ИНФОРМАТИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

УДК 519.216.1/2

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ В СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ОСНОВАНИЕМ

В.В. Сюзев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: v.suzev@bmstu.ru

Для решения задач цифровой обработки сигналов в спектральной области предложен новый метод аналитического синтеза дискретных действительных параметрических базисных функций, использующий обобщение процедуры Хармута на случай систем счисления с произвольным постоянным основанием. Приведено математическое описание получаемых при этом функций, выполнено исследование их основных свойств и способов построения на их основе различных ортогональных базисных систем и преобразований. В терминах этих функций сформулированы и доказаны все основные теоремы спектрального анализа, используемые в теории и практике цифровой обработки. Полученные результаты носят оригинальный характер и составляют основу теории представления и преобразования сигналов в новом ортогональном базисе.

***Ключевые слова*:** базисная функция, базисная система, преобразования Фурье, спектральный анализ, система счисления.

GENERALIZED FUNCTIONS AND HARTLEY TRANSFORMS IN NUMBER SYSTEMS WITH A PERMANENT BASE

V.V. Syuzev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: v.suzev@bmstu.ru

To solve the problems of digital signal processing in the spectral domain, a new method for analytical synthesis of discrete real parametric basis functions is proposed that uses the Hartmut procedure generalization to the case of number systems with an arbitrary constant-value basis. The mathematical description of functions obtained is given; their basic properties and methods for construction of different orthogonal-basis systems and transformations on their basis are investigated. In terms of these functions, all the basic theorems of spectral analysis used in the theory and practice of digital processing are formulated and proved. The obtained results are original and form the basis of theory of the signal representation and conversion in the new orthogonal basis.

***Keywords*:** basis function, a basis system, Fourier transform, spectral analysis, number system.

Вычислительная и функциональная эффективность решения многих задач цифровой обработки сигналов (ЦОС) спектральными методами существенно зависит от используемых систем базисных функций [1—4]. Поскольку ортогональных систем базисных функций существует неограниченное множество [5], то выбор рационального базиса является сложной теоретической и прикладной проблемой. В этих условиях особенно полезными могут оказаться параметрические базисные функции, содержащие в своей структуре один или несколько изменяемых параметров, влияющих на их свойства. Известным и важным примером таких базисов служит класс комплексных экспоненциальных функций Виленкина – Крестенсона (ВКФ) [4, 6], управление свойствами которых осуществляется с помощью вариации основания используемой системы счисления. Изменяя величину основания и выбирая различные способы переупорядочения ВКФ, с их помощью можно получить широкое семейство полезных мультипликативных ортонормированных систем, для которых справедливы все теоремы спектрального анализа и существуют быстрые процедуры вычисления спектра [4, 6–9].

Однако, несмотря на указанные достоинства систем ВКФ, их комплексный характер требует использования в алгоритмах ЦОС трудоемкой комплексной арифметики, что может послужить весомым ограничением при практическом применении ВКФ, особенно при обработке высокочастотных многоразмерных сигналов в системах обработки жесткого реального масштаба времени. Поэтому целью настоящей работы поставлено решение теоретико-прикладной задачи синтеза и анализа нового действительного параметрического базиса со свойствами, близкими к свойствам базисов ВКФ, но оперирующего с вещественными числами и операциями. В основе математического подхода к разработке такого базиса положена процедура Хартли, использованная им при создании вещественной альтернативы комплексным экспоненциальным функциям Фурье, состоящим из обычных тригонометрических функций [10, 11], и распространенная здесь на обобщенные тригонометрические функции, образующие мнимые и действительные части ВКФ.

Обобщенные функции Хартли и их свойства. Пусть p есть произвольное целое положительное число, принятое в качестве основания системы счисления, а целые числа k и i задают соответственно номер и аргумент обобщенных тригонометрических функций $\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right)$ и $\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right)$, используемых в ВКФ [4, 7], и на интервале из $N = p^n$ точек имеют позиционные n-разрядные представления

$$k = \sum_{m=1}^{n} k_m p^{m-1}, \quad i = \sum_{m=1}^{n} i_m p^{m-1}, \tag{1}$$

где k_m и i_m являются m-ми разрядами этих представлений и лежат в диапазоне $[0, p-1]$. Тогда из этих тригонометрических функций можно образовать следующие дискретные функции:

$$Cas(k,i) = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right), \tag{2}$$

представляющие собой обобщение известных функций Хартли [10, 11] на систему счисления с произвольным основанием. Для отражения этого факта в обозначении обобщенных функций Хартли (ОФХ) (2) использовано обозначение обычных функций Хартли, записанное с заглавной буквы. Из развернутой записи ОФХ в виде выражения (2) с помощью известных тригонометрических преобразований можно получить полезное более сжатое их представление:

$$Cas(k,i)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}k_m i_m+\pi/4\right)=$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}k_m i_m-\pi/4\right). \quad (3)$$

Записанные таким образом ОФХ имеют ряд интересных свойств. Приведем основные из них.

1. ОФХ являются действительными функциями, принимающими только p различных значений. Справедливость этого свойства следует из самого аналитического описания ОФХ в виде (2) или (3).

