,\ \mu = 2,\ m = 2):$

$$H(8, i/9) = \begin{cases} Pal(6, i/9), & 6 \leqslant i \leqslant 8, \\ 0, & 0 \leqslant i \leqslant 5. \end{cases}$$

Обобщенные функции Хаара являются ортогональными функциями и образуют полную базисную систему, пригодную для представления математических функций $x(z)$ с интегрируемым квадратом на интервале $[0, 1)$. Они не удовлетворяют условию нормированности, поскольку их мощность зависит от номера функции. При этом первые p ОФХ имеют единичную мощность ($P_0 = P_1 = \ldots = P_{p-1} = 1$), а мощность остальных функций можно вычислить по формуле

$$P_{\mu p^\gamma + m} = \int\limits_{mp^{-\gamma}}^{(m+1)p^{-\gamma}} |Pal(\mu p^\gamma, z)|^2 dz = p^{-\gamma},$$

где учтено, что модуль ВКФ равен единице. Мощность ОФХ так же, как и для обычных функций Хаара, в пределах одной группы не меняется, а с увеличением номера группы убывает.

Пара непрерывных преобразований Фурье–Хаара для сигнала $x(t)$, $t \in [0, T)$ запишется следующим образом:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) H(k, t/T) = X(0) +$$
$$+ \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^\gamma - 1} X(\mu p^\gamma + m) H(\mu p^\gamma + m, t/T), \quad (15)$$

$$X(0) = \frac{1}{T} \int\limits_0^T x(t) dt,$$

$$X(k) = X(\mu p^\gamma + m) = \frac{p^\gamma}{T} \int\limits_0^T x(t) H^*(\mu p^\gamma + m, t/T) dt =$$
$$= \frac{p^\gamma}{T} \int\limits_{mTp^{-\gamma}}^{(m+1)Tp^{-\gamma}} x(t) Pal^*(\mu p^\gamma, t/T) dt. \quad (16)$$

Равенство Парсеваля в трехмерном представлении имеет вид

$$\frac{1}{T} \int\limits_0^T x^2(t) dt = X(0) X^*(0) +$$
$$+ \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^\gamma - 1} X(\mu p^\gamma + m) X^*(\mu p^\gamma + m). \quad (17)$$

В выражениях (16) и (17) знаком "$*$" отмечены комплексно-сопряженные величины.

Обобщенный ряд Хаара (15) обеспечивает равномерную и средне-квадратическую сходимость к сигналу $x(t)$ и при конечном n становится усеченным.

Наличие нулевых значений у ОФХ приводит к тому, что только первые p коэффициентов обобщенного спектра Хаара $X(k)$ учитывают поведение сигнала на всем интервале его определения. Все остальные коэффициенты учитывают локальное поведение сигнала, и на тем меньшем интервале, чем больше значение индекса γ в номере ОФХ. В этом проявляется избирательный характер обобщенного спектра Хаара, отмеченный ранее и у обычного спектра Хаара.

Для спектрального анализа дискретных сигналов $x(i)$ с $i \in [0, N)$ могут быть использованы только дискретные ОФХ $H(k, i/N)$. Наиболее просто их можно получить по алгоритму (14), если использовать в нем дискретные ВКФ и под переменной i понимать не номер участка постоянства, а номер отсчета дискретного сигнала (дискретное время).

Пример 8. Записать дискретную систему ОФХ для $N = 9$.

Решение. В этом случае $p = 3$ и $n = 2$, поэтому дискретные ОФХ по форме записи совпадут с непрерывными ОФХ для нормированного аргумента предыдущего примера. Используя в них значения дискретных ВКФ–Пэли первого ранга [5], получаем следующую матрицу значений дискретных ОФХ:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^2 \\ 1 & 1 & 1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^1 \\ 1 & W_3^1 & W_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & W_3^1 & W_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_3^1 & W_3^2 \\ 1 & W_3^2 & W_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & W_3^2 & W_3^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_3^2 & W_3^1 \end{bmatrix}.$$

Если систему дискретных ОФХ представлять в матричной форме, то для матрицы значений ОФХ можно сформулировать ряд характерных свойств.

