УДК 62.50

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ ЛЯПУНОВА МЕТОДОМ ПОДПРОСТРАНСТВ КРЫЛОВА

Н.Е. Зубов[1,2], **Е.А. Микрин**[1,2], **М.Ш. Мисриханов**[2], **В.Н. Рябченко**[1,2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

[2]ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королева”, г. Королев, Московская область, Российская Федерация

Приведен новый подход к решению линейных матричных уравнений и неравенств Ляпунова на основе метода А.Н. Крылова, в основе которого лежит тождество Гамильтона – Кэли. Этот метод используется для решения разнообразных задач анализа и синтеза линейных MIMO-систем (Multi Input Multi Output System), т.е. систем с многими входами и выходами. К таким задачам относится вычисление сбалансированной реализации передаточной матрицы линейной MIMO-системы в пространстве состояний, редукция и декомпозиция модели этой системы в пространстве состояний, определение управляемых и наблюдаемых подпространств, стабилизация с помощью обратной связи по элементам состояния. Метод подпространств А.Н. Крылова в сочетании с техникой вычисления матричных делителей нуля использован для решения матричных уравнений и неравенств Ляпунова. Установлена связь метода с известным неравенством Löwner – Heinz. На методических примерах продемонстрирована эффективность подхода.

***Ключевые слова*:** уравнения и неравенства Ляпунова, подпространства Крылова, матричные делители нуля, неравенство Löwner – Heinz.

ON SOLVING THE LYAPUNOV LINEAR MATRIX EQUATIONS AND INEQUALITIES USING THE KRYLOV SUBSPACE METHOD

N.E. Zubov[1,2], **E.A. Mikrin**[1,2], **M.Sh. Misrikhanov**[2], **V.N. Ryabchenko**[1,2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

[2]OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, Moscow region, Russian Federation

A new approach to solving the Lyapunov linear matrix equations and inequalities on the basis of a Krylov subspace method (based, in turn, on the Cayley–Hamilton identity) is offered. This method is used for solving various problems of analysis and synthesis of linear multi-input multi-output (MIMO) systems. These problems include (i) calculation of a balanced realization of transfer matrix of the linear MIMO system in the state space, (ii) reduction and decomposition of a model of this system in the state space, (iii) definition of controlled and observed subspaces, (iv) stabilization with the help of the state-elements feedback. The Krylov subspace method in a combination with the technique of calculating zero divisors of a matrix *is used here for solving the Lyapunov matrix equations and inequalities. Correlation between the method and the known Löwner – Heinz inequality is established. Effectiveness of the approach is demonstrated by the methodical examples.*

***Keywords*: Lyapunov equations and inequalities, Krylov subspaces, zero divisors of a matrix, Löwner – Heinz inequality.

Постановка задачи. Линейные матричные уравнения и неравенства Ляпунова — это ключевые соотношения в современной теории управления динамическими системами. Большинство методов решения уравнений Ляпунова являются численными. Среди них наибольшую практическую значимость имеют методы, основанные на ортогональных преобразованиях исходных матриц. Это обусловлено их численной устойчивостью. В настоящее время существуют два таких алгоритма решения матричных уравнений Сильвестра и Ляпунова, основанных на приведении матриц к вещественной форме Шура или Хессенберга. Это алгоритмы Бартелса – Стьюарта (BS-алгоритм) [1] и Голуба – Нэша – ван Лоуна (GNL-алгоритм) [2].

При решении линейных матричных неравенств Ляпунова главенствующую роль занимают методы линейного программирования, из которых наиболее часто используется метод внутренней точки, являющийся обобщением прямых барьерно-проективных методов.

В настоящей работе представлен новый подход к решению линейных матричных уравнений и неравенств Ляпунова на основе метода А.Н. Крылова. Приведенный метод используется для решения задач анализа и синтеза систем с многими входами и выходами, так называемых линейных *Multi Input Multi Output System* (MIMO) систем. *К таким задачам относится вычисление сбалансированной реализации передаточной матрицы линейной MIMO-системы в пространстве состояний, редукция и декомпозиция модели этой системы в пространстве состояний, определение управляемых и наблюдаемых подпространств, стабилизация с помощью обратной связи по элементам состояния* и т.д. В основе метода Крылова лежит *тождество Гамильтона – Кэли*

$$\boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I}_n = 0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — заданная числовая матрица, a_i, $i = \overline{1,n}$ — коэффициенты характеристического полинома (х.п.).

$$\begin{gathered} \det(\lambda\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = \lambda^n + \left(\ \lambda^{n-1} \mid \cdots \mid \lambda \mid 1\ \right)\boldsymbol{X}(a), \\ \boldsymbol{X}(a) = \left(\ a_{n-1} \mid \cdots \mid a_1 \mid a_0\ \right)^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{2}$$

Задача Крылова формулируется следующим образом [3]:

Найти преобразование, вкладывающее скалярное уравнение для х.п. (2) *в матричное уравнение относительно вектора коэффициентов х.п.* $\boldsymbol{X}(a)$

$$h(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(a) = g(\boldsymbol{A}), \tag{3}$$

чтобы для вектора $\boldsymbol{X}(a)$ *существовало решение в виде*

$$\boldsymbol{X}(a) = h^{-1}(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A}). \tag{4}$$

Здесь $h(\boldsymbol{A})$, $g(\boldsymbol{A})$ — явные матричные функции элементов матрицы $\boldsymbol{A}$.