2. В ОФХ переменные k и i являются равноправными, поэтому, если их поменять местами, функция не изменится, т.е.

$$Cas(k,i)=Cas(i,k).$$

В этом проявляется свойство двойственности ОФХ относительно своих аргументов, которое приводит к симметричности матрицы значений ОФХ.

3. ОФХ являются периодическими функциями с периодом $N=p^n$, $n=1,2,\ldots$.

Это свойство следует из того, что при смещении числа i на N единиц младшие n разрядов в p-ичном представлении числа остаются без изменения.

4. Среднее значение любой ОФХ, кроме нулевой, равно нулю, т.е.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}Cas(k,i)=0,\quad k\neq 0. \quad (4)$$

Действительно

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}Cas(k,i)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}k_m i_m+\pi/4\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{i_n=0}^{p-1}\sum_{i_{n-1}=0}^{p-1}\ldots\sum_{i_1=0}^{p-1}\sin[(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=2}^{n}k_m i_m+\pi/4)+\frac{2\pi}{p}k_1 i_1]. \quad (5)$$

Рассмотрим в этом выражении внутреннюю сумму по индексу i_1. Она является табличной и представляется в виде произведения трех сомножителей [12]:

$$\sum_{i_1=0}^{p-1}\sin\left[\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=2}^{n}k_m i_m+\pi/4\right)+\frac{2\pi}{p}k_1 i_1\right]=$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=2}^{n} k_m i_m + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{p}(p-1)k_1\right)\sin(\pi k_1)\cos ec\left(\frac{\pi}{p}k_1\right).$$

Но средний сомножитель $\sin(\pi k_1)$ в ней при целых значениях k_1 равен нулю, поэтому будет равна нулю внутренняя сумма по индексу i_1 и, как следствие, — вся многомерная сумма выражения (5). Следовательно, соотношение (4) справедливо.

Среднее значение нулевой ОФХ равно единице, так как $Cas(0,i) = 1$ и $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} 1 = 1.$

5. Мощность P_k любой k-й ОФХ равна единице:

$$P_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\Big[Cas(k,i)\Big]^2 = 1. \tag{6}$$

Для доказательства этого свойства представим квадрат ОФК с учетом соотношений (3) в виде

$$\Big[Cas(k,i)\Big]^2 = 2\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m - \frac{\pi}{4}\right),$$

а затем воспользуемся формулой преобразования произведения тригонометрических функций в их сумму. Тогда получим

$$\Big[Cas(k,i)\Big]^2 = 1 + \sin\left(\frac{4\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right).$$

С учетом этого результата мощность P_k можно записать так:

$$P_k = 1 + \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sin\left(\frac{4\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{N}\sum_{i_n=0}^{p-1}\sum_{i_{n-1}=0}^{p-1}\ldots\sum_{i_1=0}^{p-1}\sin\left(\frac{4\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right). \tag{7}$$

В выражении (7) внутренняя сумма по индексу i_1 также табличная и тоже равна произведению

$$\sin\left[\frac{4\pi}{p}\sum_{m=2}^{n} k_m i_m + \frac{2\pi}{p} + \frac{\pi}{p}(p-1)k_1\right]\sin(2\pi k_1)\cos ec\left(\frac{2\pi}{p}k_1\right),$$

которое из-за сомножителя $\sin(2\pi k_1)$ равно нулю при любом значении k_1. Поэтому вся многомерная сумма в уравнении (7) также будет равна нулю и $P_k = 1$. Справедливость соотношения (6) доказана.

6. Обобщенные функции Хартли являются ортогональными функциями, т.е.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} Cas(k,i)Cas(\lambda,i) = 0, \quad k \neq \lambda. \tag{8}$$

Для доказательства этого свойства вновь используем описание ОФХ выражениями (3). Тогда произведение ОФК будет равно

$$Cas(k,i)Cas(\lambda,i) = \\ = \sin\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}(k_m+\lambda_m)i_m\right] + \cos\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m\right],$$

а сумма таких произведений по индексу i принимает следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{N-1} Cas(k,i)Cas(\lambda,i) = \sum_{i=0}^{N-1}\sin\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}(k_m+\lambda_m)i_m\right] + \\ + \sum_{i=0}^{N-1}\cos\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m\right]. \quad (9)$$

Рассмотрим каждое слагаемое этой суммы по отдельности. Запишем первое слагаемое в многомерном виде

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sin\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}(k_m+\lambda_m)i_m\right] = \\ = \sum_{i_n=0}^{p-1}\sum_{i_{n-1}=0}^{p-1}\ldots\sum_{i_1=0}^{p-1}\sin\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=2}^{n}(k_m+\lambda_m)i_m + \frac{2\pi}{p}(k_1+\lambda_1)i_1\right].$$

Внутренняя сумма по индексу i_1 здесь будет табличной и представляется в виде произведения, один из сомножителей которого равен $\sin[\pi(k_1+\lambda_1)]$ и принимает нулевые значения при любых значениях k_1 и λ_1. Вследствие этого и внутренняя сумма, и вся многомерная сумма также будут равны нулю.