1. Матрица ОФХ содержит N строк и N столбцов и образуется из $(p+1)$ различных элементов: W_p^0, $W_p^1, \ldots, W_p^{p-1}$, 0, где $W_p^k = \exp(j2\pi k/p)$. Комплексные элементы попарно сопряжены. Нумерация строк и столбцов в матрице начинается с нуля. Каждая ее строка совпадает с соответствующей функцией Хаара.

2. Нулевая строка матрицы ОФХ содержит только элементы W_p^0, равные единице. Следующие $(p-1)$ ее строк содержат все различные

элементы, кроме нулевых, и совпадают со значениями ВКФ-Пэли первого ранга $Pal(\mu, i/N)$, $\mu = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$. Все последующие строки содержат все элементы, включая и нулевые. Эти строки можно разбить на $(n-1)$ групп, причем каждая строка, принадлежащая группе с номером γ $(\gamma = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1)$, будет содержать $p^{n-\gamma}$ ненулевых элементов и, следовательно, $(p^n - p^{n-\gamma})$ элементов, равных нулю. Общее число нулевых элементов в матрице ОФХ равно $p^n(p^n - np + n - 1)$.

3. Сумма элементов всех строк матрицы, кроме нулевой, равна нулю. Сумма элементов нулевой строки равна N. Это говорит о том, что среднее значение всех ОФХ, кроме нулевой, равно нулю. Среднее значение нулевой функции равно единице.

4. Средние суммы произведений комплексно-сопряженных элементов первых p строк матрицы ОФХ равны единице, а остальных строк, принадлежащих каждой γ-й группе, — $p^{-\gamma}$. Отсюда следует, что мощности первых p ОФХ равны единице, а мощности остальных функций зависят от номера группы, к которой они принадлежат. С увеличением номера группы мощность убывает по закону показательной функции с основанием p.

5. Матрица ОФХ является унитарной и несимметрической.

Дискретный ряд Фурье в базисе ОФК можно записать в многомерном представлении как

$$x(i) = X(0) + \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^\gamma - 1} X(\mu p^\gamma + m) H(\mu p^\gamma + m, i/N), \qquad (18)$$

а для вычисления дискретного обобщенного спектра Хаара использовать следующие соотношения:

$$X(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i); \quad X(\mu p^\gamma + m) = \frac{p^\gamma}{N} \sum_{i=mp^{n-\gamma}}^{(m+1)p^{n-\gamma}} x(i) Pal^*(\mu p^\gamma, i/N), \qquad (19)$$

$$\gamma = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1;\; \mu = 1,\, 2,\, \ldots,\, p-1;\; m = 0,\, 1,\, \ldots,\, p^\gamma - 1.$$

Равенство Парсеваля в дискретном варианте сохраняет многомерное представление:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x^2(i) = X(0)\, X^*(0) + \sum_{\gamma=0}^{n-1} p^{-\gamma} \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^\gamma - 1} X(\mu p^\gamma + m) X^*(\mu p^\gamma + m). \qquad (20)$$

Его выполнение подтверждает полноту системы дискретных ОФХ и служит гарантией правильности вычислений по формулам (18) и (19).

Обобщенный дискретный спектр Хаара так же, как и его непрерывный аналог, обладает важным избирательным свойством. Только первые p его спектральных коэффициентов $X(0)$, $X(1)$, $\ldots$, $X(p-1)$ носят глобальный характер и учитывают значения сигнала на всем интервале определения. Все остальные коэффициенты используют значения сигнала только на отдельных подынтервалах, длительность которых уменьшается с ростом номера группы функций Хаара, и в этом смысле являются локальными. В частности, спектральные коэффициенты последней группы функций вычисляются только по p соседним отсчетам сигнала.

Свойства спектров конкретных сигналов в базисе ОФК практически не изучены. Для постоянного сигнала $x(i) = 1$ обобщенный спектр Хаара

$$X^{(0)}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

совпадает с соответствующим спектром ВКФ. Такой вид $X^{(0)}(k)$ следует из свойства о среднем ОФХ.

