УДК 681.5.015

С. Л. Крутиков

БАЗОВЫЕ ИНЕРЦИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

Приведен краткий обзор существующих методов решения задачи получения базовых инерционных параметров, даны основные понятия и определения и предложен новый метод поиска базовых инерционных параметров для произвольного манипулятора с кинематической схемой без ветвлений. Рассмотрены примеры использования предлагаемого метода для простейших механизмов.

E-mail: SERRK10@yandex.ru

Ключевые слова: *параметрическая идентификация, динамическая модель манипулятора, динамическое управление манипулятором, базовые инерционные параметры, уравнение движения в форме Лагранжа.*

В современных системах управления манипуляционными роботами, как правило, учитывается динамика всего механизма. Это позволяет компенсировать динамическое взаимовлияние звеньев и нелинейность системы и добиться высокой точности позиционирования при больших ускорениях и работе со значительными нагрузками. Такие способы управления называются динамическими и в отличие от кинематических способов основываются на уравнении движения робота. Кроме того, знание динамической модели необходимо для математического моделирования движений манипулятора, что особенно актуально при создании программных имитаторов реальных механизмов (тренажеров).

Уравнение динамики манипулятора полностью определяется его кинематической схемой и инерционными параметрами. Кинематические характеристики манипулятора (в виде параметров Денавита–Хартенберга) обычно известны с достаточной точностью из конструкторской документации или данных САПР. Что же касается инерционных параметров, их также можно определить с помощью пакетов САПР, но такой способ дает довольно грубые результаты [1], которых недостаточно для реализации алгоритмов динамического управления. В связи с этим возникает задача идентификации инерционных параметров на основе данных о реальном движении манипулятора (положения, скорости, ускорения, силы и моменты в сочленениях). Проиллюстрируем постановку задачи идентификации на примере плоского двухзвенного манипулятора, кинематическая схема которого приведена на рис. 1. Известными полагаются геометрические параметры механизма — длины звеньев a_1 и a_2. Оценке подлежат массы звеньев m_1, m_2, статические моменты $S_x^1, S_y^1, S_x^2, S_y^2$ и осевые моменты инерции i_{zz}^1, i_{zz}^2. Кроме того, считается возможным в течение необходимого промежутка времени измерить углы в сочленениях q_1, q_2 и моменты приводов τ_1, τ_2, а также вычислить или измерить производные $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2$.

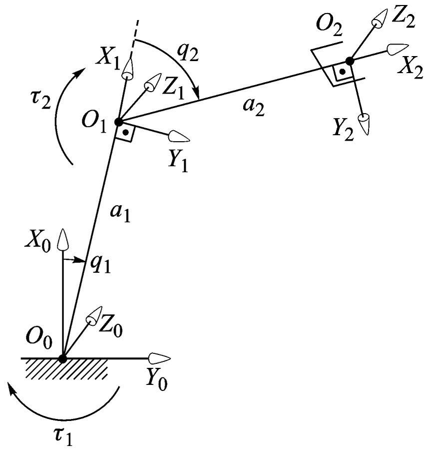

Рис. 1. Кинематическая схема плоского двухзвенного манипулятора

Однако таким образом невозможно однозначно оценить инерционные параметры манипулятора — решений оказывается бесконечно много. Это связано с тем, что одни параметры вообще не входят в уравнение движения, а другие входят, но не отдельно, а некоторыми линейными комбинациями и только их и возможно определить. Такие линейные комбинации инерционных параметров называют *базовыми инерционными параметрами*. Задача их поиска очень важна, поскольку позволяет разрешить неоднозначность при параметрической идентификации динамической модели манипулятора. Кроме того, множество базовых инерционных параметров является минимальным набором параметров, однозначно определяющим динамику рассматриваемого механизма. Поэтому использование уравнения движения, полученного в терминах базовых инерционных параметров, позволяет минимизировать число вычислительных операций при решении обратной задачи динамики (ОЗД). Эта особенность оказывается крайне полезной, поскольку при реализации алгоритмов динамического управления решать ОЗД требуется в режиме реального времени.

В настоящей работе предложен новый метод поиска базовых инерционных параметров для манипуляторов с произвольной кинематической схемой без ветвлений. Приведены основные понятия и определения, математическое обоснование предлагаемого метода, а также дана краткая характеристика существующих способов решения этой задачи. Рассмотрено использование метода на примере простейших механизмов.

Основные понятия. Будем рассматривать N-звенный манипулятор как систему из N твердых тел, связанных кинематическими парами 5-го класса (поступательными или вращательными), соединенную с неподвижным основанием. Связи предполагаем идеальными голономными, а кинематическую цепь — не содержащей ветвлений и замкнутых контуров. С каждым звеном манипулятора связывается подвижная система координат, положение которой относительно подвижной системы координат предыдущего звена определяется однородной матрицей перехода $A_i(q_i)$, где q_i — обобщенная координата i-го звена манипулятора, $i = 1, \ldots, N$. Положение системы координат i-го звена относительно абсолютной системы координат, связанной с неподвижным основанием, определяется соответствующей однородной матрицей перехода $T_i(q_1, \ldots, q_i)$, причем $T_i = \prod_{k=1}^{i} A_k$ [2].

Динамика каждого звена такого механизма характеризуется набором из 10 независимых параметров: массы звена m; моментов первого порядка звена S_u $(u \in \{x, y, z\})$, определяющих положение его центра масс в собственной системе координат; моментов второго порядка звена I_{uv} $(u, v \in \{x, y, z\})$ (осевых и центробежных моментов инерции) в собственной системе координат.

Эти параметры будем называть *элементарными инерционными параметрами звена*. Вектор $\mathbf{p}_i = \left[I^i_{xx}\ I^i_{xy}\ I^i_{xz}\ I^i_{yy}\ I^i_{yz}\ I^i_{zz}\ S^i_x\ S^i_y\ S^i_z\ m_i\right]^{\mathrm{T}}$, составленный из этих параметров, будем называть вектором элементарных инерционных параметров i-го звена. Совокупность элементарных инерционных параметров всех звеньев манипулятора будем называть элементарными инерционными параметрами манипулятора, а вектор $\mathbf{p} = \left[\mathbf{p}_1^{\mathrm{T}} \ldots \mathbf{p}_N^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, составленный из этих параметров, — вектором элементарных инерционных параметров манипулятора. Очевидно, что $\mathbf{p}_i \in R^{10}$, а $\mathbf{p} \in R^{10N}$.