Задача Крылова (3) имеет решение (4), где

$$h(\boldsymbol{A}) = \left(\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{f} \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{f} \ \middle|\ \boldsymbol{f}\ \right), \quad g(\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{f}, \tag{5}$$

если существует вектор $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$, при котором матричная функция $h(\boldsymbol{A})$ является обратимой.

Пусть задана линейная MIMO-система

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \tag{6}$$

где $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ — векторный вход.

Известны условия асимптотической устойчивости MIMO-системы (6).

1) $\forall\lambda_i \in \operatorname{eig}(\boldsymbol{A}): \quad \operatorname{Re}\lambda_i < 0$
$\left(\operatorname{eig}(\boldsymbol{A}) = \left\{\lambda_i \in \mathbb{C}: \quad \det\left(\lambda_i\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}\right\}\right)$;

2) для заданной матрицы $\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q} \geq 0$ ($(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{q})$ — управляемая пара) существует единственное решение $\boldsymbol{P} > 0$ *линейного матричного уравнения Ляпунова*

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Q} = 0; \tag{7}$$

3) существует множество решений $\boldsymbol{P} > 0$ *линейного матричного неравенства Ляпунова*

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \leq 0; \tag{8}$$

4) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{x}(t)$ — функция Ляпунова системы (6).

В дальнейшем будем предполагать, что (6) — асимптотически устойчивая система и $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{q})$ — управляемая пара.

Требуется на основе метода Крылова определить формулы решения линейного матричного уравнения (7) и неравенства (8).

1. Решение матричного уравнения Ляпунова методом Крылова. Введем в рассмотрение множество матриц

$$\{E_1, \ldots, E_m\}, \quad E_j = E_j^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad m = \frac{n(n+1)}{2},$$

где $E_j = e_je_j^{\mathrm{T}}$ и

$$e_j^{\mathrm{T}} = \left(\ 0 \mid \cdots \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid \cdots \mid 0\ \right)$$

– j-й орт. Нетрудно убедиться, что справедливы следующие матричные разложения:

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \hline p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline x_2 & x_{n+1} & \cdots & x_{2n-1} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline x_n & x_{2n-1} & \cdots & x_m \end{array}\right) = \sum_{j=1}^{m} x_jE_j, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} &= \sum_{j=1}^{m} x_j\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_j + E_j\boldsymbol{A}\right) = \\ &= x_1\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1 + E_1\boldsymbol{A}\right) + \cdots + x_m\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_m + E_m\boldsymbol{A}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом (10) уравнение Ляпунова (7) имеет эквивалентный вид

$$x_1\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1+E_1\boldsymbol{A}\right)+\dots+x_m\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_m+E_m\boldsymbol{A}\right)-\boldsymbol{Q}=0. \tag{11}$$

Зададим *базис Крылова* в виде набора векторов

$$\{\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_r\}, \tag{12}$$

где $r=\dfrac{n+2}{2}$ — если $(n/2\in\mathbb{N}$ (т.е. n — четное число), и $r=\dfrac{n+3}{2}$, если $(n/2)\notin\mathbb{N}$ (т.е. n — нечетное число).

С помощью базиса Крылова (12) сформируем систему уравнений следующего вида:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1+E_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_1+\dots+x_m\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_m+E_m\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_1-\mathbf{Q}\mathbf{f}_1=0,\\ x_1\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1+E_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_2+\dots+x_m\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_m+E_m\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_2-\mathbf{Q}\mathbf{f}_2=0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ x_1\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1+E_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_r+\dots+x_m\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_m+E_m\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_r-\mathbf{Q}\mathbf{f}_r=0,\end{array}\right. \tag{13}$$

или эквивалентно

$$\Phi_Q\left(\begin{array}{c} x_1\\ \hline \vdots\\ \hline x_m\\ \hline 1\end{array}\right)=0, \tag{14}$$

$$\Phi_Q\triangleq\left(\begin{array}{c|c|c|c} \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1+E_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_1 & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_m+E_m\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_1 & -\mathbf{Q}\mathbf{f}_1\\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \hline \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1+E_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_r & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_m+E_m\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_r & -\mathbf{Q}\mathbf{f}_r \end{array}\right)\in$$
$$\in\mathbb{R}^{(r\cdot n)\times(m+1)}. \tag{15}$$

Векторы, образованные произведениями вида

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_i+E_i\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_k,\quad i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,r}, \tag{16}$$

и упорядоченные так, как это сделано в (14), будем называть *подпространствами Крылова – Ляпунова*.

Отметим, что число столбцов $(m+1)$ матрицы Φ_Q всегда не превышает числа строк $(r\cdot n)$ (рис. 1).

Если в базисе Крылова (12) все векторы линейно независимые, тогда решение уравнения (14) имеет единственный вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & 1\end{array}\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m+1}, \tag{17}$$