Для линейного сигнала $x(i) = i$ аналитическая запись обобщенного спектра Хаара зависит от номера k его спектрального коэффициента. Спектральный коэффициент

$$X^{(1)}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} iH(0, i/N) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} i = (N-1)/2. \tag{21}$$

Все остальные коэффициенты, соответствующие ОФХ определенных групп, в пределах одной группы имеют равные действительные составляющие и равные модули мнимых составляющих. Сами мнимые составляющие в пределах группы располагаются в кососимметричном порядке:

$$\operatorname{Im}[X^{(1)}(\mu p^{\gamma} + m)] = -\operatorname{Im}[X^{(1)}((p-\mu)p^{\gamma} + m)].$$

При этом в случае нечетного значения p все мнимые составляющие попарно сопряжены, а в случае его четного значения мнимые составляющие коэффициентов с $\mu = p/2$ к тому же равны нулю. Кроме того, спектральные коэффициенты каждой последующей группы в p раз меньше соответствующих коэффициентов предыдущей группы, т.е.

$$X^{(1)}(\mu p^{\gamma+1} + m) = X^{(1)}(\mu p^{\gamma} + m)/p, \;\; \gamma = 1, 2, \ldots, n-2,$$

что приводит к равенству

$$X^{(1)}(\mu p^{\gamma} + m) = X^{(1)}(\mu)/p^{\gamma}, \;\; \gamma = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом, из всего этого следует, что для получения полного спектра Хаара достаточно найти только спектральные коэффициенты $X^{(1)}(\mu)$, принадлежащие нулевой группе и соответствующие функциям $H(\mu, i/N)$. Но функция $H(\mu, i/N) = Pal(\mu, i/N)$, а спектр линейного сигнала по ВКФ–Пэли первого ранга приведен в работе [6], поэтому в соответствии с полученными в работе результатами

$$X^{(1)}(\mu) = -N[1 - j\,\mathrm{ctg}(\pi\mu/p)]/(2p)$$

и для ОФХ получаем

$$\begin{gathered} X^{(1)}(\mu p^\gamma + m) = -N[1 - j\,\mathrm{ctg}(\pi\mu/p)]/(2p^{\gamma+1}); \\ \gamma = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1;\ \mu = 1,\, 2,\, \ldots,\, p-1;\ m = 0,\, 1,\, \ldots,\, p^\gamma - 1. \end{gathered} \tag{22}$$

Выражения (21) и (22) дают полное описание всего обобщенного спектра Хаара линейного дискретного сигнала. Этот спектр не зависит от параметра m.

Быстрые преобразования Хаара. Используя скалярное представление преобразований Хаара в виде выражений (10) и (19), получаем эффективные “быстрые” алгоритмы анализа спектра Хаара.

Начнем с обычных функций Хаара и воспользуемся прямым ДПХ (10), реализация которого приводит к затратам

$$A_{\mathit{\Pi}} = N \log_2 N$$

вещественных алгебраических сложений. Перепишем это ДПХ без нормирующих множителей $2^{n-\gamma}$

$$X(0) = \sum_{i=0}^{2^n-1} x(i), \quad X(2^\gamma + m) = \sum_{i=2m\cdot 2^{n-\gamma-1}}^{(2m+1)\cdot 2^{n-\gamma-1}-1} x(i) - \sum_{i=(2m+1)\cdot 2^{n-\gamma-1}}^{(2m+2)\cdot 2^{n-\gamma-1}-1} x(i),$$

$$\gamma = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1;\ \ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^\gamma - 1.$$

Затем с помощью линейных преобразований индексов $\gamma = n - \lambda$ и $i = \alpha + 2m \cdot 2^{\lambda-1}$ сведем обе суммы последнего выражения к одинаковым пределам суммирования, что позволит спектр $X(2^\gamma + m)$ представить в следующем виде:

$$X(2^{n-\lambda} + m) = \sum_{\alpha=0}^{2^{\lambda-1}-1} x(\alpha + 2m \cdot 2^{\lambda-1}) - \sum_{\alpha=0}^{2^{\lambda-1}-1} x[\alpha + (2m+1) \cdot 2^{\lambda-1}],$$

$$\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^{n-\lambda} - 1.$$

Если принять

$$S_{\lambda-1}(b) = \sum_{\alpha=0}^{2^{\lambda-1}-1} x(\alpha + b \cdot 2^{\lambda-1}), \tag{23}$$

то можно записать, что

$$X(2^{n-\lambda} + m) = S_{\lambda-1}(2m) - S_{\lambda-1}(2m+1),$$

т.е. спектр Хаара легко вычисляется через элементы $S_{\lambda-1}(2m)$ и $S_{\lambda-1}(2m+1)$. Для получения полного алгоритма быстрого преобразования Хаара (БПХ) остается только найти способ простого определения самих этих элементов.