Кинетическая энергия манипуляционного механизма является квадратичной формой относительно обобщенных скоростей манипулятора, причем коэффициенты этой квадратичной формы зависят от обобщенных координат и инерционных параметров манипулятора [2]:

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(tr \sum_{k=\max(i,j)}^{N} U^{\mathrm{T}}_{kj} U_{ki} H_k \right) \dot{q}_i \dot{q}_j. \tag{1}$$

В выражении (1) матрица U_{ij} есть частная производная вида $\partial T_i / \partial q_j$, а H_i — матрица инерции i-го звена, имеющая вид

$$\begin{bmatrix} I^i_{xx} & I^i_{xy} & I^i_{xz} & S^i_x \\ I^i_{xy} & I^i_{yy} & I^i_{yz} & S^i_y \\ I^i_{xz} & I^i_{yz} & I^i_{zz} & S^i_z \\ S^i_x & S^i_y & S^i_z & m_i \end{bmatrix}.$$

Что касается потенциальной энергии манипуляционного механизма, то ее можно разделить на две составляющие, одна из которых зависит от инерционных параметров, а другая — нет: $\Pi = \Pi_{\text{ин}} + \Pi_{\text{неин}}$. Ограничимся рассмотрением манипуляторов, работающих в наземных условиях. Тогда $\Pi_{\text{ин}}$ всегда будет представлять собой потенциальную энергию сил веса, причем $\Pi_{\text{ин}} = \Pi_{\text{ин}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, а $\Pi_{\text{неин}}$ — потенциальную энергию сил и моментов приводов (в простейшем случае), а также любых внешних сил, действующих на механизм (например, силы сопротивления окружающей среды или силы реакции при сборке). Если $\mathbf{Q}$ — вектор обобщенных сил, который включает в себя все внешние силы, действующие на манипуляционный механизм и не зависящие от инерционных параметров, приведенные к обобщенным координатам, то можно записать $\mathbf{Q}^{\text{т}} = -\partial \varPi_{\text{неин}}/\partial \mathbf{q}$. Здесь и далее под потенциальной энергией манипулятора $\varPi$ будем подразумевать только ту ее часть, которая зависит от инерционных параметров манипулятора, т.е. $\varPi_{\text{ин}}$. Тогда выражение для потенциальной энергии манипулятора имеет следующий вид [2]:

$$\varPi(\mathbf{q},\mathbf{p}) = -\left[\mathbf{g}^{\text{т}} 0\right] \sum_{k=1}^{N} T_k H_k \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^{\text{т}}, \tag{2}$$

где $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, заданный в абсолютной системе координат.

Найдем частные производные кинетической и потенциальной энергии манипулятора по l-му инерционному параметру k-го звена p_k^l:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial p_k^l} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} tr\left(U_{kj}^{\text{т}} U_{ki} D H_k^l\right)\dot{q}_i \dot{q}_j, \\ \frac{\partial \varPi}{\partial p_k^l} &= -\left[\mathbf{g}^{\text{т}}\ 0\right] T_k D H_k^l \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^{\text{т}}, \end{aligned}$$

где $DH_k^l = \partial H_k / \partial p_k^l$.

Можно заметить, что матрица DH_k^l числовая, а значит, найденные частные производные не зависят от инерционных параметров манипулятора. Из этого следует, что энергия манипулятора линейна относительно них. Тогда выражения (1) и (2) можно записать в виде

$$K(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{p}) = \mathbf{w}_K(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathbf{p}; \tag{3}$$

$$\varPi(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \mathbf{w}_{\varPi}(\mathbf{q})\mathbf{p}, \tag{4}$$

где $\mathbf{w}_K = \partial K/\partial \mathbf{p}$ и $\mathbf{w}_{\varPi} = \partial \varPi/\partial \mathbf{p}$ — вектор-функции $1 \times 10N$ векторных аргументов. Элементы этих вектор-функций и подобным образом определяемые величины будем называть *коэффициентами влияния*, поскольку они характеризуют вклад соответствующего параметра в суммарное значение. Можно показать, что рассматриваемые здесь коэффициенты влияния являются векторами в бесконечномерном линейном векторном пространстве непрерывных функций, определенных на всем пространстве $\{\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\}$. Поэтому далее будем работать с такими функциями именно с этой точки зрения.

Теперь запишем уравнение движения манипуляционного механизма с помощью уравнений Лагранжа второго рода:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right]^{\text{т}} = \mathbf{Q}, \tag{5}$$

где L — функция Лагранжа манипулятора. Она определяется как

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}) = K\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}\right) - \mathit{\Pi}\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}\right),$$

или с учетом выражений (3) и (4)

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}) = \mathbf{w}_K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{p} - \mathbf{w}_{\mathit{\Pi}}(\mathbf{q})\mathbf{p} = \mathbf{w}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{p}, \tag{6}$$

где $\mathbf{w}_L = \mathbf{w}_K - \mathbf{w}_{\mathit{\Pi}}$ — вектор $1 \times 10N$ коэффициентов влияния элементарных инерционных параметров на функцию Лагранжа манипулятора. Перепишем уравнение движения манипулятора, учитывая равенство (6):

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial \mathbf{w}_L}{\partial \mathbf{q}}\right]\mathbf{p} = \mathbf{Q}.$$

Обозначив выражение в квадратных скобках как W_{EM}, получаем

$$\mathrm{W}_{EM}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\mathbf{p} = \mathbf{Q}. \tag{7}$$

Матрица W_{EM} рассматривается здесь и далее не как функциональная матрица размера $N \times 10N$, а как система из $10N$ вектор-функций размерности $N \times 1$. Эти вектор-функции будем также называть коэффициентами влияния, поскольку они аналогичны по смыслу введенным ранее с той лишь разницей, что они не скалярные, а векторные. Очевидно, что векторные коэффициенты влияния образуют бесконечномерное линейное векторное пространство вектор-функций, определенных на всем пространстве $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\}$.