Для второго слагаемого в выражении (9) по аналогии имеем

$$\sum_{i=0}^{N-1}\cos\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m\right] = \\ = \sum_{i_n=0}^{p-1}\sum_{i_{n-1}=0}^{p-1}\ldots\sum_{i_1=0}^{p-1}\cos\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=2}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m + \frac{2\pi}{p}(k_1-\lambda_1)i_1\right].$$

При $k_1 \neq \lambda_1$ внутренняя сумма представляется произведением, один из сомножителей которого имеет вид $\sin[\pi(k_1-\lambda_1)]$ и равен нулю при любых не равных друг другу значениях k_1 и λ_1. В случае равенства значений младших разрядов кодов чисел k и λ (т.е. при $k_1 = \lambda_1$) внутренняя сумма во втором слагаемом выражения (9) равна

$$\sum_{i_1=0}^{p-1}\cos\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=2}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m\right] = p\cos\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=2}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m\right]$$

и второе слагаемое представляется уже $(n-1)$-мерной суммой

$$p\sum_{i_n=0}^{p-1}\sum_{i_{n-1}=0}^{p-1}\cdots\sum_{i_2=0}^{p-1}\cos\left[\frac{2\pi}{p}\sum_{m=3}^{n}(k_m-\lambda_m)i_m+\frac{2\pi}{p}(k_2-\lambda_2)i_2\right].$$

Внутренняя сумма этого выражения в зависимости от значений k_2 и λ_2 либо будет равна нулю, либо p, что снова приведет к уменьшению размерности представления второго слагаемого в общем выражении (9). Поскольку $k \neq \lambda$, то обязательно хотя бы одни значения k_m и λ_m не будут равны между собой. Поэтому и эта многомерная сумма в конечном счете также станет равной нулю. Таким образом, условие ортогональности доказано.

Используя свойства 5 и 6, можно записать свойство ортонормированности ОФХ:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}Cas(k,i)Cas(\lambda,i)=\begin{cases}1, & k=\lambda,\\ 0, & k\neq\lambda.\end{cases}$$

7. Объединение N первых ОФХ приводит к полной ортонормированной базисной системе, пригодной для представления любых решетчатых сигналов конечной мощности, определенных на дискретном интервале $[0,N)$. Полнота системы обеспечивается тем, что к ней невозможно добавить ни одной новой функции, которая была бы ортогональна ко всем остальным.

Системы дискретных ОФХ удобно записывать в виде матриц $\boldsymbol{C}$ их значений. Эти матрицы будут симметрическими и ортогональными. Обратные к ним матрицы будут совпадать с прямыми с точностью до постоянного множителя $1/N$: $\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{C}/N$. Свойства матриц ОФХ одинаковы для строк и столбцов (в силу их симметричности). Матрицы содержат ровно p различных действительных элементов. Элементы нулевых строк и столбцов равны единице.

Для фиксированных значений p возможны матрицы ОФХ, отличающиеся порядком следования строк и столбцов, т.е. другими словами, возможны различные способы упорядочения функций $Cas(k,i)$в системе. Это свойство матриц ОФХ подобно аналогичному свойству матриц значений ВКФ [4, 7] и позволяет значительно расширить ассортимент действительных тригонометрических базисов.

Изменение порядка следования функций в базисной системе достигается путем применения различных замкнутых операций переупорядочения к номерам базисных функций. Наибольшее распространение получили операции инвертирования p-ичных кодов чисел k и их обобщенное кодирование Грея [4,6]. Применим их к ОФХ.

Базисная система ОФХ, описываемая выражениями (2) и (3), отличается тем, что структура ее матрицы значений имеет блочный характер. Подобным свойством обладает матрица ВКФ для упорядочения Адамара [4]. По аналогии с ней и базисную систему ОФХ (2), (3) целесообразно назвать обобщенной системой Хартли – Адамара. Заменяя в этой системе прямой код чисел k на инверсный, получаем обобщенную систему Хартли – Пэли

$$Cas(k,i) = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_{n+1-m} i_m\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_{n+1-m} i_m\right), \qquad (10)$$

$$Cas(k,i) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_{n+1-m} i_m + \frac{\pi}{4}\right) = \\ = \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_{n+1-m} i_m - \frac{\pi}{4}\right), \qquad (11)$$

а заменяя прямой код чисел k их кодом Грея, — обобщенную систему Хартли – Хармута:

$$Cas(k,i) = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} < k_m > i_m\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} < k_m > i_m\right), \qquad (12)$$

$$Cas(k,i) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} < k_m > i_m + \frac{\pi}{4}\right) = \\ = \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} < k_m > i_m - \frac{\pi}{4}\right), \qquad (13)$$

где разряды кода Грея $< k_m >$ вычисляются по правилу: $< k_m >= k_m + + k_{m+1} \pmod p$, $k_{n+1} = 0$. Фамилии Пэли и Хармута включены в название систем ОФХ (10)–(13) по аналогии с системами ВКФ.

Следует отметить, что все ранее приведенные свойства ОФХ будут справедливы для всех перечисленных базисных систем. Однако свойства спектров конкретных сигналов в системах с различным порядком следования ОФХ могут сильно отличаться.