В соответствии с выражением (23) элемент $S_\lambda(b)$ на λ-м шаге вычислений равен

$$S_\lambda(b) = \sum_{\alpha=0}^{2^\lambda-1} x(\alpha + b\cdot 2^\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{2^{\lambda-1}-1} x(\alpha + 2b\cdot 2^{\lambda-1}) + \\ + \sum_{\beta=0}^{2^{\lambda-1}-1} x[\beta + (2b+1)\cdot 2^{\lambda-1}] = S_{\lambda-1}(2b) + S_{\lambda-1}(2b+1).$$

Это соотношение позволяет рекурсивно вычислять все значения элементов $S_\lambda(b)$ с $\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ при начальных значениях $S_0(b) = x(b)$, получаемых из общей формулы (23) при $\lambda = 1$ и $\alpha = 0$.

Объединяя результаты, приходим к выводу, что полный спектр Хаара может быть вычислен за n этапов рекуррентного решения уравнений

$$X(2^{n-\lambda} + m) = S_{\lambda-1}(2m) - S_{\lambda-1}(2m+1),$$

$$S_\lambda(m) = S_{\lambda-1}(2m) + S_{\lambda-1}(2m+1), \tag{24}$$

$$\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^{n-\lambda} - 1$$

при начальных условиях

$$S_0(2m) = x(2m), \quad S_0(2m+1) = x(2m+1). \tag{25}$$

Нулевой спектральный коэффициент Хаара $X(0)$ при этом будет равен нулевому значению элемента $S_\lambda(0)$ на последнем шаге, т.е.

$$X(0) = S_n(0) = S_{n-1}(0) + S_{n-1}(1). \tag{26}$$

Число операций алгебраического сложения, которое необходимо проводить по этому алгоритму, составляет

$$A_Б = 2(2^n - 1) = 2(N-1),$$

что более чем в $0{,}5\log_2 N$ раз меньше по сравнению с числом таких операций в прямом алгоритме ДПХ. Алгоритм БПХ (24)–(26) можно проиллюстрировать соответствующим сигнальным графом, содержащим $2(N-1)$ вычислительных узлов, в которых выполняются операции алгебраического сложения, и имеющим усеченный трапецеидальный вид.

Пример 9. Записать алгоритм БПХ и построить его сигнальный граф для $N = 8$.

Решение. В этом случае $n = 3$ и алгоритм БПХ будет содержать три этапа.

Этап 1 ($\lambda = 1,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3$):

$$X(4+m) = S_0(2m) - S_0(2m+1) = x(2m) - x(2m+1),$$

$$S_1(m) = S_0(2m) + S_0(2m+1) = x(2m) + x(2m+1),$$

$$X(4) = x(0) - x(1),\ \ X(5) = x(2) - x(3),$$

$$X(6) = x(4) - x(5),\ \ X(7) = x(6) - x(7),$$

$$S_1(0) = x(0) + x(1),\ \ S_1(1) = x(2) + x(3),$$

$$S_1(2) = x(4) + x(5),\ \ S_1(3) = x(6) + x(7).$$

Этап 2 ($\lambda = 2,\ m = 0,\ 1$):

$$X(2+m) = S_1(2m) - S_1(2m+1),\ \ S_2(m) = S_1(2m) + S_1(2m+1),$$

$$X(2) = S_1(0) - S_1(1), \quad X(3) = S_1(2) - S_1(3),$$

$$S_2(0) = S_1(0) + S_1(1), \quad S_2(1) = S_1(2) + S_1(3).$$

Этап 3 ($\lambda = 3,\ m = 0$):

$$X(1) = S_2(0) - S_2(1), \qquad X(0) = S_3(0) = S_2(0) + S_2(1).$$

Сигнальный граф этого алгоритма приведен на рис. 1, *а*. Отсчеты сигнала в нем располагаются в естественном порядке следования, а спектр — в прореженном порядке.