Таким образом, отметим, что уравнение динамики манипулятора также линейно относительно инерционных параметров. Этот факт позволяет осуществлять их оценку с помощью следующей процедуры. Измерим движение манипулятора, т.е. обобщенные положения, скорости, ускорения, а также силы и моменты приводов, на некотором промежутке времени в ($m > 10$) точках. Затем составим матрицу W и вектор $\mathbf{y}$ следующим образом:

$$W = \begin{bmatrix} \mathrm{W}_{EM}\left(\mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1), \ddot{\mathbf{q}}(t_1)\right) \\ \vdots \\ \mathrm{W}_{EM}\left(\mathbf{q}(t_m), \dot{\mathbf{q}}(t_m), \ddot{\mathbf{q}}(t_m)\right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}(t_m) \end{bmatrix}.$$

Учитывая равенство (7), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора элементарных инерционных параметров:

$$W\mathbf{p} = \mathbf{y}. \tag{8}$$

Решая эту переопределенную систему уравнений, например с помощью метода наименьших квадратов (МНК), найдем искомые значения неизвестных параметров. Однако в действительности ранг основной матрицы системы (8) всегда оказывается меньше числа неизвестных (т.е. $10N$) [3]. Это приводит к неоднозначности решения, поскольку их становится бесконечно много. Получаемое решение зависит от начального приближения МНК. Очевидно, что такая оценка параметров не годится, ведь для конкретного механизма требуется единственное решение. Поскольку дефект ранга основной матрицы системы (8) связан с линейной зависимостью коэффициентов влияния элементарных инерционных параметров, единственности решения можно добиться только понизив ее порядок так, чтобы число неизвестных стало равным значению $rank(W)$.

Ранее было отмечено, что элементы $\mathbf{w}_L$ являются векторами в бесконечномерном линейном пространстве. Очевидно, что это утверждение справедливо и для $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p})$. Тогда вектор-функция $\mathbf{w}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ представляет собой систему из $10N$ векторов этого пространства, а выражение (6) — разложение вектора $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p})$ по векторам этой системы. Пусть ранг системы векторов $\mathbf{w}_L$ равен r_L, тогда можно записать

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{w}}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{p}}_L, \tag{9}$$

где $\tilde{\mathbf{w}}_L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — вектор-функция размерности $1 \times r_L$, элементы которой образуют базис системы векторов $\mathbf{w}_L$, а $\tilde{\mathbf{p}}_L \in R^{r_L}$ — вектор-столбец, представляющий собой коэффициенты базисного разложения вектора $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p})$. Вектор $\tilde{\mathbf{p}}_L$ будем называть вектором базовых инерционных параметров уравнения движения манипулятора.

Теперь найдем, как вектор базовых инерционных параметров уравнения движения связан с вектором элементарных инерционных параметров. Пусть Y_L — матрица размера $r_L \times 10N$ коэффициентов разложения системы векторов $\mathbf{w}_L$ по базису $\tilde{\mathbf{w}}_L$, так что

$$\mathbf{w}_L = \tilde{\mathbf{w}}_L \mathrm{Y}_L, \tag{10}$$

т.е. элемент Y_L^{ij} этой матрицы представляет собой проекцию вектора $\mathbf{w}_L^j$ на базисный вектор $\tilde{\mathbf{w}}_L^i$. Очевидно, что ранг Y_L равен r_L. Тогда равенство (6) может быть переписано в виде $L = \tilde{\mathbf{w}}_L \mathrm{Y}_L \mathbf{p}$, откуда с учетом равенства (9) следует, что вектор базовых инерционных параметров уравнения движения манипулятора может быть выражен через вектор элементарных инерционных параметров:

$$\tilde{\mathbf{p}}_L = \mathrm{Y}_L \mathbf{p}. \tag{11}$$

Перепишем уравнение динамики манипулятора (5) с учетом соотношения (9) как

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}_L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial \tilde{\mathbf{w}}_L}{\partial \mathbf{q}}\right] \tilde{\mathbf{p}}_L = \mathbf{Q}$$

или, обозначая выражение в квадратных скобках как $\tilde{\mathrm{W}}_{EM}$, следующим образом:

$$\tilde{\mathrm{W}}_{EM}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{p}}_L = \mathbf{Q}. \tag{12}$$

Матрица $\tilde{\mathrm{W}}_{EM}$ имеет размер $N \times r_L$ и представляет собой линейно независимую систему из r_L вектор-функций размерностью $N \times 1$ каждая. Это значит, что основная матрица системы уравнений (8) будет иметь максимальный ранг, а сама эта система — единственное решение. Таким образом, запись уравнения движения манипулятора в терминах базовых инерционных параметров позволяет успешно решать задачу параметрической идентификации его динамической модели. Кроме того, очевиден выигрыш в быстродействии при решении ОЗД на цифровых вычислительных машинах вследствие исключения избыточных вычислительных операций.

Алгоритм определения базовых инерционных параметров. В настоящее время существует несколько основных способов поиска базовых инерционных параметров. Халил и Клейнфингер [4] разработали прямую численную процедуру для определения базовых параметров. Она заключается в автоматическом получении уравнения движения манипулятора в форме Лагранжа–Эйлера, определении матрицы коэффициентов влияния инерционных параметров и, наконец, поиске линейно зависимых столбцов этой матрицы. Хотя с помощью этого алгоритма можно получить решение для любого манипулятора, время его работы довольно велико и существенно возрастает с увеличением числа звеньев. Готье и Халил [5] получили рекуррентные соотношения в аналитическом виде для группировки инерционных параметров манипуляторов с произвольной ветвящейся кинематической схемой. Однако этот способ не дает полного решения, а лишь позволяет получить верхнюю границу числа базовых инерционных параметров. Кроме того, поскольку этот метод основан на анализе энергии манипулятора, невозможно понять, какое влияние оказывают полученные базовые параметры на движение механизма (нет связи с уравнением движения). Майеда, Йошида и Осука [3] предлагают аналитическое решение, основанное на уравнении движения в форме Ньютона–Эйлера в символьном виде. Этот метод учитывает физический смысл инерционных параметров, однако он применим только к манипуляторам с вращательными сочленениями, причем оси вращения соседних сочленений должны быть параллельны или перпендикулярны. Таким образом, ни один из перечисленных методов полностью нас не устраивает, в связи с чем был разработан собственный метод. Далее рассмотрены его основные идеи.