где

$$x_i=\frac{\hat{x}_i}{\gamma_0},\quad i=\overline{1,m}, \tag{18}$$

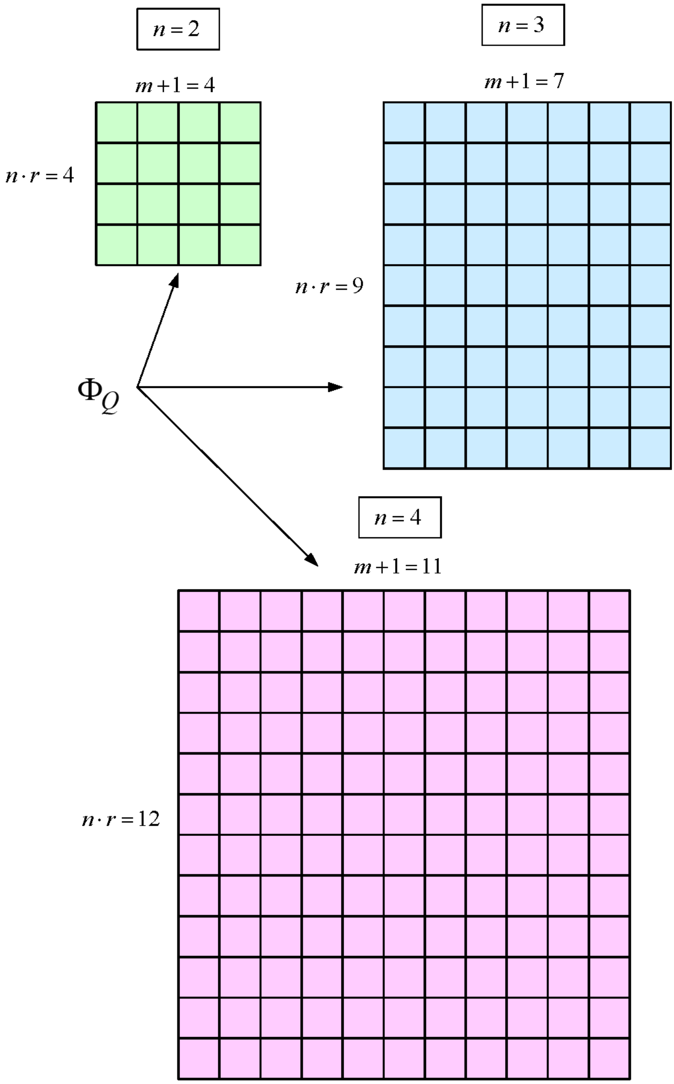

Рис. 1. Структура матрицы Φ_Q

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{x}_m \\ \hline \gamma_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c} \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_1 & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_m + E_m \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_1 & -\mathbf{Q}\mathbf{f}_1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_r & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_m + E_m \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_r & -\mathbf{Q}\mathbf{f}_r \end{array}\right)^{\perp} \quad (19)$$

— правый делитель нуля (правый аннулятор) максимального ранга заданной матрицы [4].

При этом решение $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} > 0$ матричного уравнения Ляпунова (7) формируется по формуле

$$\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{m} x_j E_j. \tag{20}$$

С *алгебраической* точки зрения решение (20) не зависит от выбора базиса Крылова (12). С *вычислительной* точки зрения для каждой пары $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Q})$ существует множество "оптимальных" базисов, минимизирующих ошибки вычисления.

2. Решение матричного неравенства Ляпунова методом Крылова. Пусть далее у матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ n — нечетное число, т.е. $(n \,/\, 2) \notin \mathbb{N}$. Рассмотрим запись линейного матричного *неравенства* Ляпунова (8) в виде

$$x_1 \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) + \cdots + x_m \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_m + E_m \boldsymbol{A}\right) \leq 0.$$

Снова зададим базис Крылова $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r\}$, где $r = \dfrac{n+1}{2}$, и сформируем систему *уравнений* следующего вида:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_1 + \cdots + x_m \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_m + E_m \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_1 = 0, \\ x_1 \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_2 + \cdots + x_m \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_m + E_m \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_2 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_1 \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_r + \cdots + x_m \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_m + E_m \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_r = 0. \end{array}\right. \tag{21}$$

В результате преобразований (21) получаем матричное уравнение

$$\Phi \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \hline \vdots \\ \hline x_m \end{array}\right) = 0,$$

$$\Phi \triangleq \left(\begin{array}{c|c|c} \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_1 & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_m + E_m \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_r & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_m + E_m \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_r \end{array}\right) \in \tag{22}$$
$$\in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

На основе решения уравнения (22) сформируем множество матриц

$$\boldsymbol{P} = \operatorname{sign}(x_k) \left(\sum_{j=1}^{m} x_j E_j\right). \tag{23}$$

Здесь $\alpha \in \mathbb{R} > 0$. Знаковая функция $\operatorname{sign}(x_k)$ в (23) применена для выполнения условия положительной определенности диагональных элементов квадратичной формы (x_k — элемент, соответствующий диагональному элементу $\boldsymbol{P}_{jj}$, например, $x_1 \to \boldsymbol{P}_{11}$).

Справедливо утверждение. *Для любой асимптотически устойчивой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ существует непустое множество базисов Крылова*

$\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r\}$, *что*

$$\boldsymbol{P} = \alpha \cdot \operatorname{sign}(x_k) \left(\sum_{j=1}^{m} x_j E_j \right) \geq 0, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} + PA \leq 0. \tag{24}$$

Сделаем следующие замечания:

– решение $\boldsymbol{P} \geq 0$ неравенства Ляпунова $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + PA \leq 0$ существует, если ранг матрицы Φ равен $m-1$;

– подходящий выбор базиса Крылова $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r\}$ обеспечивает получение решения $\boldsymbol{P} > 0$ (например, $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r\} = randomize(m,\ r)$);

– решение $\boldsymbol{P} \geq 0$ ($\boldsymbol{P} > 0$) неравенства Ляпунова $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + PA \leq 0$ соответствует: *правому делителю нуля матрицы* Φ; *правому собственному вектору матрицы* Φ, отвечающему нулевому собственному значению; *правому сингулярному вектору матрицы* Φ, отвечающему нулевому сингулярному числу и т.д.