Эквивалентной перестановкой узлов и ветвей этот граф можно модифицировать так, что отсчеты сигнала будут располагаться с прореживанием по времени, а спектральные коэффициенты — в естественном порядке (рис. 1, *б*). На графе БПХ такой модификации его усеченный характер виден наиболее наглядно.

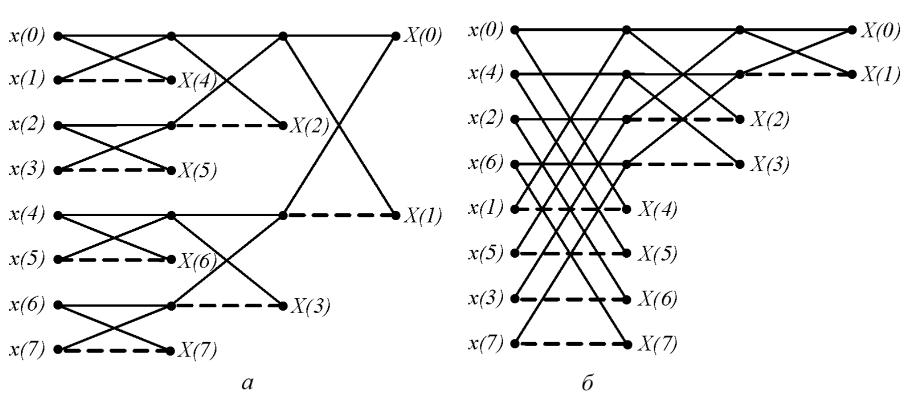

Рис. 1. Немодифицированный (*а*) и модифицированный (*б*) сигнальные графы алгоритма БПХ для $N = 8$

Рассмотрим теперь обобщенное преобразование Хаара (19). Исключим из него нормирующие множители $p^{n-\gamma}$ и с помощью линейных подстановок

$$\gamma = n - \lambda, \;\; i = \alpha + \beta p^{\lambda-1} + mp^{\lambda}$$

приведем его к следующему виду:

$$X(\mu p^{n-\lambda} + m) =$$
$$= \sum_{\beta=0}^{p-1} \sum_{\alpha=0}^{p^{\lambda-1}-1} x[\alpha + (pm+\beta)p^{\lambda-1}] Pal^*(\mu p^{n-\lambda}, [\alpha + (pm+\beta)p^{\lambda-1}]/N),$$
$$\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\;\; \mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1;\;\; m = 0,\ 1,\ \ldots,\ p^{n-\lambda} - 1.$$

Здесь

$$Pal^*(\mu p^{n-\lambda},\ i/N) = W_p^{-\mu i_\lambda},$$

где i_λ является обозначением λ-го разряда p-го кода аргумента i. При $i = \alpha + (pm+\beta)p^{\lambda-1}$ величина $i_\lambda = \beta$. Поэтому выражение для обобщенного спектра Хаара упрощается:

$$X(\mu p^{n-\lambda} + m) = \sum_{\beta=0}^{p-1} \sum_{\alpha=0}^{p^{\lambda-1}-1} x[\alpha + (pm+\beta)p^{\lambda-1}] W_p^{-\mu\beta}.$$

Введем обозначение

$$S_{\lambda-1}(pm+\beta) = \sum_{\alpha=0}^{p^{\lambda-1}-1} x[\alpha + (pm+\beta)p^{\lambda-1}], \tag{27}$$

тогда

$$X(\mu p^{n-\lambda} + m) = \sum_{\beta=0}^{p-1} S_{\lambda-1}(pm+\beta) W_p^{-\mu\beta},$$
$$\lambda = 1, 2, \ldots, n;\;\; \mu = 1,\ 2, \ldots,\ p-1;\;\; m = 0,\ 1,\ \ldots,\ p^{n-\lambda} - 1. \tag{28}$$

Теперь для получения алгоритма быстрого обобщенного преобразования Хаара (БОПХ) необходимо найти взаимосвязь между соседними элементами последовательности $S_\lambda(b)$. Для этого рассмотрим уравнение

$$S_\lambda(pq+r) = \sum_{\alpha=0}^{p^{\lambda}-1} x[\alpha + (pq+r)p^{\lambda}],$$
$$r = 0,\ 1,\ ...,\ p-1;\; q = 0,\ 1,\ ...,\ p^{n-\lambda-1} - 1. \tag{29}$$