Системы ОФХ носят обобщенный характер. Из них за счет выбора основания p системы счисления можно получить множество известных и неизученных систем. Так при $p = N$ и $n = 1$ все системы ОФХ переходят в систему обычных функций Хартли, так как в этом случае

$$Cas(k,i) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}ki\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{N}ki\right) = cas(k,i).$$

При $p = 2$ и $n \neq 1$ из систем ОФХ получаются различные системы Уолша [4, 13]: из ОФХ (2) — системы Уолша – Адамара

$$Cas(k,i) = \cos\left(\pi\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right) = (-1)^{\sum_{m=1}^{n} k_m i_m} = had(k,i);$$

из ОФХ (10) — системы Уолша – Пэли

$$Cas(k,i) = \cos\left(\pi\sum_{m=1}^{n} k_{n+1-m} i_m\right) = (-1)^{\sum_{m=1}^{n} k_{n+i-m} i_m} = pal(k,i);$$

из ОФХ (12) — системы Уолша – Хармута

$$Cas(k,i) = \cos\left(\pi \sum_{m=1}^{n} < k_m > i_m\right) = (-1)^{\sum_{m=1}^{n} <k_m> i_m} = har(k,i).$$

Обобщенные преобразования Хартли и свойства обобщенных спектров Хартли. Обобщенные преобразования Хартли (ОПХ) представляются в виде следующей пары прямого и обратного дискретных преобразований Фурье

$$X_X(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) Cas(k,i), \tag{14}$$

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X_X(k) Cas(k,i), \tag{15}$$

где $x(i)$ являются отсчетами дискретного входного сигнала, а $X_X(k)$ — составляющими его обобщенного спектра Хартли. Обе решетчатые функции $x(i)$ и $X_X(k)$ в ОПХ являются действительными и определены на целочисленном интервале $[0, N)$. Энергетическая взаимосвязь сигнала и его спектра в базисе ОФХ устанавливается равенством Парсеваля

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x^2(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X_X^2(k),$$

справедливость которого подтверждает к тому же полноту базисной системы ОФХ.

Системы ОФХ не обладают свойством мультипликативности, поскольку произведение двух любых функций Хартли не дает функцию той же системы. По этой причине в базисе ОФХ в прямом виде не выполняются теоремы преобразования спектров, записанные для мультипликативных базисов и имеющие важное значение в теории и практике дискретного спектрального анализа (теоремы об обобщенном сдвиге сигналов, о модуляции сигнала и спектра, о свертке и корреляции, об умножении сигналов и т.п.) [4,5]. Однако эти теоремы можно сформулировать и в терминах спектров ОФХ, если использовать взаимосвязь спектров ОФХ со спектрами мультипликативных базисов Виленкина – Крестенсона, для которых теоремы спектрального анализа справедливы [4].

Обобщенные функции Хартли и ВКФ используют в своей структуре одинаковые обобщенные тригонометрические функции: четные $\cos\left(\frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right)$ и нечетные $\sin\left(\frac{2\pi}{p} \sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right)$. В этом смысле обе системы этих функций являются родственными и их отличие состоит только в том, что в действительных ОФХ эти функции используются в качестве слагаемых, а в комплексных ВКФ — в качестве их действительной и мнимой частей соответственно.

Спектры родственных базисных систем всегда взаимосвязаны. Для выявления этой связи примем следующие дополнительные обозначения:

$$X_{Ч}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i)\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right),$$

$$X_{H}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right).$$

Тогда спектры $X_X(k)$ Хартли и $X_{BK}(k)$ Виленкина – Крестенсона можно записать в виде

$$X_X(k) = X_{Ч}(k) + X_H(k), \tag{16}$$

$$X_{BK}(k) = X_{Ч}(k) - jX_H(k). \tag{17}$$

В последнем уравнении j означает мнимую единицу ($j = \sqrt{-1}$), а наличие знака минус перед мнимой частью спектра Виленкина – Крестенсона связано с комплексно-сопряженным характером прямого преобразования Фурье в базисе ВКФ [4]. Поскольку $X_{Ч}(k)$ является четной функцией переменной k, а $X_H(k)$ — нечетной функцией той же переменной, полезно ввести спектр Хартли для отрицательных значений его номера

$$X_X(-k) = X_{Ч}(k) - X_H(k), \tag{18}$$

который в базисе ОФХ будет играть роль, аналогичную роли комплексно-сопряженного спектра $X^*_{BK}(k)$ в базисе ВКФ. Последовательно суммируя и вычитая уравнения (16) и (18), после преобразования получаем, что

$$X_{Ч}(k) = [X_X(k) + X_X(-k)]/2, \quad X_H(k) = [X_X(k) - X_X(-k)]/2,$$

и спектр Виленкина – Крестенсона принимает следующий вид:

$$X_{BK}(k) = [X_X(k) + X_X(-k)]/2 - j[X_X(k) - X_X(-k)]/2. \tag{19}$$

Это уравнение и является уравнением связи спектров в родственных базисах ОФХ и ВКФ. Его использование позволяет свойства спектров Виленкина – Крестенсона трансформировать в свойства спектра Хартли. Выполним такую трансформацию, записав основные свойства спектров в виде соответствующих теорем спектрального анализа, как это принято в ЦОС [1–5].