Отметим, что вектор базовых инерционных параметров уравнения движения (далее будем опускать слова уравнения движения в отношении базовых инерционных параметров) полностью определяется матрицей Y_L коэффициентов разложения. Простейший способ нахождения этой матрицы заключается в определении базиса системы векторов $\mathbf{w}_L$ и разложении векторов этой системы по найденному базису. Однако такой способ оказывается неэффективным, поскольку выполнять эту процедуру вручную практически невозможно для механизмов с числом звеньев от трех и более ввиду громоздкости получаемых выражений, а реализация этого алгоритма на ЭВМ с помощью библиотек или пакетов компьютерной алгебры приводит к довольно длительным вычислениям. Поэтому предлагается иной способ, математические основы которого приведены далее.

Пусть F — пространство непрерывных функций, определенных на множестве $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}$. Пусть F_2 — некоторое конечномерное подпространство пространства F размерности r_2 такое, что система векторов $\mathbf{w}_L$ принадлежит этому подпространству. Обозначим базисное множество F_2 как β_{F_2}, а вектор-строку, составленную из элементов β_{F_2}, как $\mathbf{b}$. Обозначим матрицу координат векторов $\mathbf{w}_L^i$ в базисе пространства F_2, как Z. Тогда очевидно следующее равенство:

$$\mathbf{w}_L = \mathbf{b}\mathrm{Z}. \tag{13}$$

Пусть $\tilde{\mathrm{Z}}$ — матрица координат векторов $\tilde{\mathbf{w}}_L^i$ в базисе пространства F_2. Тогда можно записать

$$\tilde{\mathbf{w}}_L = \mathbf{b}\tilde{\mathrm{Z}}. \tag{14}$$

Следует отметить, что система столбцов матрицы $\tilde{\mathrm{Z}}$ является базисом для системы столбцов матрицы Z, так как система векторов $\tilde{\mathbf{w}}_L$ является базисом для системы векторов $\mathbf{w}_L$. Вектор-функции $\mathbf{w}_L$ и $\tilde{\mathbf{w}}_L$ связаны соотношением (10). С учетом равенств (13) и (14) оно примет вид $\mathbf{b}\mathrm{Z} = \mathbf{b}\tilde{\mathrm{Z}}\mathrm{Y}_L$. Поскольку это равенство должно быть справедливо для любых базисов $\mathbf{b}$, можно получить следующую формулу для определения матрицы Y_L:

$$\mathrm{Y}_L = (\tilde{\mathrm{Z}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{Z}})^{-1}\tilde{\mathrm{Z}}^{\mathrm{T}}\mathrm{Z}. \tag{15}$$

Ранее было показано, что матрица Y_L полностью определяет вектор базовых инерционных параметров. Однако для вычисления этой матрицы необходимо сначала найти матрицу $\tilde{\mathrm{Z}}$, которая, в отличие от матрицы Z, заранее неизвестна. В самом деле, алгоритм получения кинетической и потенциальной энергии определен, вектор элементарных инерционных параметров — тоже, следовательно, нетрудно найти вектор их коэффициентов влияния. Далее можно найти матрицу координат Z, полагая известным базис (или закон формирования базиса) пространства F_2. Это справедливо, так как можно задать этот базис с одним лишь условием: пространство F_2 должно содержать систему векторов $\mathbf{w}_L$. Матрица $\tilde{\mathrm{Z}}$ неизвестна, как и $\tilde{\mathbf{w}}_L$. Ее можно найти с помощью следующего простого алгоритма: привести матрицу Z к ступенчатому[1] виду и определить индексы столбцов, содержащих ступеньки, т.е. первые слева в своей строке ненулевые элементы. Легко показать, что система этих столбцов будет формировать базис матрицы Z, т.е. фактически задавать $\tilde{\mathrm{Z}}$. Следовательно, элементы системы векторов $\mathbf{w}_L$ с соответствующими индексами будут образовывать ее базис, т.е. $\tilde{\mathbf{w}}_L$.

Исходя из приведенных соображений, можно построить следующий алгоритм определения базовых инерционных параметров:

• поиск некоторого подпространства F_2 в пространстве функций, определенных на $\{\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\}$, базис (или алгоритм формирования базиса) которого известен заранее, такого, что система векторов $\mathbf{w}_L$ принадлежит этому подпространству;

• нахождение координат векторов системы $\mathbf{w}_L$ в найденном подпространстве и составление из них матрицы Z;

• приведение матрицы координат Z к ступенчатому виду и определение индексов столбцов, образующих базис системы столбцов этой матрицы;

• определение координат базиса системы векторов $\mathbf{w}_L$ в искомом подпространстве как столбцов исходной матрицы координат Z с найденными на предыдущем этапе индексами и составление из них матрицы $\tilde{\mathrm{Z}}$;

• вычисление на основе полученных матриц Z и $\tilde{\mathrm{Z}}$, матрицы Y_L, определяющей вектор базовых инерционных параметров через известный заранее вектор элементарных инерционных параметров.

Следует отметить, что искомое подпространство должно быть конечномерным, так как в противном случае невозможно составить матрицу координат.

Таким образом, задача определения базовых параметров фактически сводится к поиску искомого подпространства, поскольку все остальные шаги алгоритма являются элементарными. На первый взгляд может показаться, что эта задача невыполнима из-за огромного числа вариантов кинематических схем манипуляторов. Однако благодаря тому, что известна структура элементов $\mathbf{w}_L$ (т.е. алгоритм их получения), оказывается возможным найти закон формирования базиса искомого подпространства. Это утверждает следующая теорема.

Теорема[2] (о базисном множестве). *Система векторов $\mathbf{w}_L$ полностью принадлежит конечномерному линейному векторному про-*

[1] Говорят, что прямоугольная матрица имеет ступенчатый вид, если номер столбца первого ненулевого элемента i-й строки больше номера столбца первого ненулевого элемента $(i-1)$-й строки, $i = 2, \ldots, m$, где m — номер последней ненулевой строки (предполагается, что все ненулевые строки идут подряд).

[2] Доказательство теоремы приведено в приложении.