Условно процесс формирования решения неравенства Ляпунова с помощью метода Крылова приведен на рис. 2.

3. Неравенство Löwner – Heinz и поток Ляпунова – Крылова. Известно неравенство Löwner–Heinz [5].

Если для заданных матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *и числа* σ *выполняются неравенства*

$$\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{B} \geq 0, \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

тогда выполняется неравенство

$$\boldsymbol{A}^{\sigma} \geq \boldsymbol{B}^{\sigma} \geq 0.$$

Число σ называется показателем Löwner – Heinz.

На основе справедливости неравенства Löwner – Heinz оказывается справедливым следующее утверждение.

Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ *такова, что* $\operatorname{eig}(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{C}^{-}$, *и пусть задана матрица* $\boldsymbol{P} > 0$, *удовлетворяющая неравенству Ляпунова*

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + PA \leq 0, \tag{25}$$

тогда существует число $\sigma_{\min} \geq 0$, *что*

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\sigma} + \boldsymbol{P}^{\sigma}\boldsymbol{A} \leq 0, \tag{26}$$

$$\sigma_{\min} \leq \sigma \leq 1. \tag{27}$$

Более того, если $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A} < 0$, *тогда* $\sigma_{\min} = 0$. *Здесь* $\boldsymbol{P}^{\sigma_{\min}},\ \sigma_{\min} > 0$ *– “граничные снизу” решения линейного матричного неравенства Ляпунова.*

Схема (рис. 2) и приведенное утверждение позволяют сформировать *поток Ляпунова – Крылова*, рассматривая его как процесс формирования решения неравенства Ляпунова (рис. 3).

Сделаем ряд замечаний.

1. Для сформированного потока Ляпунова – Крылова существует дуальный поток, порождаемый решениями неравенства $\boldsymbol{AP} + \boldsymbol{PA}^{\mathrm{T}} \leq 0$ (“граничные сверху” решения $\boldsymbol{P}^{-1}$).

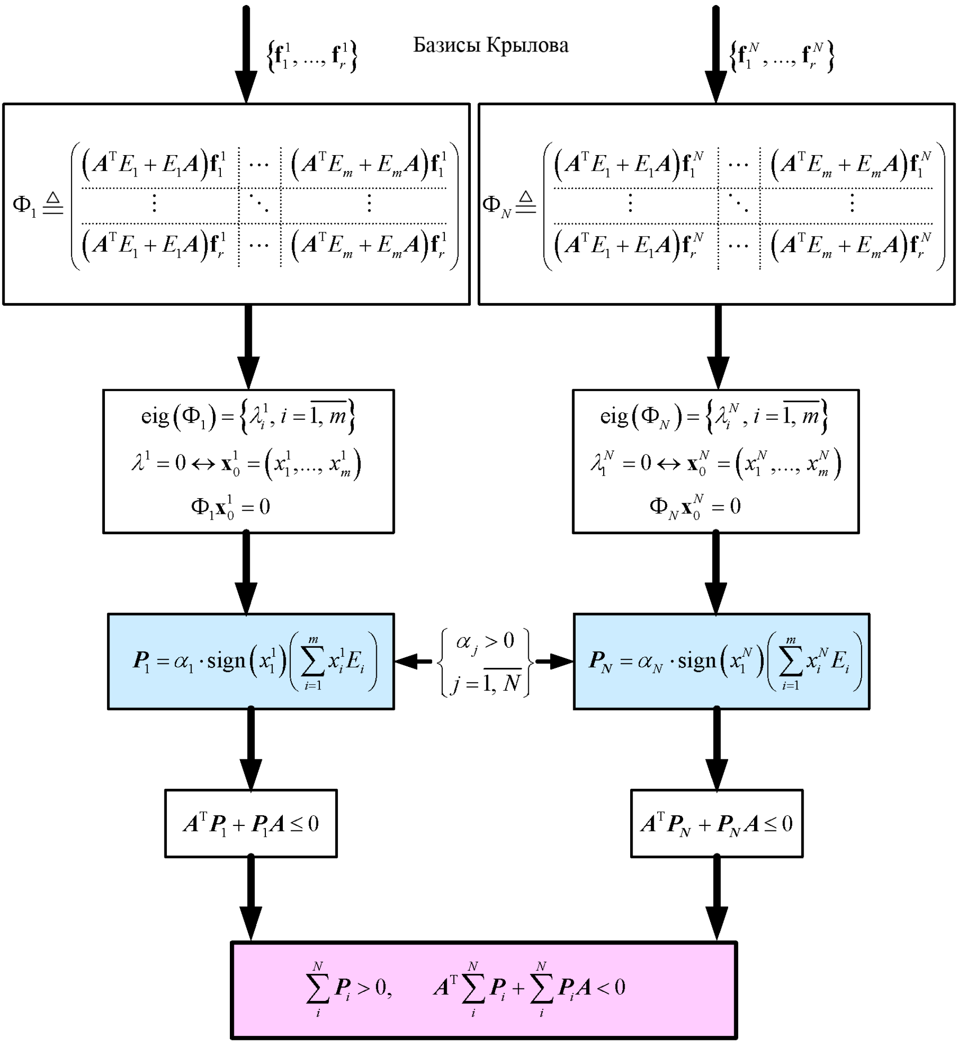

Рис. 2. Процесс формирования решения неравенства Ляпунова

2. Если у матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ существуют нулевые или чисто мнимые собственные значения, а оставшиеся имеют $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, тогда найденные с помощью метода Крылова решения удовлетворяют условиям $\boldsymbol{P} \geq 0$, $\boldsymbol{AP} = -\boldsymbol{PA}^{\mathrm{T}}$.