Теорема 1. О спектре сигналов с обобщенным сдвигом во времени. *Спектр Хартли сигнала, сдвинутого по оси времени i на величину τ по закону операций прямого $i \oplus \tau$ и обратного $i \ominus \tau$ обобщенного сдвига, выполняемого с помощью поразрядного суммирования или вычитания по модулю p p-ичных кодов чисел i и τ, равен спектру Хартли несдвинутого сигнала, модулированному обобщенными тригонометрическими функциями в момент времени τ.*

Доказательство. Если сигнал $y(i)$ получается путем прямого обобщенного сдвига $i \oplus \tau$ по оси времени i на величину τ сигнала $x(i)$ (т.е. $y(i) =$

$x(i \oplus \tau)$), то его спектр в базисе ВКФ имеет следующий вид [4, 6]:

$$Y_{BK}(k) = X_{BK}(k) \exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m \tau_m\right), \tag{20}$$

где все τ_m являются разрядами p-ичного кода числа τ,

$$\tau = \sum_{m=1}^{n} \tau_m p^{m-1}.$$

Используя уравнения (17) и (19) и развернутую запись комплексной обобщенной экспоненты, выражение (20) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} Y_{BK}(k) = &\left[\frac{X_X(k) + X_X(-k)}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right)+\right.\\ &\left.+\frac{X_X(k) - X_X(-k)}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right)\right]-\\ &-j\left[\frac{X_X(k) - X_X(-k)}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right)-\right.\\ &\left.-\frac{X_X(k) + X_X(-k)}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right)\right]. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что спектр Хартли $Y_X(k)$ получается путем суммирования действительной и мнимой частей спектра Виленкина – Крестенсона $Y_{BK}(k)$, в окончательном виде получаем

$$\begin{aligned} Y_X(k) = X_X(k)\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right)-\\ - X_X(-k)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right). \end{aligned} \tag{21}$$

При обратном обобщенном сдвиге $i \ominus \tau$, реализуемого с помощью поразрядного вычитания по модулю p p-ичных кодов чисел i и τ, аналогично

$$\begin{aligned} Y_X(k) = X_X(k)\cos\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right)+\\ + X_X(-k)\sin\left(\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m\tau_m\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Выражения (21) и (22) и представляют собой аналитическую запись теоремы об обобщенном сдвиге сигнала в терминах спектров Хартли. Теорема 1 доказана. Из нее следует, что обобщенный сдвиг сигнала по оси времени приводит к модуляции спектра несдвинутого сигнала обобщенными тригонометрическими функциями (составляющие спектра с положительными номерами — четными, а составляющие спектра с отрицательными номерами — нечетными тригонометрическими функциями). Сами спектры сдвинутого сигнала в этом случае выражаются при прямом сдвиге через разность, а при обратном сдвиге — через сумму модулированных составляющих.

Теорема 2. О модуляции сигнала базисной функцией. *Умножение сигнала на базисную функцию приводит к изменению порядка следования его спектральных составляющих.*

Доказательство. Пусть сигнал $y(i)$ получается путем умножения сигнала $x(i)$ на базисную функцию $Cas(\lambda,\ i)$. Тогда

$$Y_X(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}[x(i)Cas(\lambda, i)]Cas(k, i).$$

Используя развернутую запись ОФХ в виде (2) и применяя известные тригонометрические теоремы, после преобразования получаем

$$Y_X(k) = \frac{1}{2}[X_X(k+\lambda) + X_X(k-\lambda) + X_X(\lambda - k) - X_X(-k-\lambda)]. \quad (23)$$

Теорема 2 доказана. Из нее следует, что при модулировании сигнала базисной функцией сам спектр сигнала не меняется, но меняется порядок его следования.

Теорема 3. О свертке. *Спектр Хартли сигнала, являющегося результатом обобщенной свертки двух других сигналов, равен с точностью до постоянного множителя произведению спектров этих сигналов.*

Доказательство. Пусть сигнал $y(i)$ есть обобщенная свертка двух сигналов $x(i)$ и $u(i)$:

$$y(i) = \sum_{\lambda=0}^{N-1} x(\lambda)u(\lambda \ominus i).$$

В базисе ВКФ спектр такой свертки равен [4]

$$Y_{BK}(k) = NX_{BK}(k)U_{BK}(k).$$

Используя связь спектров Виленкина – Крестенсона и Хартли в форме уравнения (19), из этой формулы после преобразования получаем

$$\begin{aligned}Y_{BK}(k) = \frac{N}{4}\Big\{&[X_X(k) + X_X(-k)][U_X(k) + U_X(-k)]-\\ &- [X_X(k) - X_X(-k)][U_X(k) - U_X(-k)]\Big\}-\\ &- j\frac{N}{4}\Big\{[X_X(k) + X_X(-k)][U_X(k)-\\ &- U_X(-k)] + [X_X(k) - X_X(k)][U_X(k) + U_X(-k)]\Big\},\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$Y_X(k) = \frac{N}{2}\Big[X_X(k)U_X(-k) + X_X(-k)U_X(k) + X_X(k)U_X(k)-$$

$$- X_X(-k)U_X(-k)\Big] =$$

$$= \frac{N}{2}\Big\{[X_X(k) + X_X(-k)]U_X(k) + [X_X(k) - X_X(-k)]U_X(-k)\Big\}.$$

Эта зависимость представляет собой математическое описание теоремы об обобщенной свертке на языке спектров Хартли.