странству размерности $(N^2+N)\cdot 5^\nu\cdot 3^{N-\nu}/2+3^\nu\cdot 2^{N-\nu}$*, задаваемому базисным множеством следующего вида:*

$$\beta_{F_2}=\Biggl\{\biggl\{\Bigl\{\frac{1}{2}\dot q_i^2, i=1\dots N\Bigr\}\cup\bigl\{\dot q_i\dot q_j,\ i=1\dots N, j=(i+1)\dots N\bigr\}\biggr\}*$$
$$*\bigl\{1,\cos q_{l_1},\sin q_{l_1},\cos 2q_{l_1},\sin 2q_{l_1}\bigr\}*\dots*$$
$$*\bigl\{1,\cos q_{l_\nu},\sin q_{l_\nu},\cos 2q_{l_\nu},\sin 2q_{l_\nu}\bigr\}*$$
$$*\bigl\{1,q_{l_\nu+1},q^2_{l_\nu+1}\bigr\}*\dots*\bigl\{1,q_{l_N},q^2_{l_N}\bigr\}\Biggr\}\cup$$
$$\cup\Bigl\{\bigl\{1,\cos q_{l_1},\sin q_{l_1}\bigr\}*\dots*\bigl\{1,\cos q_{l_\nu},\sin q_{l_\nu}\bigr\}*$$
$$*\bigl\{1,q_{l_\nu+1}\bigr\}*\dots*\bigl\{1,q_{l_N}\bigr\}\Bigr\},$$

где N *— полное число звеньев манипулятора, а* ν *— число вращательных звеньев*[3].

Под операцией, обозначенной $*$, упрощенно понимается следующее: если имеются множества $A=\{a_i,\ \ i=1,\dots,m\}$ и $B=\{b_i,\ \ i==1,\dots,n\}$, то множество $C=A*B$ будет иметь вид $\{a_ib_j,\ \ i==1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$, причем $|D|=|A|\cdot|B|$.

Примеры. Приведем примеры использования разработанного метода поиска базовых инерционных параметров. Сначала на примере однозвенного манипулятора подробно разберем каждый шаг алгоритма поиска. Такой простейший механизм был выбран в целях наглядной иллюстрации понятий и идей, изложенных ранее. Затем приведем основные результаты для плоского двухзвенного манипулятора. Понятно, что в действительности применение предлагаемого метода целесообразно лишь в случае существенно более сложных механизмов.

Рассмотрим однозвенный манипулятор с кинематической схемой, приведенной на рис. 2. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии рассматриваемого манипулятора

$$K=\frac{1}{2}\dot q_1^2\left(I^1_{xx}+I^1_{yy}+2a_1S^1_x+a_1^2m_1\right),$$
$$\mathit{\Pi}=g\left(c_1S^1_x-s_1S^1_y+a_1c_1m_1\right).$$

Здесь и далее используются следующие обозначения: g — ускорение свободного падения, c_i и s_i — косинус и синус угла q_i. По определению вектор элементарных инерционных параметров механизма будет иметь вид

$$\mathbf{p}=\left[I^1_{xx}\ I^1_{xy}\ I^1_{xz}\ I^1_{yy}\ I^1_{yz}\ I^1_{zz}\ S^1_x\ S^1_y\ S^1_z\ m_1\right]^{\text{т}}.$$

Найдем коэффициенты влияния элементарных инерционных параметров на функцию Лагранжа. Вообще говоря, определять выражения

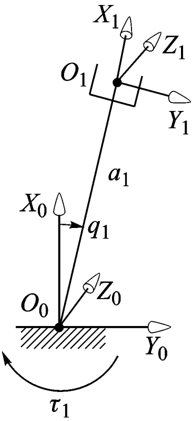

Рис. 2. Кинематическая схема однозвенного манипулятора

кинетической и потенциальной энергии, а также коэффициентов влияния элементарных инерционных параметров в реальных задачах необходимо численно с помощью какого-либо пакета компьютерной алгебры, однако в данном примере для большей наглядности сделаем это аналитически:

$$\mathbf{w}_L = \left[\frac{1}{2}\dot q_1^2 0 0 \frac{1}{2}\dot q_1^2 0 0 a_1\dot q_1^2 - gc_1 gs_1 0 \frac{1}{2}a_1^2\dot q_1^2 - a_1 gc_1\right].$$

Пусть базис системы векторов $\mathbf{w}_L$ имеет вид $\tilde{\mathbf{w}}_L = \left[\frac{1}{2}\dot q_1^2 \quad -gc_1 \quad gs_1\right]$. Тогда вектор базовых инерционных параметров манипулятора равен

$$\tilde{\mathbf{p}} = \left[I_{xx}^1 + I_{yy}^1 + 2a_1 S_x^1 + a_1^2 m_1 \quad S_x^1 + a_1 m_1 \quad S_y^1\right]^{\mathrm{T}}.$$

Очевидно, что эта пара $(\tilde{\mathbf{w}}_L, \tilde{\mathbf{p}})$ является решением, поскольку $\tilde{\mathbf{w}}_L$ — система линейно независимых векторов, и $\tilde{\mathbf{w}}_L\tilde{\mathbf{p}} = K - \Pi$.

Теперь получим решение с помощью предлагаемого метода и сравним его с приведенным ранее. Сформируем базисное множество вспомогательного пространства F_2 в соответствии с теоремой о базисном множестве:

$$\beta_{F_2} = \left\{\frac{1}{2}\dot q_1^2, \frac{1}{2}\dot q_1^2\cos q_1, \frac{1}{2}\dot q_1^2\sin q_1, \frac{1}{2}\dot q_1^2\cos 2q_1,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\dot q_1^2\sin 2q_1, 1, \cos q_1, \sin q_1\right\}.$$

Найдем координаты векторов $\mathbf{w}_L^i$ и составим из них матрицу

$$\mathrm{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a_1 & 0 & 0 & a_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & -a_1 g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицу Z необходимо привести к ступенчатому виду. Однако в нашем случае она фактически уже приведена к нему: очевидно, что, переставляя 2-ю и 7-ю, а также 3-ю и 8-ю строки, мы получаем искомую матрицу. Тогда базис системы столбцов матрицы Z образуют

1, 7 и 8-й столбцы. Соответственно базис системы векторов $\mathbf{w}_L$ будет иметь вид $\tilde{\mathbf{w}}_L = \left[\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \;\; a_1\dot{q}_1^2 - gc_1 \;\; gs_1\right]$, а матрица координат его компонент $\tilde{\mathrm{Z}}$ записывается так

$$\tilde{\mathrm{Z}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Теперь можно вычислить матрицу Y, определяющую вектор базовых инерционных параметров через вектор элементарных инерционных параметров, по формуле (15). После выполнения арифметических действий и упрощения выражений матрица Y примет следующий вид:

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда вектор базовых инерционных параметров будет равен

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathrm{Y}\mathbf{p} = \left[I_{xx}^1 + I_{yy}^1 - a_1^2 m_1 \quad S_x^1 + a_1 m_1 \quad S_y^1\right]^{\mathrm{T}}.$$

Легко проверить, что этот результат соответствует полученному аналитически решению, т.е. $\tilde{\mathbf{w}}_L^{\mathrm{A}}\tilde{\mathbf{p}}^{\mathrm{A}} = \tilde{\mathbf{w}}_L^{\mathrm{Ч}}\tilde{\mathbf{p}}^{\mathrm{Ч}}$, где индекс А соответствует аналитическому решению, а индекс Ч — решению с помощью предложенного метода. Отметим, что последнее решение имеет несколько более компактную форму в части базовых инерционных параметров, а первое — в части коэффициентов влияния базовых параметров. Особенно хорошо это будет заметно при рассмотрении механизмов с большим числом звеньев.

Вернемся теперь к плоскому двухзвенному манипулятору (см. рис. 1). Запишем следующие выражения для кинетической и потенциальной энергии механизма:

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2(I_{xx}^1 + I_{yy}^1 + 2a_1S_x^1 + a_1^2m_1 + I_{xx}^2 + I_{yy}^2 + 2(a_1c_2 + a_2)S_x^2 -$$

$$- 2a_1s_2S_y^2 + (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2)m_2) + \dot{q}_1\dot{q}_2(I_{xx}^2 + I_{yy}^2 + (a_1c_2 + 2a_2)S_x^2 -$$

$$- a_1s_2S_y^2 + (a_2^2 + a_1a_2c_2)m_2) + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2(I_{xx}^2 + I_{yy}^2 + 2a_2S_x^2 + a_2^2m_2),$$

$$\mathit{\Pi} = g\left(c_1S_x^1 - s_1S_y^1 + a_1c_1m_1 + c_{12}S_x^2 - s_{12}S_y^2 + (a_1c_1 + a_2c_{12})\,m_2\right).$$

Тогда вектор элементарных инерционных параметров и вектор их коэффициентов влияния будут иметь следующий вид:

$$
\mathbf{p} = \begin{bmatrix} I_{xx}^1 \\ I_{xy}^1 \\ I_{xz}^1 \\ I_{yy}^1 \\ I_{yz}^1 \\ I_{zz}^1 \\ S_x^1 \\ S_y^1 \\ S_z^1 \\ m_1 \\ I_{xx}^2 \\ I_{xy}^2 \\ I_{xz}^2 \\ I_{yy}^2 \\ I_{yz}^2 \\ I_{zz}^2 \\ S_x^2 \\ S_y^2 \\ S_z^2 \\ m_2 \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{w}_L = \begin{bmatrix}
\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \\
0 \\
0 \\
\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \\
0 \\
0 \\
a_1\dot{q}_1^2 - gc_1 \\
gs_1 \\
0 \\
\frac{1}{2}a_1^2\dot{q}_1^2 - a_1gc_1 \\
\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 \\
0 \\
0 \\
\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 \\
0 \\
0 \\
(a_1c_2 + a_2)\,\dot{q}_1^2 + (a_1c_2 + 2a_2)\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_2\dot{q}_2 - gc_{12} \\
-a_1s_2\dot{q}_1^2 - a_1s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + gs_{12} \\
0 \\
\frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2\right)\dot{q}_1^2 + \left(a_2^2 + a_1a_2c_2\right)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}a_2^2\dot{q}_2^2 - (a_1c_1 + a_2c_{12})\,g
\end{bmatrix}^{\mathrm{т}}.
$$

Проанализировав выражения коэффициентов влияния, можно найти решение в виде следующей пары $(\tilde{\mathbf{w}}_L, \tilde{\mathbf{p}})$:

$$\tilde{\mathbf{w}}_L = \left[\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \quad -gc_1 \quad gs_1 \quad \dot{q}_1\dot{q}_2 \Rightarrow\right.$$
$$\left.\Rightarrow +\frac{1}{2}\dot{q}_2^2 \; a_1c_2\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\right) - gc_{12} \; -a_1s_2\left(\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\right)+gs_{12}\right],$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} I_{xx}^1 + I_{yy}^1 + 2a_1S_x^1 + a_1^2m_1 + I_{xx}^2 + I_{yy}^2 + 2a_2S_x^2 + (a_1^2+a_2^2)m_2 \\ S_x^1 + a_1m_1 + a_1m_2 \\ S_y^1 \\ I_{xx}^2 + I_{yy}^2 + 2a_2S_x^2 + a_2^2m_2 \\ S_x^2 + a_2m_2 \\ S_y^2 \end{bmatrix}.$$

Проверка справедливости этого утверждения осуществляется так же, как и в предыдущем примере.

Теперь получим решение с помощью предлагаемого метода. Однако ввиду громоздкости получаемых выражений опустим промежуточные вычисления и сразу запишем окончательный результат:

$$\tilde{\mathbf{w}}_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 \\ a_1\dot{q}_1^2 - gc_1 \\ gs_1 \\ \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 \\ (a_1c_2+a_2)\,\dot{q}_1^2 + (a_1c_2+2a_2)\,\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_2\dot{q}_2 - gc_{12} \\ -a_1s_2\dot{q}_1^2 - a_1s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + gs_{12} \end{bmatrix}^{\mathrm{т}},$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} I_{xx}^1 + I_{yy}^1 - a_1^2m_1 - a_1^2m_2 \\ S_x^1 + a_1m_1 + a_1m_2 \\ S_y^1 \\ I_{xx}^2 + I_{yy}^2 - a_2^2m_2 \\ S_x^2 + a_2m_2 \\ S_y^2 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что этот результат был получен с помощью программы, реализующей алгоритм поиска в пакете Matlab. Аналитическое и численное решения эквивалентны, т.е. $\tilde{\mathbf{w}}_L^A\tilde{\mathbf{p}}^A = \tilde{\mathbf{w}}_L^{\text{ч}}\tilde{\mathbf{p}}^{\text{ч}}$. Кроме того, аналитическое решение более компактно в части коэффициентов влияния, а численное — в части базовых инерционных параметров.