3. Если у матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ размерность n — четное натуральное число, т.е. $(n/2) \in \mathbb{N}$, тогда для этой матрицы справедливы предыдущие рассуждения, если она рассматривается (*вкладывается*) как элемент блочно-диагональной матрицы нечетного порядка

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}.$$

Здесь a в общем случае произвольное отрицательное число.

4. Примеры решения неравенства Ляпунова. Рассмотрим примеры решения неравенства Ляпунова.

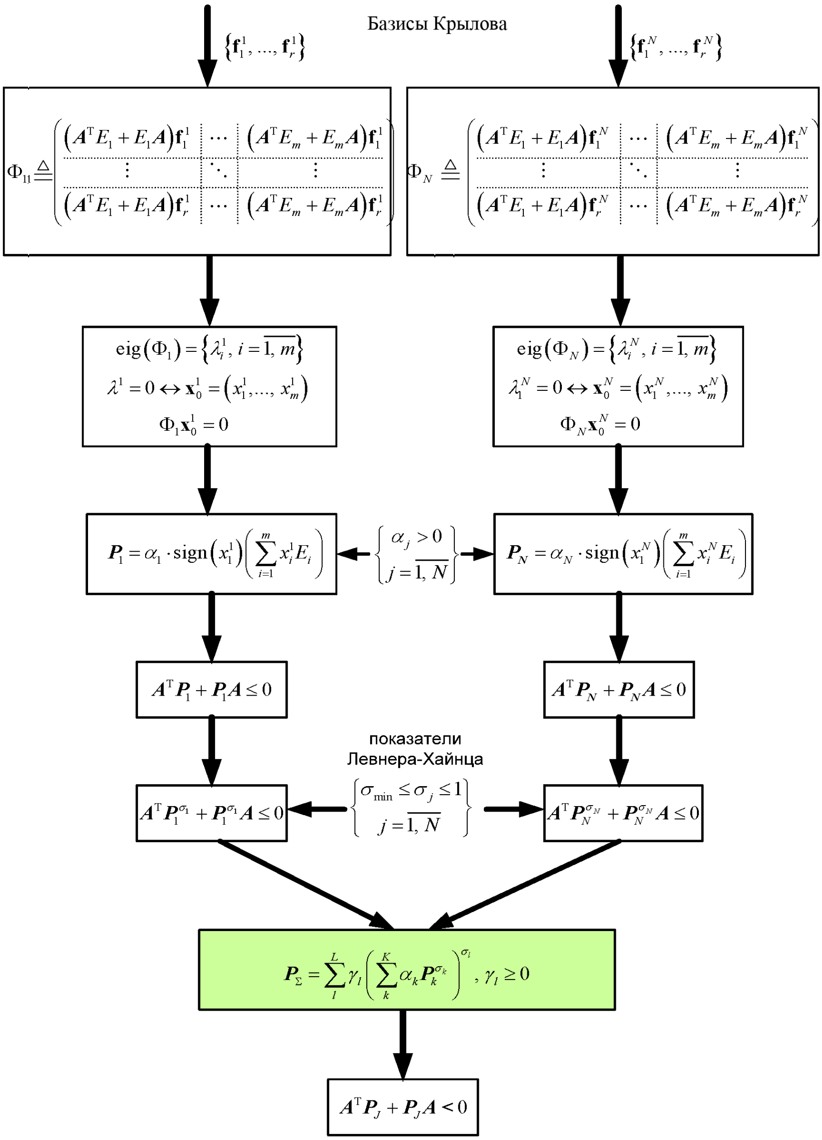

Рис. 3. Поток Ляпунова – Крылова

Пример 1. Пусть задана матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ в сопровождающей форме Фробениуса

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline a_0 & a_1 \end{array}\right), \quad a_0,\ a_1 \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

Характеристический полином (28) имеет

$$\det\left(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\right) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0.$$

Найдем решение неравенства Ляпунова для матрицы (28).

Осуществим вложение матрицы (28) в матрицу $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline a_0 & a_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \end{array}\right), \quad a \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Выберем базис как систему векторов

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right). \tag{30}$$

Составим матрицу Φ с учетом (29), (30):

$$\Phi = \left(\begin{array}{c|c|c} \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_1 & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_6 + E_6 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_1 \\ \hline \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_1 + E_1 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_2 & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} E_6 + E_6 \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{f}_2 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{6\times 6}. \tag{31}$$

Матрица (31) имеет вид

$$\Phi = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & a_1 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 2a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & a + a_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a & 0 & a_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & a + a_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a \end{array}\right). \tag{32}$$

Для (32) вычислим

$$\Phi^{\perp} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_6 \end{array}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_1^2 - a_0 & -a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{33}$$

Вид (33) имеет и собственный вектор матрицы (32), отвечающий нулевому собственному значению.