Теорема 3 доказана. Видно, что ее запись в базисе ОФХ сложнее, чем в базисе ВКФ. В частном случае, когда один или оба свертываемых сигнала являются либо четными, либо нечетными относительно середины интервала определения, запись теоремы 3 о свертке в базисах ОФК и ВКФ совпадает. Это связано с тем, что в этом случае спектры Хартли также являются четными или нечетными функциями номера k. Так, например, для четного сигнала $x(i) = x(N - i)$ и $X_X(k) = X_X(-k)$, поэтому $Y_X(k) = NX_X(k)U_X(k)$.

Теорема 4. О корреляции. *Спектр Хартли обобщенной корреляционной функции сигнала равен спектру мощности этого сигнала*.

Доказательство. Если обобщенная корреляционная функция двух сигналов имеет вид

$$y(i) = \frac{1}{N}\sum_{\lambda=0}^{N-1} x(\lambda)x(\lambda \oplus i),$$

то ее спектр в базисе ВКФ совпадает со спектром мощности этого сигнала [4]:

$$Y_{BK}(k) = X^*_{BK}(k)X_{BK}(k).$$

Используя уравнение (19), это энергетическое соотношение можно записать и в базисе ОФК:

$$Y_X(k) = \frac{1}{2}[X^2_X(k) + X^2_X(-k)].$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. О независимости спектра мощности и энергетического спектра сигнала от его обобщенного сдвига по оси времени. *Спектр мощности и энергетический спектр сигнала в базисе Хартли не изменяются при его обобщенном сдвиге по оси времени*.

Доказательство. Пусть сигнал $y(i)$ получают из сигнала $x(i)$путем его обратного обобщенного сдвига на время τ, т.е. $y(i) = x(i \ominus \tau)$. Энергетический спектр и спектр мощности этого сигнала в базисе ВКФ имеют следующий вид записи [4]:

$$S_y(k) = \frac{1}{N}Y_{BK}(k)Y^*_{BK}(k) = \frac{1}{N}X_{BK}(k)X^*_{BK}(k),$$

$$P_y(k) = NS_y(k) = Y_{BK}(k)Y^*_{BK}(k) = X_{BK}(k)X^*_{BK}(k).$$

Подставляя в эти формулы вместо спектров Виленкина – Крестенсона их представления в виде спектров ОФХ (19), после преобразования получаем

$$S_y(k) = \frac{1}{2N}[Y^2_X(k) + Y^2_X(-k)] = \frac{1}{2N}[X^2_X(k) + X^2_X(-k)] = S_x(k),$$

$$P_y(k) = \frac{1}{2}[Y_X^2(k) + Y_X^2(-k)] = \frac{1}{2}[X_X^2(k) + X_X^2(-k)] = P_x(k).$$

Теорема 5 доказана. Она свидетельствует об инвариантности энергетических характеристик сигнала в базисе ОФХ относительно его обобщенного сдвига по оси дискретного времени.

Теорема 6. Об умножении сигналов. *В базисе ОФХ спектр сигнала — произведения двух других сигналов представляется сумой обобщенных сверток спектров этих сигналов.*

Доказательство. Пусть сигналы $x(i)$, $y(i)$ и $u(i)$ имеют одинаковый интервал определения $[0, N)$ и $y(i)$=$x(i)u(i)$.

В базисе ВКФ спектры этих сигналов связаны между собой соотношением обобщенной свертки [4], т.е.

$$Y_{BK}(k) = \sum_{\lambda=0}^{N-1} X_{BK}(\lambda) U_{BK}(\lambda \ominus k). \tag{24}$$

Но в соответствии с выражением (19)

$$\begin{aligned} X_{BK}(\lambda) &= \frac{X_X(\lambda) + X_X(-\lambda)}{2} - j\frac{X_X(\lambda) - X_X(-\lambda)}{2}, \\ U_{BK}(\lambda \ominus k) &= (U_X(\lambda \ominus k) + U_X(-(\lambda \ominus k)))/2- \\ &\quad - j(U_X(\lambda \ominus k) - U_X(-(\lambda \ominus k)))/2. \end{aligned}$$

Поэтому с учетом этих соотношений из общей формулы (24) после преобразований получаем

$$\begin{aligned} Y_{BK}(k) = \frac{1}{4}\sum_{\lambda=0}^{N-1} \Big\{ &[X_X(\lambda) + X_X(-\lambda)][U_X(\lambda \ominus k) + U_X(-(\lambda \ominus k))]- \\ &- [X_X U) - X_X(-\lambda)][U_X(\lambda \ominus k) - U_X(-(\lambda \ominus k))]\Big\}- \\ - j\frac{1}{4}\sum_{\lambda=0}^{N-1} \Big\{ &[X_X(\lambda) + X_X(-\lambda)][U_X(\lambda \ominus k) - U_X(-(\lambda \ominus k))]+ \\ &+ [X_X(\lambda) - X_X(-\lambda)][U_X(\lambda \ominus k))] + U_X(-(\lambda \ominus k))]\Big\}. \end{aligned}$$