Последний пример иллюстрирует, скорее, фактическую невозможность решить задачу предложенным методом аналитически, нежели реальное его использование. Это связано с быстрым возрастанием размерности пространства F_2 (а значит, и матрицы координат коэффициентов влияния) при увеличении числа звеньев манипулятора: уже для двухзвенника она составляетт 84×20 элементов. Поэтому очевидна необходимость разработки соответствующих численных процедур.

Заключение. Итак, уравнения движения манипулятора действительно оказываются линейными относительно инерционных параметров. Этот факт позволяет осуществлять их оценку с помощью несложной процедуры решения системы линейных алгебраических уравнений. Однако при отыскании решения в терминах элементарных инерционных параметров имеет место неоднозначность, связанная с линейной зависимостью их коэффициентов влияния, что приводит к дефекту ранга основной матрицы искомой системы уравнений. Чтобы избавиться от этой проблемы энергию манипулятора и его уравнение движения формулируют в терминах базовых инерционных параметров. Такой способ описания динамики манипулятора позволяет также уменьшить объем вычислений при решении ОЗД.

Кроме того, в настоящей работе предложен новый метод поиска базовых инерционных параметров для манипуляторов с произвольной кинематической схемой без ветвлений и замкнутых контуров, изложены его математические основы и рассмотрены примеры. Важнейшей составляющей метода является теорема о базисном множестве. Эта теорема определяет конечное множество линейно независимых векторов, задающих конечномерное линейное пространство, которое содержит коэффициенты влияния всех элементарных инерционных параметров. Таким образом, становится возможным вычислить их проекции на полученное пространство, а следовательно, найти матрицу линейного преобразования, определяющего переход от элементарных инерционных параметров к базовым. Указанный закон формирования базисного множества имеет также то преимущество, что его элементы входят в выражения коэффициентов влияния в явном виде. Этот факт позволяет не только построить простой и эффективный алгоритм поиска базовых инерционных параметров, но и разработать приложение, автоматически генерирующее подпрограмму решения ОЗД с минимальным для рассматриваемого манипулятора числом вычислительных операций.

В настоящее время идет работа по реализации и тестированию программного обеспечения, выполняющего описанные функции. В будущем предполагается обобщить предложенный метод для более широкого класса механизмов — манипуляторов с ветвящимися кинематическими схемами и с замкнутыми контурами.

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю профессору С.Л. Зенкевичу за плодотворное обсуждение

основных моментов работы, а также заведующему кафедрой РК10 МГТУ им. Н.Э. Баумана, профессору А.С. Ющенко за методические указания по изложению материала статьи.

Приложение. Из всех утверждений теоремы о базисном множестве в доказательстве нуждается лишь факт принадлежности векторов $\tilde{\mathbf{w}}_L^i$ линейному пространству, задаваемому базисными векторами из множества β_{F_2}. Действительно, линейная независимость системы векторов, получаемой по указанному в теореме алгоритму, очевидна. Как, впрочем, и размерность задаваемого ими пространства, равная числу векторов в сформированном базисе. Тогда для доказательства теоремы достаточно показать, что любой вектор $\tilde{\mathbf{w}}_L^i$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов из указанного базисного множества и только их.

Проанализировав выражение матрицы перехода от системы координат k-го звена к системе координат $(k-1)$-го звена[3], можно заметить, что

$$A_k = \sum_{l=1}^{m_k} \tilde{A}_k^l x_k^l, \tag{16}$$

где $x_k^l \in X_k$, $m_k = |X_k|$, $X_k = \{1, \cos q_k, \sin q_k\}$ в случае вращательного звена и $X_k = \{1, d_k\}$ — в случае поступательного звена, а $\tilde{A}_k^l$ — постоянные матрицы, зависящие от геометрических параметров. Матрица перехода от системы координат k-го звена к абсолютной системе координат определяется соотношением $T_k = A_1 \ldots A_k$. С учетом равенства (16) это соотношение запишется в виде

$$T_k = \left(\sum_{l_1=1}^{m_1} \tilde{A}_1^{l_1} x_1^{l_1}\right) \ldots \left(\sum_{l_i=1}^{m_k} \tilde{A}_k^{l_k} x_k^{l_k}\right).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$T_k = \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_k=1}^{m_k} \left(\tilde{A}_1^{l_1} \ldots \tilde{A}_k^{l_k}\right) x_k^{l_k} \ldots x_1^{l_1}.$$

Обозначим выражение в круглых скобках как $\tilde{T}_k^{l_1 \ldots l_k}$. Тогда имеем

$$T_k = \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{T}_k^{l_1 \ldots l_k} x_k^{l_k} \ldots x_1^{l_1}.$$

Теперь запишем выражение для коэффициента влияния l-го инерционного параметра k-го звена на потенциальную энергию механизма. С учетом последнего соотношения оно примет вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l} = -\sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_k=1}^{m_k} \left([\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\ 0]\, \tilde{T}_k^{l_1 \ldots l_k} D H_k^l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right) x_k^{l_k} \ldots x_1^{l_1}.$$

Отметим, что выражение в круглых скобках является постоянной величиной. Обозначая его как $DP_{10(k-1)+l}^{l_1 \ldots l_k}$, а также имея в виду, что $x_i^1 = 1$ $(i = 1, \ldots, N)$, получаем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l} = -\sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_k=1}^{m_k} DP_{10(k-1)+l}^{l_1 \ldots l_k} x_1^{l_1} \ldots x_k^{l_k} x_{k+1}^1 \ldots x_N^1.$$

[3]Предполагается, что они построены по алгоритму Денавита–Хартенберга [2].