Выразив в нем переменную α в виде $\alpha = \nu + \delta p^{\lambda-1}$, $\delta = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1$; $\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ p^{n-\lambda-1} - 1$, можно записать, что

$$S_\lambda(pq+r) = \sum_{\delta=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{p^{\lambda-1}-1} x[\nu + (\delta + p^2 q + pr)p^{\lambda-1}] = \\ = \sum_{\delta=0}^{p-1} S_{\lambda-1}(\delta + p^2 q + pr).$$

Это рекуррентное соотношение и задает алгоритм вычисления элементов $S_\lambda(b)$.

Объединяя выражения (28) и (29), получаем общий алгоритм БОПХ

$$\begin{aligned} &X(\mu p^{n-\lambda} + m) = \sum_{\beta=0}^{p-1} S_{\lambda-1}(pm+\beta) W_p^{-\mu\beta}, \\ &\mu = 1,\,2,\,\ldots,\,p-1;\ \lambda = 1,\,2\ldots,\,n;\ m = 0,\,1,\,\ldots,p^{n-\lambda}-1, \\ &S_\lambda(pq+r) = \sum_{\delta=0}^{p-1} S_{\lambda-1}(\delta + p^2 q + pr), \\ &r = 0, 1, \ldots, p-1; \quad q = 0, 1, \ldots, p^{n-\lambda-1}-1, \end{aligned} \qquad (30)$$

представляющий собой содержащий n этапов итерационный процесс с начальными условиями

$$S_0(pm+\beta) = x(pm+\beta),\ \beta = 0,\,1,\,\ldots,\ p-1;\ m = 0,\,1,\,\ldots,\ p^{n-1}-1. \qquad (31)$$

Нулевой спектральный коэффициент в этом случае равен

$$X(0) = S_n(0) = \sum_{\delta=0}^{p-1} S_{n-1}(\delta). \qquad (32)$$

Для выполнения алгоритма БОПХ (30)–(32) в общем случае необходимо затратить

$$\begin{aligned} A_Б &= p(p^n - 1) = p(N-1), \\ M_Б &= (p-1)(p^n-1) = (p-1)(N-1) \end{aligned} \qquad (33)$$

комплексных сложений и умножений. Алгоритму БОПХ будет соответствовать сигнальный граф, содержащий $p(N-1)$ вычислительных узлов и имеющий усеченный трапецеидальный вид.

Пример 10. Записать алгоритм БОПХ и построить его сигнальный граф для $N = 9$.

Решение. В этом случае $N = 3^2$ и $n = 2$, поэтому алгоритм БОПХ будет содержать всего два этапа.

Этап 1 ($\lambda = 1,\ \ \mu = 1,\ 2;\ m = 0,\ 1,\ 2;\ r = 0, 1, 2;\ q = 0$):

$$X(3\mu + m) = \sum_{\beta=0}^{2} x(\beta + 3m) W_3^{-\mu\beta}, \quad S_1(r) = \sum_{\delta=0}^{2} x(\delta + 3r),$$

$$X(3) = x(0)+x(1)W_3^{-1}+x(2)W_3^{-2}, \quad X(4) = x(3)+x(4)W_3^{-1}+x(5)W_3^{-2},$$

$$X(5) = x(6)+x(7)W_3^{-1}+x(8)W_3^{-2},\ X(6) = x(0)+x(1)W_3^{-2}+x(2)W_3^{-1},$$

$$X(7) = x(3)+x(4)W_3^{-2}+x(5)W_3^{-1},\ X(8) = x(6)+x(7)W_3^{-2}+x(8)W_3^{-1},$$

$$S_1(0) = x(0) + x(1) + x(2),\ S_1(1) = x(3) + x(4) + x(5),$$

$$S_1(2) = x(6) + x(7) + x(8).$$

Этап 2 ($\lambda = 2,\ \ \mu = 1,\ 2;\ m = 0$):

$$X(\mu) = \sum_{\beta=0}^{2} S_1(\beta) W_3^{-\mu\beta},$$

$$X(1) = S_1(0) + S_1(1)W_3^{-1} + S_1(2)W_3^{-2},$$

$$X(2) = S_1(0) + S_1(1)W_3^{-2} + S_1(2)W_3^{-1},$$

$$X(0) = S_2(0) = \sum_{\delta=0}^{2} S_1(\delta) = S_1(0) + S_1(1) + S_1(2).$$

Алгоритм требует для своей реализации выполнения 24 комплексных сложений и 16 комплексных умножений, что совпадает с оценками (33) при $N = 9$. Граф, его иллюстрирующий, приведен на рис. 2, *а*, где умножения на комплексные константы обозначены стрелками. Так же, как и в случае обычных функций Хаара, этот граф можно мо-