На основе (33) по формуле $\boldsymbol{P} = \sum\limits_{j=1}^{m} x_j E_j$ составим матрицу

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} a_1^2 - a_0 & -a_1 & 0 \\ \hline -a_1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{34}$$

В результате подходящего выбора базиса Крылова в (34) отсутствует элемент a из матрицы (29). Исключая в матрице (34) последнюю строку и столбец, получим матрицу

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \left(\begin{array}{c|c} a_1^2 - a_0 & -a_1 \\ \hline -a_1 & 1 \end{array}\right). \tag{35}$$

Условия положительной определенности (35) в соответствии с *критерием Сильвестра* имеют вид

$$\left\{\begin{array}{l} a_1^2 - a_0 > 0, \\ a_1^2 - a_0 - a_1^2 > 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1^2 - a_0 > 0, \\ -a_0 > 0, \end{array}\right.$$

т.е. $a_0 < 0$, а на элемент a_1 пока не накладываются никакие ограничения.

Пусть $a_0 < 0$, тогда

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \left(\begin{array}{c|c} a_1^2 - a_0 & -a_1 \\ \hline -a_1 & 1 \end{array}\right) > 0. \tag{36}$$

Вычислим производную функции Ляпунова (36) в силу системы, где матрица $\boldsymbol{A}$ равна (28), получим

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}} + \hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c} -2a_0a_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Для того чтобы выполнялось условие

$$\left(\begin{array}{c|c} -2a_0a_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \leq 0$$

(согласно критерию Сильвестра), необходимо и достаточно при $a_0 < 0$ иметь $a_1 < 0$.

Таким образом, для асимптотической устойчивости матрицы (28) необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$a_0 < 0, \quad a_1 < 0,$$

но это есть необходимые и достаточные условия *критерия Гурвица*.

Если вычислить в явном виде собственные значения матрицы $\hat{\boldsymbol{P}}$ (36), то они будут равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a_1^2 - a_0 + 1 \pm \sqrt{a_1^4 - 2a_0a_1^2 + 2a_1^2 + a_0^2 - 2a_0 + 1}\right). \tag{37}$$

Из (37) следует, что для положительной определенности матрицы $\hat{\boldsymbol{P}}$ (36) необходимо и достаточно выполнения неравенства $a_0 < 0$.

Пример 2. Решим неравенство Ляпунова для матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, заданной в вещественной форме Жордана:

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c} \delta & \beta \\ \hline -\beta & \delta \end{array}\right), \quad \delta,\ \beta \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Собственные значения матрицы (38) равны $\delta \pm i\beta$, $i^2 = -1$.

Выполним аналогичные предыдущим вычисления. В результате получим матрицу

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \left(\begin{array}{c|c} 2\delta^2 + \beta^2 & -\delta\beta \\ \hline -\delta\beta & \beta^2 \end{array}\right). \tag{39}$$

Условия положительной определенности (39) в соответствии с *критерием Сильвестра* имеют вид

$$\begin{cases} 2\delta^2 + \beta^2 > 0, \\ \delta^2\beta^2 + \beta^4 > 0. \end{cases} \tag{40}$$

Очевидно, что при любых (не одновременно нулевых) $\delta,\ \beta \in \mathbb{R}$ эти условия выполняются.

Собственные значения матрицы $\hat{\boldsymbol{P}}$ (39) равны

$$\delta^2 + \beta^2 \pm \sqrt{\delta^2\beta^2 + \delta^4}. \tag{41}$$

Отсюда следует предыдущий вывод.

Вычислим производную функции Ляпунова (39) в силу системы, где матрица $\boldsymbol{A}$ равна (38). В результате получим

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}+\hat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c} 4\delta\beta^2+4\delta^3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \tag{42}$$

Таким образом, для выполнения условия

$$\left(\begin{array}{c|c} 4\delta\beta^2+4\delta^3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 4\delta\left(\beta^2+\delta^2\right) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\leq 0. \tag{43}$$

необходимо и достаточно $\delta<0$, т.е. $\mathrm{eig}(\boldsymbol{A})\subset\mathbb{C}^-$.

Пример 3. Решим неравенство Ляпунова для матрицы $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{3\times3}$, заданной в форме Фробениуса,

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline a_0 & a_1 & a_2 \end{array}\right). \tag{44}$$

Используя базис Крылова

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \tag{45}$$

вычислим матрицу (31):

$$\Phi=\left(\begin{array}{c|c|c} \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1+E_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_1 & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_6+E_6\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_1 \\ \hline \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1+E_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_2 & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_6+E_6\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_2 \end{array}\right)\in\mathbb{R}^{6\times6}.$$

Получим

$$\Phi=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 2a_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & a_1 & 0 & a_0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & a_2 & 0 & 0 & a_0 \\ \hline 0 & 1 & a & 0 & 0 & a_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & a_2 & a_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2a \end{array}\right). \tag{46}$$

Для (46) вычислим

$$\Phi^{\perp}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_6 \end{array}\right)^{\mathrm{T}}=$$
$$=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_0a_2 & -a_0 & 0 & a_2^2-a_1 & -a_2 & 1 \end{array}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{47}$$

На основе (47) составим матрицу

$$\boldsymbol{P}=\left(\begin{array}{c|c|c} a_0a_2 & -a_0 & 0 \\ \hline -a_0 & a_2^2-a_1 & -a_2 \\ \hline 0 & -a_2 & 1 \end{array}\right). \tag{48}$$

Условия положительной определенности (48) имеют вид

$$\begin{cases} a_0 a_2 > 0, \\ a_0 \left(a_2^2 - a_1 a_2 - a_0\right) > 0, \\ -a_0 \left(a_1 a_2 - a_0\right) > 0. \end{cases} \tag{49}$$