Рассмотрим частные производные $U_{ki} = \partial T_k / \partial q_i$. Они могут быть вычислены следующим образом [2]:

$$U_{ki} = \begin{cases} 0, & k < i; \\ A_1 \ldots D_i A_i \ldots A_k, & k \geq i, \end{cases}$$

где D_i — постоянная матрица. Тогда с учетом соотношений (16) имеем

$$U_{ki} = \left(\sum_{l_1=1}^{m_1} \tilde{A}_1^{l_1} x_1^{l_1} \right) \ldots D_i \left(\sum_{l_i=1}^{m_i} \tilde{A}_i^{l_i} x_i^{l_i} \right) \ldots \left(\sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{A}_k^{l_k} x_k^{l_k} \right).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$U_{ki} = \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_k=1}^{m_k} \left(\tilde{A}_1^{l_1} \ldots D_i \tilde{A}_i^{l_i} \ldots \tilde{A}_k^{l_k} \right) x_k^{l_k} \ldots x_1^{l_1}.$$

Обозначим выражение в круглых скобках как $\tilde{U}_{ki}^{l_1 \ldots l_k}$. Тогда последнее соотношение можно переписать в виде

$$U_{ki} = \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{U}_{ki}^{l_1 \ldots l_k} x_k^{l_k} \ldots x_1^{l_1}. \tag{17}$$

Теперь рассмотрим матричное произведение $U_{kj}^{\mathrm{T}} U_{ki}$. Воспользовавшись равенством (17) запишем

$$U_{kj}^{\mathrm{T}} U_{ki} = \left(\sum_{l'_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l'_k=1}^{m_k} \tilde{U}_{kj}^{l'_1 \ldots l'_k} x_k^{l'_k} \ldots x_1^{l'_1} \right)^{\mathrm{T}} \left(\sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l_k=1}^{m_k} \tilde{U}_{ki}^{l_1 \ldots l_k} x_k^{l_k} \ldots x_1^{l_1} \right).$$

Раскрыв скобки, получим

$$U_{kj}^{\mathrm{T}} U_{ki} = \sum_{l'_1=1}^{m_1} \sum_{l_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{l'_k=1}^{m_k} \sum_{l_k=1}^{m_k} \left[\left(\tilde{U}_{kj}^{l'_1 \ldots l'_k} \right)^{\mathrm{T}} \tilde{U}_{ki}^{l_1 \ldots l_k} \right] x_k^{l'_k} x_k^{l_k} \ldots x_1^{l'_1} x_1^{l_1}. \tag{18}$$

Нетрудно убедиться, что выражение

$$\sum_{l'=1}^{m_k} \sum_{l=1}^{m_k} (\alpha_{l'} \beta_l)\, x_k^{l'} x_k^l,$$

где $\alpha_{l'}$ и β_l — некоторые постоянные коэффициенты, может быть представлено для любых k в виде следующей линейной комбинации:

$$\sum_{m=1}^{r_k} \gamma_m y_k^m,$$

где $y_k^l \in Y_k$, $r_k = |Y_k|$, $Y_k = \{1, \cos q_k, \sin q_k, \cos 2q_k, \sin 2q_k\}$ — в случае вращательного звена и $Y_k = \left\{1, d_k, d_k^2\right\}$ — в случае поступательного звена. Применяя такое преобразование в равенстве (18) последовательно k раз, очевидно, получим

$$U_{kj}^T U_{ki} = \sum_{l_1=1}^{r_1} \ldots \sum_{l_k=1}^{r_k} \hat{U}_{kji}^{l_1 \ldots l_k} y_k^{l_k} \ldots y_1^{l_1},$$

где $\hat{U}_{kji}^{l_1 \ldots l_k}$ — некоторая постоянная матрица. Тогда выражение для коэффициента влияния l-го инерционного параметра k-го звена на кинетическую энергию механизма примет вид

$$\frac{\partial K}{\partial p_k^l} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l_1=1}^{r_1}\cdots\sum_{l_k=1}^{r_k} tr\left(\hat{U}_{kji}^{l_1\ldots l_k} DH_k^l\right) y_k^{l_k}\ldots y_1^{l_1}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

Принимая во внимание симметричность матрицы квадратичной формы кинетической энергии, а также имея в виду, что $y_i^1 = 1$ $(i = 1, \ldots, N)$, окончательно получаем

$$\frac{\partial K}{\partial p_k^l} = \sum_{l_1=1}^{r_1}\cdots\sum_{l_k=1}^{r_k}\left[\sum_{i=1}^{N} tr\left(\hat{U}_{kii}^{l_1\ldots l_k} DH_k^l\right)\frac{1}{2}\dot{q}_i^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} tr\left(\hat{U}_{kji}^{l_1\ldots l_k} DH_k^l\right)\dot{q}_i\dot{q}_j\right] y_1^{l_1}\ldots y_k^{l_k} y_{k+1}^1\ldots y_N^1.$$

Коэффициенты при квадратах и смешанных произведениях обобщенных скоростей являются постоянными величинами, но по определению

$$\tilde{\mathbf{w}}_L^{10(k-1)+l} = \frac{\partial L}{\partial p_k^l} = \frac{\partial K}{\partial p_k^l} - \frac{\partial \Pi}{\partial p_k^l}.$$

Из полученных выражений для коэффициентов влияния $(10(k-1)+l)$-го инерционного параметра на кинетическую и потенциальную энергию ясно, что коэффициент влияния этого параметра на функцию Лагранжа является линейной комбинацией указанных в теореме базисных векторов. Поскольку индексы k и l пробегают значения от 1 до N и от 1 до 10 соответственно, этот вывод справедлив для всех инерционных параметров механизма; следовательно, теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atkeson Ch. G., An C. H., Hollerbach J. M. Estimation of inertial parameters of manipulator loads and links. Intl // Journal of Robotics Research. – 1986. – Vol. 5. No. 3. – P. 101–118.
2. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
3. Mayeda H., Yoshida K., Osuka K. Base parameters of manipulator dynamic models // IEEE Trans. on Robotics and Automation. – 1990. – Vol. 6. No. 3. – P. 312–320.
4. Khalil W., Kleinfinger J.-F. Minimum operations and minimum parameters of the dynamic models of tree structure robots // IEEE Journal of Robotics and Automation. – 1987. – Vol. RA-3. No. 6. – P. 517–525.
5. Gautier M., Khalil W. Direct calculation of minimum set of inertial parameters of serial robots // IEEE Trans. on Robotics and Automation. – 1990. – Vol. 6. No. 3. – P. 368–372.

Статья поступила в редакцию 26.05.2010

Сергей Леонидович Крутиков родился в 1985 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2008 г., получил степень магистра техники и технологии по направлению “Автоматизация и управление”. Аспирант кафедры "Робототехнические системы" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области робототехники.

S.L. Krutikov (b. 1985) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2008, defended Master’s degree in engineering and technology for “Automation and Control”. Post-graduate of “Robotic Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of robotics.