Выделяя в комплексном спектре $Y_{BK}(k)$ действительную и мнимую части и суммируя их, получаем спектр сигнала $y(i)$ в базисе ОФХ:

$$\begin{aligned} Y_X(k) = \frac{1}{2}\Bigg[&\sum_{\lambda=0}^{N-1} X_X(\lambda) U_X(-(\lambda \ominus k)) + \sum_{\lambda=0}^{N-1} X_X(-\lambda) U_X(\lambda \ominus k)+ \\ &+ \sum_{\lambda=0}^{N-1} X_X(\lambda) U_X(\lambda \ominus k) - \sum_{\lambda=0}^{N-1} X_X(-\lambda) U_X(-(\lambda \ominus)) \Bigg]. \end{aligned}$$

Этот спектр выражается сумой четырех обобщенных сверток спектров Хартли сигналов-сомножителей.

Выражение (25) можно упростить и представить спектр Y_X в виде суммы двух сверток, если учесть, что

$$[U_X(\lambda \ominus k) + U_X(-(\lambda \ominus k))]/2 = U_Ч(\lambda \ominus k),$$
$$[U_X(\lambda \ominus k) - U_X(-(\lambda \ominus k))]/2 = U_H(\lambda \ominus k),$$

и поэтому

$$Y_X(k) = \sum_{\lambda=0}^{N-1} X_X(\lambda) U_Ч(\lambda \ominus k) + \sum_{\lambda=0}^{N-1} X_X(-\lambda) U_H(\lambda \ominus k).$$

Теорема 6 доказана. Выбор конкретного варианта ее записи зависит от вида сигналов $x(i)$ и $u(i)$.

Практическое применение приведенных теорем требует знания обобщенных спектральных составляющих Хартли с отрицательными номерами. Последние легко можно определить, если учесть, что каждому спектральному коэффициенту Хартли с отрицательным номером $-k$ соответствует коэффициент Хартли с положительным номером k^*. Номера $-k$ и k^* являются p-ично противоположными числами, разряды p-ичных кодов которых связаны соотношением

$$-k_m = k_m^* = (p - k_m)_p = \ (p - k_m) \ (\operatorname{mod} p), \tag{25}$$

где $(p - k_m)_p$ означает вычет числа $p - k_m$ по модулю p. Соотношение (25) легко подтверждается, если учесть, что вычет разности двух чисел p и k_m равен разности вычетов и вычет числа p по модулю p равен нулю, а вычет числа k_m, меньшего p, равен самому числу k_m.

Все приведенные теоремы обобщенного спектрального анализа Хартли записаны и выведены для систем обобщенных функций Хартли – Адамара. Однако они будут выполняться и для систем Хартли с другими способами упорядочения базисных функций (Пэли и Хармута). Эти теоремы носят обобщенный характер и при конкретных значениях параметра p могут приводить как к известным, так и к новым результатам. Так, например, при $p = N$ и $n = 1$, когда ОФХ переходят в обычные функции Хартли, приведенные теоремы совпадают с теоремами обычного спектрального анализа Хартли [10], а при $p = 2$ и $N = 2n$, когда ОФХ становятся функциями Уолша, они совпадают с теоремами спектрального анализа Уолша [4, 13].

Заключение. Таким образом, в настоящей статье разработаны теоретические основы построения нового класса дискретных вещественных параметрических обобщенных базисных функций Хартли, который можно рассматривать в качестве действенного инструмента спектрального анализа при решении различных задач цифровой обработки сигналов. Приведены методы описания базисных функций, их основные свойства, способы формирования полных ортогональных базисных систем и преобразований, а также основополагающие теоремы спектрального анализа, сформулированные и доказанные в терминах этих функций.

Схожесть свойств полученных базисных систем со свойствами комплексных систем Виленкина – Крестенсона и однозначная взаимосвязь спектров этих систем позволяет рассматривать базис ОФК в качестве вещественной альтернативы комплексному базису ВКФ. Можно сказать, что вряд ли существуют такие задачи, для которых справедливо использование комплексных преобразований Виленкина – Крестенсона и одновременно не может быть применено вещественное обобщенное преобразование Хартли.