Вычисляя далее производную функции Ляпунова (48) в силу системы, где матрица $\boldsymbol{A}$ равна (44), получаем

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2\left(a_0 + a_1 a_2\right) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{50}$$

Объединяя условия отрицательной полуопределенности матрицы (50)

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2\left(a_0 + a_1 a_2\right) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 + a_1 a_2 > 0$$

и условия положительной определенности матрицы (48) (см.(49)), получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_0 a_2 > 0, \\ a_0 \left(a_2^2 - a_1 a_2 - a_0\right) > 0, \\ -a_0 \left(a_1 a_2 - a_0\right) > 0, \\ a_0 + a_1 a_2 > 0. \end{cases} \tag{51}$$

Из (51) получаем условия асимптотической устойчивости Гурвица

$$\begin{cases} a_0 < 0, \\ a_1 < 0, \\ a_2 < 0, \\ a_1 a_2 - a_0 > 0. \end{cases} \tag{52}$$

5. Решение неравенства Ляпунова для неустойчивых матриц. Рассмотрим процесс формирования решения неравенства Ляпунова в неустойчивом случае. Пусть далее $\operatorname{eig}(\boldsymbol{A}) \subset \mathbb{C}_+$, т.е. все собственные значения матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ лежат в правой полуплоскости $\mathbb{C}$. Тогда для выбранного подходящим образом базиса Крылова справедливы линейные матричные неравенства

$$\boldsymbol{P} = \alpha \cdot \operatorname{sign}(x_k)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j E_j\right) > 0, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \geq 0, \tag{53}$$

где

$$
\Phi\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \hline \vdots \\ \hline x_m \end{array}\right) = 0,
$$

$$
\Phi \triangleq \left(\begin{array}{c|c|c} \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1 + E_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_1 & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_m + E_m\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_1 + E_1\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_r & \cdots & \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}E_m + E_m\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_r \end{array}\right) \in \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{54}
$$

Пусть далее

$$
\operatorname{eig}(\boldsymbol{A}) = \left\{\Lambda_- \bigcup \Lambda_+\right\}, \;\; \Lambda_- \subset \mathbb{C}_-, \;\; \Lambda_+ \subset \mathbb{C}_+,
$$

$\Lambda_- \neq \varnothing$, $\Lambda_+ \neq \varnothing$, т.е. значения матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ лежат как в правой полуплоскости, так и в левой полуплоскости $\mathbb{C}$. Тогда матрицы

$$
\boldsymbol{P} = \alpha \cdot \operatorname{sign}(x_k)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j E_j\right), \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \tag{55}
$$

будут знаконеопределенными. При этом если существуют элементы $x_k \to \boldsymbol{P}_{jj}$ и $x_l \to \boldsymbol{P}_{ii}$, что

$$
\operatorname{sign}(x_k) \neq \operatorname{sign}(x_l), \tag{56}
$$

то это является *достаточным условием* неустойчивости матрицы $\boldsymbol{A}$.

Общий вид алгоритма решения неравенства Ляпунова в неустойчивом случае выглядит следующим образом.

Алгоритм решения неравенства Ляпунова для неустойчивой матрицы.

Задано: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — неустойчивая матрица. *Требуется найти*: матрицу $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} > 0$, что

$$
\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\right) \subset \mathbb{C}_-.
$$

Шаг 1. Задать скаляр $\rho > 0$, что

$$
\operatorname{eig}(\boldsymbol{A} + \rho\boldsymbol{I}_n) \subset \mathbb{C}_+.
$$

Шаг 2. Вычислить матрицу $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} > 0$, удовлетворяющую неравенству Ляпунова

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\rho\boldsymbol{X} \geq 0,
$$

следующим образом:

$$
\left(\begin{array}{c|c|c} \left(\boldsymbol{A}E_1 + E_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{f}_1 & \cdots & \left(\boldsymbol{A}E_m + E_m\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{f}_1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \left(\boldsymbol{A}E_1 + E_1\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{f}_r & \cdots & \left(\boldsymbol{A}E_m + E_m\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{f}_r \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \hline \vdots \\ \hline x_m \end{array}\right) = 0,
$$

$$\boldsymbol{X} = \operatorname{sign}(x_1) \left(\sum_{j=1}^{m} x_j E_j \right) > 0. \tag{57}$$

Шаг 3. Вычислить матрицу $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

Шаг 4. Проверить выполнение неравенства [6]

$$\boldsymbol{S} \triangleq \boldsymbol{B}_L^{\perp} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{B}_L^{\perp\mathrm{T}} < 0, \tag{58}$$

где $\boldsymbol{B}_L^{\perp}\boldsymbol{B} = 0$, $\operatorname{rank} \boldsymbol{B}_L^{\perp} = n - p$.

Шаг 5. Если неравенство (58) выполняется, вычислить скаляр

$$\mu > \mu_{\min} \triangleq \lambda_{\max} \in \operatorname{eig}\left(\boldsymbol{B}^{+} \left[\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}_L^{\perp\mathrm{T}} \boldsymbol{S}^{-1} \boldsymbol{B}_L^{\perp} \boldsymbol{Q} \right] \boldsymbol{B}^{+\mathrm{T}} \right). \tag{59}$$

В противном случае — вернуться к шагу 2. Шаг 2 может быть повторен несколько раз (со сменой базиса Крылова $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r\}$ и задания скаляра $\alpha > 0$) для формирования строгих неравенств

$$\boldsymbol{X}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{X}_i > 0, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{\Sigma} + \boldsymbol{X}_{\Sigma}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\rho \boldsymbol{X}_{\Sigma} > 0. \tag{60}$$

Формулы (57)–(60) являются альтернативой указанным во введении методам линейного программирования и, в частности, методу внутренней точки.