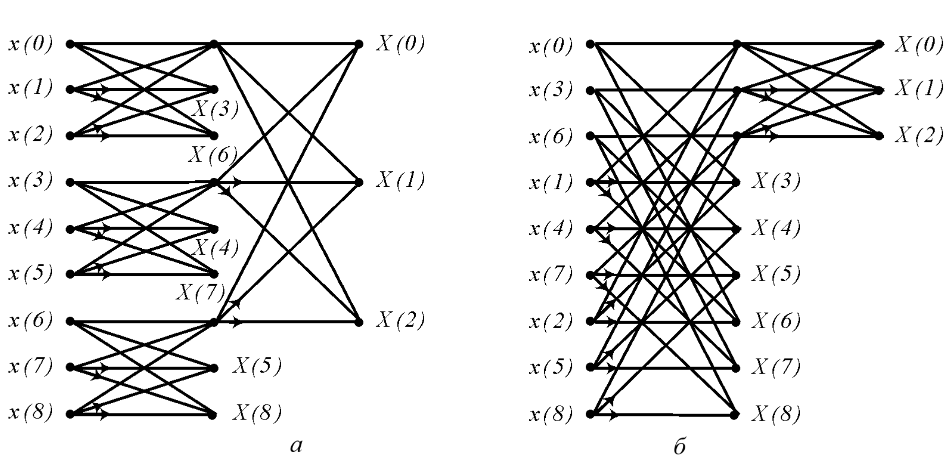

Рис. 2. Немодифицированный (*а*) и модифицированный (*б*) сигнальные графы алгоритма БОПХ для *N* = 9

дифицировать таким образом, чтобы отсчеты сигнала располагались прореженными по времени, а отсчеты спектра — в естественном порядке (рис. 2, *б*).

При $p = 2$ алгоритм БОПХ (30)–(32) переходит в алгоритм БПХ (24)–(26).

Таким образом, полученные результаты, включающие методы формирования различных базисных функций Хаара, их свойства и алгоритмы вычисления спектра, составляют теоретическую основу спектрального анализа в базисах Хаара в системах счисления с различными основаниями. Его применение особенно перспективно для решения спектральными методами различных задач обработки сигналов (фильтрации, распознавания, сжатия, кодирования и т.д.) в условиях действия жестких ограничений на их вычислительную сложность.

Настоящая статья подготовлена по результатам НИР в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы (*Государственный контракт № П1264 от 27.08.2009г.*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З а л м а н з о н Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
2. К а р п о в с к и й М. Г., М о с к а л е в Э. С. Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. – Л.: Энергия, 1973. – 141 с.
3. С о б о л ь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
4. П р о е к т и р о в а н и е специализированных информационно-вычислительных систем: Учебное пособие / Ю.М. Смирнов и др. – М.: Высш. шк., 1984. – 359 с.
5. Т р а х т м а н А. М., Т р а х т м а н В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
6. К у л и б а б а А. Я., С ю з е в В. В. Свойства спектров степенных сигналов в базисе функций Виленкина-Крестенсона // Компьютерные системы и технологии. Сб. трудов каф. "Компьютерные системы и сети" МГТУ им. Н.Э. Баумана. – М.: Эликс+, 2007. – С. 122–130.

Статья поступила в редакцию 11.10.2010

Владимир Васильевич Сюзев родился в 1946 г., окончил в 1970 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой "Компьютерные системы и сети" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области цифровой обработки сигналов и информационно-управляющих систем.

V.V. Syuzev (b. 1946) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1970. D. Sc. (Eng.), professor, head of "Computer Systems and Networks" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of digital signal processing and information and control systems.