Обобщенный характер новых преобразований Хартли позволяет использовать их как при обобщении алгоритмов решения известных задач ЦОС, так и при постановке и решении новых задач обработки сигналов различной формы. Расширению области прикладного применения обобщенного базиса Хартли будет способствовать разработка специальных быстрых процедур анализа спектра, которая поставлена автором в качестве актуальной задачи последующих исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айфичер Э.*, *Джервис Б.* Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание / пер. с англ. М.: Издательский дом “Вильямс”, 2004. 992 с.
2. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.
3. *Цифровая* обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях / под ред. В.Ф. Кравченко. М.: Физматлит, 2007. 554 с.
4. *Трахтман А.М.*, *Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
5. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов. радио, 1972. 352 с.
6. *Сюзев В.В.* Энергетические спектры сигналов в базисе функций Виленкина–Крестенсона, инвариантные к циклическому сдвигу // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007. № 2. С. 64–77.
7. *Сюзев В.В.* Операторы взаимосвязи спектров в базисах комплексных экспоненциальных функций и функций Виленкина–Крестенсона // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 11. URL:http://engjournal. ry/catalog /it/ hidden /1051.html.
8. *Сюзев В.В.*, *Савельев А.Я.*, *Гудзенко Д.Ю.* Методы представления и преобразования сигналов в базисе обобщенных функций Крестенсона // Наука и образование. 2012. № 3. http://technomag.edu.ru/doc/372760.html
9. *Власенко В.А.*, *Лаппа Ю.М.*, *Ярославский Л.П.* Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. М.: Наука, 1990. 180 с.
10. *Брайсуэлл Р.* Преобразование Хартли / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 175 с.
11. *Сюзев В.В.* Теоретические основы спектрального анализа в базисе Хартли // Наука и образование. 2011. № 10. URL: http://technomag.edu.ru/doc/230816.html.
12. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / пер. с англ. М.: Наука, 1969. 227 с.
13. *Сюзев В.В.* Скалярный метод синтеза быстрых преобразований Уолша–Адамара // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. Спец. вып. “Информационные технологии и компьютерные системы”. 2011. С. 128–137.

REFERENCES

[1] Ifeachor E.C, Jervis B.W. Digital Signal Processing: A Practical Approach. 2nd Ed. 2002. 933 p. (Russ. Ed.: Ayficher E., Dzhervis B. Tsifrovaya obrabotka signalov: prakticheskiy podkhod. 2-e izd. Moscow, St. Petersburg., Kiev, Izd. dom “Vil’yams” Publ., 2004. 992 p.)

[2] Zalmanzon L.A. Preobrazovaniya Fur'e, Uolsha, Khaara i ikh primenenie v upravlenii, svyazi i drugikh oblastyakh [Fourier, Walsh and Haar transforms, and their application in control circuit, communication and other fields]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 496 p.

[3] Kravchenko V.F. Tsifrovaya obrabotka signalov i izobrazheniy v radiofizicheskikh prilozheniyakh [Digital signal and image in radiophysical applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 554 p.

[4] Trakhtman A.M., Trakhtman V.A. Osnovy teorii diskretnykh signalov na konechnykh intervalakh [The heart of the theory of discrete signals on finite intervals]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1975. 208 p.

[5] Trakhtman A.M. Vvedenie v obobshchennuyu spektral'nuyu teoriyu signalov [Introduction to the generalized spectrum theory of signals]. Moscow, Sovetskoe Radio Publ., 1972. 352 p.

[6] Syuzev V.V. The energy spectra of signals in the Vilenkin-Christenson functions basis invariant to the cyclic shift. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2007, no. 2, pp. 64–77 (in Russ.).

[7] Syuzev V.V. Association functional of spectra in the complex exponential and Vilenkin–Christenson functions bases. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Eng. J.: Science and Innovation], 2013, iss. 11. pp. 1–7 (in. Russ.). Sc. Educ: El. Sc. Techn. Publ. Available at: http://engjournal.ru/catalog /it/ hidden /1051.html (accessed 22.02.2014).

[8] Syuzev V.V. Presentation methods and signal conversion in the generalized Christenson functions basis. *Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie* [SCIENCE & EDUCATION: El. Sc. Techn. Periodical], 2012, no. 3, pp. 1–28 (in Russ.). Available at: http://technomag.edu.ru/doc/372760.html (accessed 22.02.2014).

[9] Vlasenko V.A., Lappa Yu.M., Yaroslavskiy L.P. Metody sinteza bystrykh algoritmov svertki i spektral'nogo analiza signalov [Synthesis technique of fast algorithms of fold and spectral analysis of signals]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 180 p.

[10] Bracewell R. Hartley Transform: theory and applications. New York: Oxford University Press, 1986. (Russ. Ed.: Braysuell R. Preobrazovanie Khartli Moscow, Mir Publ., 1990. 175 p.)

[11] Syuzev V.V. Theoretical foundations of spectral analysis in the Hartley basis. *Nauka i obrazovanie: elektronnoe nauchno-tekhnicheskoe izdanie* [SCIENCE & EDUCATION: El. Sc. Techn. Periodical], 2011, no. 10, pp. 1–47. Available at: http://technomag.edu.ru/doc/230816.html (accessed 22.02.2014) (in Russ.).

[12] Dwight H.B. Tables of Integrals and Other Mathematical Data. 3th Ed. The Macmillan Co., N.Y., 1947. 198 p. (Russ. Ed.: Dvayt G.B. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly. Moscow, Nauka Publ., 1969. 227 p.)

[13] Syuzev V.V. Scalar method for the synthesis of the fast Walsh-Hadamard transform. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr., Spetsvyp. "Informatsionnye tekhnologii i komp'yuternye sistemy"* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng., Spec. Issue "Information technologies and computer systems"], 2011, pp. 128–137 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 16.12.2013

Владимир Васильевич Сюзев — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Компьютерные системы и сети” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области цифровой обработки сигналов и компьютерных информационно-управляющих систем.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.V. Syuzev — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Computer Systems and Networks” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of digital processing of signals and computer information and control systems.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.