Заключение. В работе предложен новый подход к решению линейных матричных уравнений и неравенств Ляпунова на основе метода подпространств А.Н. Крылова. Обычно в теории управления *метод подпространств А.Н. Крылова используется для решения разнообразных задач для MIMO-систем (вычисление сбалансированной реализации передаточной матрицы, редукция и декомпозиция моделей, определение управляемых и наблюдаемых подпространств, стабилизация с помощью обратной связи по элементам состояния* и др.) Здесь же метод подпространств А.Н. Крылова в сочетании с техникой вычисления матричных делителей нуля используется для нахождения решений матричных уравнений и неравенств Ляпунова. Установлена связь метода с известным неравенством Löwner – Heinz. На методических примерах продемонстрирована эффективность подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ. Задание № 2014/104.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bartels R.H.*, Stewart G.W. Solution of the Matrix Equation $AX + XB = C$ // Commun. ACM. 1972. Vol. 15. No. 9.
2. *Golub G.H.*, *Nash S.*, *Van Loan C.* A Hessenberg–Schur method for the problem $AX + XB = C$ // IEEE Trans. Automat. Contr. 1979. Vol. 24. No. 6.
3. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова // Автоматика и Телемеханика. 2007. № 12. С. 53–69.

4. *Мисриханов М.Ш.*, *Рябченко В.Н.* Алгебраические и матричные методы в теории линейных MIMO-систем // Вестник ИГЭУ. 2005. Вып. 5. С. 196–240.
5. *Xingzhi Zhan*. Lecture Notes in Mathematics, Springler, Berlin, 2002.
6. *Skelton R.E.*, *Iwasaki T.*, *Grigoriadis K.* Unified algebraic approach to linear control design. Taylor & Francis series in Systems and Control., London, 1996. 300 p.

REFERENCES

[1] Bartels, R.H., Stewart G.W. Solution of the Matrix Equation $AX + XB = C$. Commun. ACM, 1972, vol. 15, no. 9.

[2] Golub G.H., Nash S., Van Loan C.A. Hessenberg–Schur method for the problem $AX + XB = C$. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1979, vol. 24, no. 6.

[3] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. The band formula for A.N. Krylov's problem. *Avtomatika i Telemekhanika* [Automation and Remote Control, 2007, vol. 68, no. 12, pp. 2142–2157 (in Engl.)], 2007, no. 12, pp. 53–69 (in Russ.).

[4] Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N. Algebraic and matrix methods in the theory of linear MIMO systems. *Vestn. Ivanovo State Power Engineering University* [Herald of the Ivanovo State Power Eng. Un.], 2005, vol. 5, pp. 196–240 (in Russ.).

[5] Xingzhi Zhan. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Springler, 2002.

[6] Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriadis K.A. Unified algebraic approach to linear control design. Taylor & Francis series in Systems and Control., London, 1996. 300 p.

Статья поступила в редакцию 10.02.14

Николай Евгеньевич Зубов — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке НТЦ ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королева”, профессор кафедры “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 90 научных работ в области проблем управления космических аппаратов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация,105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королева”, Российская Федерация, 141070, г. Королев Московской области, ул. Ленина, 4-а.

N.E. Zubov — Dr. Sci. (Eng.), deputy director on science of the Research and Development Center of OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, professor of “Automatic Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 90 publications in the field of problems of spacecraft control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation. OAO “Korolev Rocket and Space Corporation “Energiya”, ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141075 Russian Federation.

Евгений Анатольевич Микрин — д-р техн. наук, академик РАН, первый заместитель генерального конструктора ОАО “РКК “Энергия” им. С.П. Королева”, зав. кафедрой “Системы автоматического управления” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области систем управления космических аппаратов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5. ОАО “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королева”, Российская Федерация, 141070, г. Королев Московской области, ул. Ленина, 4-а.

E.A. Mikrin — Dr. Sci. (Eng.), member of the Russian Academy of Sciences, head of "Automatic Control Systems" department of the Bauman Moscow State Technical University, first deputy general designer of OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya". Author of more than 100 publications in the field of problems of spacecraft control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation. OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141075 Russian Federation.

Мисрихан Шапиевич Мисриханов — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО "РКК "Энергия" им. С.П. Королева". Автор более 150 научных работ в области проблем управления.
ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королева", Российская Федерация, 141070, г. Королев Московской области, ул. Ленина, 4-а.

M.Sh. Misrikhanov — Dr. Sci. (Eng.), leading researcher of the Research and Development Center of OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya". Author of more than 150 publications in the field of problems of control.
OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141075 Russian Federation.

Владимир Николаевич Рябченко — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник НТЦ ОАО "РКК "Энергия" им. С.П. Королева", профессор кафедры "Системы автоматического управления" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области проблем управления.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация,105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.
ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королева", Российская Федерация, 141070, г. Королев Московской области, ул. Ленина, 4-а.

V.N. Ryabchenko — Dr. Sci. (Eng.), leading researcher of the Research and Development Center of OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", professor of "Automatic Control Systems" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of problems of control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation. OAO "Korolev Rocket and Space Corporation "Energiya", ul. Lenina 4a, Korolev, Moscow region, 141075 Russian Federation.